MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DE BEJAIA
A. MIRA
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Cours Mathématiques
Spécialité : S. T. I. D

Par

H. Zerouati

THÈME

Mesure et intégration

Mesure et intégration

Table des matières

1

Algèbre d'ensembles

1.1 Notations usuelles

Définition

Un ensemble est une collection d'objets rassemblés par une même propriété

Soit E un ensemble,on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E défini par .

$$\mathcal{P}(E) = \{X : X \subset E\}$$

$$\overline{A} = E \diagdown A = \{x \in E \text{ et } x \notin A\}$$

$$\begin{aligned} A \diagdown B &= \{x \in E : x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \overline{B} \\ A \Delta B &= (A \diagdown B) \cup (B \diagdown A) \end{aligned}$$

1.2 Clan

Soit E un ensemble non vide.

Définition

On appelle clan de parties de E ou anneau de Boole ou encore anneau booléen tout sous ensemble $\mathfrak{C}$ de $\mathcal{P}(E)$ vérifiant

$$\begin{aligned} C1 &: A, B \in \mathfrak{C} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{C}; \\ C2 &: A, B \in \mathfrak{C} \Rightarrow A \diagdown B \in \mathfrak{C}. \end{aligned}$$

Exemples

1°) $\mathfrak{C} = \{\emptyset, E\}$

2°) $\mathfrak{C} = \mathcal{P}(E)$

3°) $\mathfrak{C} = \left\{ A = \bigcup\limits_{j=1}^{n} I_j, I_j \text{ est un intervalle de } \mathbb{R} \right\}$

Propriétés

Etant donné un clan $\mathfrak{C}$, alors

P1: $\emptyset \in \mathfrak{C}$

P2: $A, B \in \mathfrak{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{C}$

P3: $A, B \in \mathfrak{C} \Rightarrow A \Delta B \in \mathfrak{C}$

P4: Toute intersection finie et toute réunion finie d'éléments d'un clan $\mathfrak{C}$ est un élément de $\mathfrak{C}$.

En effet

$$\forall A \in \mathfrak{C}, A \diagdown A \in \mathfrak{C} \Rightarrow \emptyset \in \mathfrak{C}$$

$$\forall A, B \in \mathfrak{C}; A \cap B = A \diagdown (A \diagdown B) = B \diagdown (B \diagdown A)$$

$$A \Delta B = (A \diagdown B) \cup (B \diagdown A)$$

Algèbre

Définition

On appelle algèbre de parties de E ou clan unitaire ou anneau de Boole unitaire ou encore anneau booléen unitaire tout sous ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(E)$ vérifiant

$$\begin{aligned} A1 &: E \in \mathcal{A} \\ A2 &: A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \diagdown B \in \mathcal{A} \\ A3 &: A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

Autrement dit une algèbre de parties de E est un clan contenant E.

Remarque

La condition $A2$ est équivalente à la condition $A^{'}2$

$$A^{'}2 : A \in \mathcal{A} \Longrightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$$

En effet :

$$\overline{A} = E \diagdown A$$

$$A \diagdown B = \overline{\overline{A} \cup B}$$

Remarque

Les exemples précédents sont des algèbres.

Proposition 1

Tout algèbre est un clan. La réciproque est fausse.

Il est évident qu'une algèbre est un clan.

Soit E un ensemble ayant une infinité d'éléments et considérons la famille $\mathfrak{C}$ définie par:

$$\mathfrak{C} = \{A \subset E : \text{card}\, A < \infty\}$$

Il est clair que $\mathfrak{C}$ est un clan, mais il n'est pas une algèbre car $E \notin \mathfrak{C}$.

Proposition 2

Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.

Soit $\mathcal{A}_F$ une algèbre sur F. L'ensemble

$$f^{-1}(\mathcal{A}_F) = \left\{ f^{-1}(B) : B \in \mathcal{A}_F \right\}$$

est une algèbre sur E.

Démonstration

Comme

$$f^{-1}(F) = E$$

alors $E \in f^{-1}(\mathcal{A}_F)$.

$$\complement_E f^{-1}(B) = f^{-1}\left(\complement_F B\right)$$

Attention

L'image directe d'un clan (resp. d'une algèbre) n'est pas un clan (resp. une algèbre).

En effet, il suffit de considérer une application constante d'une famille de parties d'un ensemble non vide

Proposition 3

L'intersection d'une famille quelconque d'algèbres est une algèbre, mais la réunion de deux algèbres n'est pas forcément une algèbre

Démonstration

Il est aisé de vérifier que l'intersection de deux algèbres vérifie les conditions d'une algèbre.

Par ailleurs, soit

$$E = \{1, 2, 3\}$$

et

$$\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, E, \{1\}, \{2, 3\}\}$$
$$\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, E, \{2\}, \{1, 3\}\}$$

Il est clair que $\mathcal{A}_1$et $\mathcal{A}_2$ sont des algèbres, mais

$$\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \{\emptyset, E, \{1\}, \{2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$$

n'est pas une algèbre car $\{1\} \in \mathcal{A}_1, \{2\} \in \mathcal{A}_2$, mais $\{1, 2\} \notin \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$, et par conséquent $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ n'est pas une algèbre.

1.3 Semi-anneau

Définition

On appelle semi-anneau booléen de parties de E toute famille $\mathcal{A}$ telle que

1) $A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$
2) $A, B \in \mathcal{A}$ Il existe une famille finie $(A_i)_{i=1,\ldots,n}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoins, tels que $A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

Exemple

$$\mathcal{A} = \{[a, b[\,, a, b \in \mathbb{R}\}\,;\ \emptyset = [a, a[$$

est un semi-anneau (il n'est pas un clan)

En effet :

Soit $A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A = [a_1, a_2[$ et $B = [b_1, b_2[$

$$A \cap B = [a_1, a_2[\cap [b_1, b_2[= \begin{cases} \emptyset \\ [\max(a_1, b_1), \min(a_2, b_2)[\end{cases}$$

1.4 σ-clan

On appelle σ-clan ou σ-anneau booléen de parties de E tout clan possédant en outre la propriété

$$A_n \in \mathcal{A},\ \ n = 1, 2, \ldots \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

Exemples

1) Tout clan fini est un σ-clan
2) $\mathcal{P}(E)$
3) $\{\emptyset, E\}$

Proposition

Tout σ-clan $\mathfrak{C}$ est stable pour l'intersection dénombrable

Autrement dit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ A_n \in \mathfrak{C}, \ \ \Longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{C}$$

Démonstration

Il suffit de remarquer que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 - \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 - A_n)$$

1.5 σ-algèbre - Tribu

Définition.

On appelle σ-algèbre de parties de E tout sous ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(E)$ vérifiant

$$\begin{aligned}
T_1 : & \quad E \in \mathcal{F} \\
T_2 : & \quad A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \diagdown B \in \mathcal{F} \\
T_3 : & \quad A_n \in \mathcal{F}, \ \ n = 1, 2, ... \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}
\end{aligned}$$

Remarque

1-L'image réciproque d'une σ-algèbre est une σ-algèbre.

2-Tout σ-algèbre de parties de E est une algèbre de parties de E. La réciproque est fausse.

Voici un contre exemple

Soit $E = \mathbb{R}$

$\forall -\infty \leq a < b < +\infty$, on pose

$$\mathcal{A} = \left\{ A : A = \bigcup_{i=1}^{m}]a_i, b_i] \ : m < +\infty \text{ et } \ ]a_i, b_i] \cap]a_j, b_j] = \emptyset, \forall i \neq j \right\}$$

Il est clair qu'avec la convention $]a, +\infty] =]a, +\infty[$, $\mathcal{A}$ est une algèbre, mais elle n'est pas une σ-algèbre.

En effet :

$$A_n = \left] 0, 1 - \frac{1}{n} \right] \in \mathcal{A}, \ \text{mais} \ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n =]0, 1[\notin \mathcal{A}$$

1.6 Algèbre engendrée par une famille

Etant donné un ensemble E et $\mathcal{C}$ une classe de sous ensemble de E. On appelle algèbre engendrée par $\mathcal{C}$, et on note $\alpha(\mathcal{C})$, la plus petite algèbre contenant $\mathcal{C}$.

1) $\mathcal{C} \subset \alpha(\mathcal{C})$
2) Pour tout algèbre $\mathcal{A}$ telle que $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, on a $\alpha(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$

Théorème.

Pour toute classe de sous-ensembles $\mathcal{C}$ de E, il existe une algèbre engendrée par $\mathcal{C}$.

Démonstration.

De prime abord, remarquons l'existence au moins d'une σ-algèbre qui contient $\mathcal{C}$. L'algèbre la plus fine , par exemple. D'après la proposition 3, l'intersection de toutes les algèbres qui contiennent $\mathcal{C}$ es une algèbre. Elle est l'algèbre recherchée.

1.7 La σ-algèbre borélienne

Soit $E = \mathbb{R}$ et $\mathcal{C} = \{A : A =]a, b]\}$

On appelle σ-algèbre borélienne sur $\mathbb{R}$, et on note $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$, la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{C}$.

Les éléments de $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ sont appelés boréliens.

Remarque 1.

Outre les intervalles de la forme $]a, b]$, la σ-algèbre borélienne contient les singletons et les intervalles de la forme

$$]a, b[\qquad [a, b] \qquad [a, b[\qquad]-\infty, b[\qquad]-\infty, b] \qquad]a, +\infty[$$

En effet:

$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}]a - \tfrac{1}{n}, a]$$

$$]a, b[= \bigcup_{n=1}^{\infty}]a, b - \tfrac{1}{n}]$$

$$[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}]a - \tfrac{1}{n}, b]$$

$$[a, b[= \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty}]a - \tfrac{1}{m}, b - \tfrac{1}{n}]$$

Remarque 2 :

Lorsque $E = \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{C} = \{A : A = \prod_{i=1}^{n}]a_i, b_i]\}$ la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{C}$ est appelée σ-algèbre borélienne sur $\mathbb{R}^n$, et est notée $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 3 :

Tous les ensembles que l'on sait décrire explicitement sont boréliens. Grâce à l'axiome du choix, on montre qu'il existe des ensembles non boréliens sans toutefois pouvoir en exhiber un explicitement.

1.8 Classe monotone

Définition.

On appelle classe monotone sur un ensemble non vide E une famille non vide $\mathfrak{M}$ de sous ensembles de E telle que :

M_1 : Pour toute suite croissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(A_n \subset A_{n+1})$ d'éléments de $\mathfrak{M}$, nous avons $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$

M_2 : Pour toute suite décroissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(A_n \supset A_{n+1})$ d'éléments de $\mathfrak{M}$, nous avons $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$

Exemples.

1) Si E est un ensemble infini dénombrable, alors $\mathcal{P}(E)$ est une classe monotone.

2) Tout σ-clan est une classe monotone puisqu'il contient toutes les σ-réunions et σ-intersections.

Proposition.

Pour qu'une algèbre $\mathcal{A}$ soit une σ-algèbre, il faut et il suffit qu'elle soit une classe monotone.

Démonstration.

Remarquons tout d'abord que toute σ-algèbre est une classe monotone, par conséquent si l'algèbre $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre, alors nécessairement elle est une classe monotone.

Montrons maintenant que la condition est suffisante. Supposons que l'algèbre $\mathcal{A}$ est une classe monotone. Montrons que si $A_n \in \mathcal{A}$, alors $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Soit $B_m = \bigcup\limits_{n=1}^{m} A_n$, alors $B_m \subset B_{m+1}$, $B_m \in \mathcal{A}$, car $\mathcal{A}$ est une algèbre, et par hypothèse, on a $\mathcal{A}$ est une classe monotone, alors

$$\lim_{m\to\infty} B_m = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

1.9 Classe monotone engendrée par un ensemble

Définition

Etant donné un ensemble E. On appelle classe monotone engendrée par $\mathcal{C}$, et on note $\mathfrak{M}(\mathcal{C})$, la plus petite classe monotone contenant $\mathcal{C}$.

$$\mathfrak{M}(\mathcal{C}) = \bigcap_j \mathfrak{M}_j \ , \qquad \mathcal{C} \subset \mathfrak{M}_j$$

Théorème.

La σ-algèbre engendrée par une algèbre $\mathcal{A}$ est identique à la classe monotone engendrée par $\mathcal{A}$.

Démonstration.

Notons $\sigma(\mathcal{A})$la σ-algèbre engendrée par l'algèbre $\mathcal{A}$ et $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$la classe monotone engendrée par l'algèbre $\mathcal{A}$.

$\sigma(\mathcal{A})$ est une σ-algèbre qui contient $\mathcal{A}$ donc elle est une classe monotone qui contient $\mathcal{A}$. Comme $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ est la plus petite classe monotone qui contient $\mathcal{A}$, alors

$$\mathfrak{M}(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{A})$$

Montrons que

$$\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathfrak{M}(\mathcal{A})$$

Comme $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$est une classe monotone, alors il suffit de montrer que $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ est une algèbre.

Montrons que $A \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \Longrightarrow \overline{A} \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$.

Soit

$$\widetilde{\mathfrak{M}} = \left\{ B : B \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}), \overline{B} \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \right\}$$

Il est clair que

$$\widetilde{\mathfrak{M}} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{A})$$

Par ailleurs $\widetilde{\mathfrak{M}}$ est une classe monotone qui contient $\mathcal{A}$ (démontrer le!), alors

$$\widetilde{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}(\mathcal{A})$$

d'où le résultat.

Espace mesurable

Définition.

On appelle espace mesurable tout couple $(E, \mathfrak{C})$ formé d'un ensemble E et d'un σ-clan sur cet ensemble ; on dira également que les éléments de $\mathfrak{C}$ sont mesurables.

Lorsque $\mathfrak{C}$ est une tribu, le couple $(E, \mathfrak{C})$ est souvent appelé espace probabilisable.

Exemple

$(E, \mathcal{P}(E))$ est un espace probabilisable quel que soit E.

2

Mesures positives

2.1 Fonction additive d'ensembles

Définition

On appelle fonction additive d'ensembles toute application μ définie sur un clan $\mathfrak{C}$ et à valeurs dans un ensemble F muni d'une loi additive et vérifiant la propriété suivante

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \quad , \qquad \text{si } A \cap B = \emptyset$$

2.1.1 Fonction σ-additive d'ensembles.

Définition.

On appelle fonction σ-additive d'ensembles toute application μ définie sur un σ-clan $\mathfrak{C}$ et à valeurs dans un ensemble F muni d'une loi additive et vérifiant la propriété suivante

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \quad , \qquad \text{si } A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$$

2.1.2 Mesures.

On appelle mesure sur un σ-clan $\mathfrak{C}$ toute fonction σ-additive d'ensembles à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$ ou $[-\infty, +\infty[$

Remarque.

La valeur $-\infty$ ou $+\infty$ est exclue des valeurs possibles d'une mesure pour éviter la présence du cas $\infty - \infty$.

Appellation

Une mesure μ est dite:

Positive si μ est à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Positive finie si μ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Réelle si μ est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Complexe si μ est à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Réelle généralisée si μ est à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ et prend au plus l'une des deux valeurs $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemples

1) Mesure de dénombrement.

$$\begin{aligned} \mu : \ \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \quad \mathbb{Z} \\ A \longmapsto \mu(A) &= \begin{cases} \operatorname{card} A & \text{si } \operatorname{card} A < +\infty \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

2) Mesure de Dirac

$$\begin{aligned} \delta_a : \ \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \quad \{0,1\} \\ A \longmapsto \delta_a(A) &= \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

3) Mesure contractée

Soit $\mu : \mathfrak{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une mesure positive sur un clan $\mathfrak{C}$.

Définition

Une mesure μ est dite bornée ou finie si $\mu(E) < +\infty$. Il revient à dire au même que l'image de l'application μ est un ensemble borné de $\mathbb{R}$.

Si $\mu(E) = 1$, on dira que μ est une probabilité.

Une mesure μ est dite σ-finie si, et seulement s'il existe une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles mesurables tels que $E = \bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n$ et $\mu(E_n) < +\infty$ pour tout n.

Autrement dit

$$\forall A \in \mathcal{C}; \exists \left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C} : A \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \text{ et } \mu\left(A_n\right) < +\infty \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Les mesures bornées sont σ-finies

La mesure de Lebesgue est σ-finie

La mesure de Radon est σ-finie

La mesure de comptage (dénombrement) est σ-finie.

Propriétés de la mesure positive.

Propriété 1 :

S'il existe $A \in \mathfrak{C}$ tel que $\mu\left(A\right) < +\infty$, alors $\mu\left(\emptyset\right) = 0$.

Comme $A \cap \emptyset = \emptyset$, alors

$$\mu\left(A\right) = \mu\left(A \cup \emptyset\right) = \mu\left(A\right) + \mu\left(\emptyset\right)$$

$\mu\left(A\right)$ étant finie, par conséquent

$$\mu\left(\emptyset\right) = 0$$

Propriété 2 :

Si $A \subset B$, alors $\mu(A) \leq \ \mu(B)$.

En effet, puisque $A \subset B$, alors $B = A \cup (B \cap \overline{A})$. Les ensembles A et $B \cap \overline{A}$ étant disjoints, alors

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \cap \overline{A}) \tag{2.1.1}$$

et comme μ est à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, alors $\mu(B \cap \overline{A}) \geq 0$, il vient $P(A) \leq \ P(B)$.

Propriété 3 :

Si $A \subset B$ et $\mu(A) < +\infty$, alors

$$\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$$

Le résultat découle immédiatement de la relation (2.1.1) et de l'hypothèse $\mu(A) < +\infty$.

Propriété 4 : Egalité de Poincaré.

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$$

En effet, on a:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \diagdown A)$$

En ajoutant $\mu(A \cap B)$ aux deux membres de l'équation précédente, on aura

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B \diagdown A) + \mu(A \cap B)$$

Et comme B est réunion de deux ensembles disjoints $B \diagdown A$ et $A \cap B$, alors

$$\mu(B \diagdown A) + \mu(A \cap B) = \mu(B)$$

Par conséquent,

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$$

Propriété 5 : Inégalité de Boole.

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

Définissons, tout d'abord, à partir de la suite $(A_i)_i$ une suite $(B_i)_i$ dont les élément sont deux à deux disjoints.

Soit

$B_1 = A_1$, $B_2 = \overline{A}_1 \cap A_2$, ..., $B_n = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap ... \cap \overline{A}_{n-1} \cap A_n$

On remarque que:

$$\begin{array}{ll} 1) & B_i \cap B_j = \emptyset, \ \ \forall i \neq j \\ 2) & B_i \subset A_i, \ \ \forall i = 1, ..., n \\ 3) & \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i \end{array}$$

L'application de la définition de la mesure et la propriété 2 donnent le résultat.

Remarque :

L'inégalité de Boole devient une égalité si les ensembles A_i sont deux à deux disjoints.

Espace mesuré

On appelle espace mesuré le triplet $(E, \mathfrak{C}, \mu)$ formé d'un ensemble E, d'un σ-clan sur cet ensemble et d'une mesure sur $(E, \mathfrak{C})$.

Construction d'une mesure positive par prolongement.

Dans ce paragraphe, nous répondrons à la question suivante: Etant donné une mesure positive μ sur un clan $\mathfrak{C}$, peut-on prolonger cette mesure au σ-clan engendré par $\mathfrak{C}$?

Mesure extérieure.

Soit E un ensemble non vide. On appelle mesure extérieure sur E toute application τ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ possédant les propriétés suivantes

1) $\tau(\emptyset) = 0$
2) si A et $B \in \mathcal{P}(E)$, $A \subset B \Longrightarrow \tau(A) \leq \tau(B)$
3) pour toute famille dénombrable $A_1, A_2, ...$ de partie de E, $\tau\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \tau(A_i)$

Remarque

On remarque qu'une mesure extérieure additive est une mesure positive.

En effet :

On a d'une part

$$\tau\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \tau(A_i)$$

D'autre part, d'après la $2^{ème}$ hypothèse de la mesure extérieure, nous avons

$$\tau\left(\bigcup_{i=0}^{p} A_i\right) \leq \tau\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right)$$

Comme τ est additive, alors

$$\sum_{i=1}^{p} \tau(A_i) \leq \tau\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right)$$

Par conséquent

$$\sum_{i=1}^{\infty} \tau(A_i) \leq \tau\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right)$$

D'où le résultat.

Proposition (P)

Soit $\mathfrak{C}$ un clan sur un ensemble non vide E et μ une mesure positive sur $\mathfrak{C}$, pour toute partie A de E, posons

$$\mu^*(A) = \inf_{B_i} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \mu(B_i) \right)$$

la borne inférieure étant prise sur toutes les suites $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathfrak{C}$ telles que $A \subset \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} B_i$. Si A n'est contenu dans aucune réunion dénombrable d'éléments de $\mathfrak{C}$, nous posons $\mu^*(A) = +\infty$. Alors μ^* est une mesure extérieure dont la restriction à $\mathfrak{C}$ est égale à μ. Cette mesure est appelé mesure extérieure engendrée par μ ou bien mesure extérieure associée à μ.

Démonstration.

Montrons tout d'abord que la restriction de μ^* sur $\mathfrak{C}$ est égale à μ.

Soit $A \in \mathfrak{C}$. Nous avons

$$A = \bigcup_{i=0}^{+\infty} B_i; \quad \text{avec} \quad B_0 = A; \qquad B_i = \emptyset \quad \forall i \geq 1$$

donc

$$\mu^*(A) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \mu(B_i) = \mu(A)$$

conclusion

$$\mu^*(A) \leq \mu(A)$$

Soit

$$\begin{aligned}
&A_1 = B_1 \\
&A_2 = B_2 \diagdown B_1 \\
&A_3 = B_3 \diagdown (B_1 \cup B_2) \\
&.... \\
&A_n = B_n \diagdown \bigcup_{j=1}^{n-1} B_j
\end{aligned}$$

Conséquences

$$\begin{aligned}
&1) \quad \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i \\
&2) \quad A_i \cap A_j = \emptyset \qquad \forall i \neq j \\
&3) \quad A_i \subset B_i \quad \forall i
\end{aligned}$$

D'après la conséquence 1), nous avons

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i \Longrightarrow A \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$$

Et comme μ est une mesure, alors en tenant compte de la conséquence 3), nous avons

$$\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(B_i)$$

En prenant la borne inférieure du second membre, on obtient

$$\mu(A) \leq \mu^*(A)$$

et par conséquent

$$\mu^*(A) = \mu(A)$$

En particulier, comme $\emptyset \in \mathfrak{C}$, on a

$$\mu^*(\emptyset) = \mu(\emptyset)$$

Montrons maintenant que si A et $B \in \mathcal{P}(E)$

$$A \subset B \Longrightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$$

D'après la définition caractéristique de la borne inférieure

$$\forall \varepsilon > 0, \exists (B_i)_{i=1}^{+\infty} \in \mathfrak{C}, \qquad B \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \mu(B_i) \leq \mu^*(B) + \varepsilon$$

Mais

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i \Longrightarrow \mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(B_i)$$

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \varepsilon \qquad \forall \varepsilon$$

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$$

Soit $A_1, A_2, ...$ une famille dénombrable de partie de E

Pour chaque A_j, il existe un recouvrement dénombrable $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} B_{j,k}$, avec

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mu\left(B_{j,k}\right) \leq \mu^*\left(A_j\right)+\frac{\varepsilon}{2^j}; \qquad \forall \varepsilon>0$$

or

$$\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j \subset \bigcup_j \bigcup_k B_{j,k}$$

donc

$$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j\right) \leq \sum_j \sum_k \mu\left(B_{j,k}\right) \leq \sum_j^{+\infty}\left(\mu^*\left(A_j\right)+\frac{\varepsilon}{2^j}\right)$$

Donc $\forall \varepsilon>0$

$$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j\right) \leq \sum_j^{+\infty} \mu^*\left(A_j\right)+\varepsilon$$

$$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j\right) \leq \sum_j^{+\infty} \mu^*\left(A_j\right)$$

conséquence : μ^* est une mesure extérieure.

Théorème de Carathéodory

Soit μ^* une mesure extérieure sur un ensemble non vide E. La famille $\mathfrak{B}$ de partie A de E vérifiant:

$$\forall X \in \mathcal{P}(E), \; \mu^*(X)=\mu^*(X \cap A)+\mu^*\left(X \cap \overline{A}\right)$$

est une tribu, appelée tribu des parties μ^*-mesurables. La restriction $\widehat{\mu}$ de μ^* à $\mathfrak{B}$ est une mesure positive, dite mesure induite par la mesure extérieure μ^*.

Démonstration.

$$\emptyset \in \mathfrak{B}, E \in \mathfrak{B}$$

$$\begin{aligned}
\forall X & \in \mathcal{P}(E), \mu^*(X)=\mu^*(X \cap \emptyset)+\mu^*(X \cap E) \\
& = \mu^*(\emptyset)+\mu^*(X) \\
& = \mu^*(X)
\end{aligned}$$

et par symétrie de la définition, on obtient $E \in \mathfrak{B}$.

$$A \in \mathfrak{B} \Longrightarrow \overline{A} \in \mathfrak{B}$$

résulte de la symétrie de la définition.

$$A, B \in \mathfrak{B} \Longrightarrow A \cup B \in \mathfrak{B}$$

En effet :

$\forall X \in \mathcal{P}(E)$

$$\mu^*(X) = \mu^*(X \cap A) + \mu^*\left(X \cap \overline{A}\right)$$

$$\mu^*(X) = \mu^*(X \cap B) + \mu^*\left(X \cap \overline{B}\right) \tag{2.1.2}$$

Remplaçons X par $X \cap A$ dans (2.1.2) on obtient

$$\mu^*(X \cap A) = \mu^*(X \cap A \cap B) + \mu^*\left(X \cap A \cap \overline{B}\right)$$

De la même façon, lorsque on remplace X par $X \cap \overline{A}$ dans (2.1.2), on obtient

$$\mu^*\left(X \cap \overline{A}\right) = \mu^*\left(X \cap \overline{A} \cap B\right) + \mu^*\left(X \cap \overline{A} \cap \overline{B}\right)$$

Donc

$$\begin{aligned} \mu^*(X) &= \mu^*(X \cap A \cap B) + \mu^*\left(X \cap A \cap \overline{B}\right) + \\ &\quad + \mu^*\left(X \cap \overline{A} \cap B\right) + \mu^*\left(X \cap \overline{A} \cap \overline{B}\right) \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Remplaçons maintenant X par $X \cap (A \cup B)$ dans la dernière expression

$$\begin{aligned} \mu^*(X \cap (A \cup B)) &= \mu^*(X \cap (A \cup B) \cap A \cap B) + \mu^*\left(X \cap (A \cup B) \cap A \cap \overline{B}\right) + \\ &\quad \mu^*\left(X \cap (A \cup B) \cap \overline{A} \cap B\right) + \underbrace{\mu^*\left(X \cap (A \cup B) \cap \overline{A} \cap \overline{B}\right)}_{=0} \end{aligned}$$

alors

$$\mu^*(X \cap (A \cup B)) = \mu^*(X \cap A \cap B) + \mu^*\left(X \cap \overline{A} \cap B\right) + \mu^*\left(X \cap A \cap \overline{B}\right)$$

donc d'après (2.1.3)

$$\mu^*(X) = \mu^*(X \cap (A \cup B)) + \mu^*\left(X \cap \left(\overline{A \cup B}\right)\right)$$

Par conséquent

$$A \cup B \in \mathfrak{B}$$

Remarquons que si A et B sont disjoints alors

$$\mu^* (X \cap (A \cup B)) = \mu^* (X \cap A) + \mu^* (X \cap B) \tag{2.1.4}$$

Car

$$\overline{A} \cap B = B \quad \text{et} \quad A \cap \overline{B} = A$$

L'égalité (**??**) s'étend par récurrence à toute famille finie $(A_i)_{i=0,1,..n}$ d'éléments de $\mathfrak{B}$ deux à deux disjoints.

Supposons maintenant que $(A_i)_{i=0,1,..n}$ soit une famille dénombrable d'éléments de $\mathfrak{B}$ deux à deux disjoints

$$\mu^* \left(X \cap \left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i \right) \right) = \sum_{i=0}^{n} \mu^* (X \cap A_i) .$$

$$\begin{aligned} \mu^* (X) &= \mu^* \left(X \cap \left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i \right) \right) + \mu^* \left(X \cap \overline{\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i \right)} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \mu^* (X \cap A_i) + \mu^* \left(X \cap \overline{\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i \right)} \right) \end{aligned}$$

Puisque

$$\bigcup_{i=0}^{n} A_i \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \Longrightarrow \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i} \subset \overline{\bigcup_{i=0}^{n} A_i}$$

alors

$$X \cap \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i} \subset X \cap \overline{\bigcup_{i=0}^{n} A_i}$$

par conséquent

$$\mu^* \left(X \cap \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i} \right) \leq \mu^* \left(X \cap \overline{\bigcup_{i=0}^{n} A_i} \right)$$

donc

$$\mu^* (X) \geq \sum_{i=0}^{n} \mu^* (X \cap A_i) + \mu^* \left(X \cap \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i} \right)$$

en faisant tendre n vers l'infini on aura

$$\mu^* (X) \geq \sum_{i=0}^{\infty} \mu^* (X \cap A_i) + \mu^* \left(X \cap \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i} \right) \tag{2.1.5}$$

Comme μ^* est une mesure extérieure, alors

$$\mu^*\left(X \cap \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) = \mu^*\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} (X \cap A_i)\right) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*\left(X \cap A_i\right) \tag{2.1.6}$$

Donc de (2.1.5), en ajoutant à (**??**) $\mu^*\left(X \cap \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i}\right)$, on obtient

$$\mu^*\left(X\right) \geq \mu^*\left(X \cap \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) + \mu^*\left(X \cap \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i}\right)$$

Pour tout $X \in \mathcal{P}\left(E\right)$, on a

$$\begin{aligned} X &= X \cap \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \cup \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i}\right) \\ &= \left(X \cap \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) \cup \left(X \cap \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i}\right) \end{aligned}$$

Donc, d'après la définition de la mesure extérieure, on a

$$\mu^*\left(X\right) \leq \mu^*\left(X \cap \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) + \mu^*\left(X \cap \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i}\right)$$

En fin

$$\mu^*\left(X\right) = \mu^*\left(X \cap \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) + \mu^*\left(X \cap \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i}\right)$$

Donc

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \in \mathfrak{B}$$

Soit $\left(B_i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'éléments de $\mathfrak{B}$.

En posant

$$A_0 = B_0; A_i = B_i \diagdown \bigcup_{j=0}^{i-1} A_j$$

$\mathfrak{B}$ est une algèbre, les A_j constituent une famille dénombrable d'éléments deux à deux disjoints de $\mathfrak{B}$, donc

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \in \mathfrak{B}$$

Donc $\mathfrak{B}$ est bien une tribu.

La restriction de μ^* à $\mathfrak{B}$ est une mesure positive

En effet : μ^* est une mesure extérieure, donc

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*\left(A_i\right)$$

D'autre part, $\forall X \in (E)$,on a pour les A_i disjoints

$$\mu^* (X) \geq \sum_{i=0}^{\infty} \mu^* (X \cap A_i) + \mu^* \left(X \cap \overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i} \right)$$

Prenons $X = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} A_i$, on trouve

$$\mu^* \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \right) \geq \sum_{i=0}^{\infty} \mu^* (A_i)$$

Donc

$$\mu^* \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^* (A_i)$$

Finalement, μ^* est une mesure positive sur $\mathfrak{B}$.

Théorème de Hahn

Toute mesure positive μ sur un clan $\mathfrak{C}$ peut être prolongée au σ-clan engendrée par $\mathfrak{C}$. Si μ est une mesure σ-finie le prolongement est unique et est également σ-fini.

Démonstration.

On sait, d'après la proposition (P), que toute mesure positive μ peut être prolonger par une mesure extérieure μ^* sur $\mathcal{P}(E)$, par la suite, le théorème de CARATHEODORY appliqué à μ^* donne que les sous ensembles μ^*-mesurables forment une tribu $\mathfrak{B}$ sur laquelle μ^* est une mesure

Il suffit donc de montrer que $\mathfrak{B}$ contient $\mathfrak{C}$.

Soit $A \in \mathfrak{C}$ et $B \in \mathcal{P}(E)$.

1^{ier} cas.

$$\exists (A_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \;, A_n \in \mathfrak{C}$$

telle que

$$B \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \quad \text{avec} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(B) + \varepsilon$$

Alors

$$(A \cap A_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \quad \text{recouvre } A \cap B$$
$$\left(\overline{A} \cap A_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \quad \text{recouvre } \overline{A} \cap B$$

Donc

$$\mu(B) = \mu^*\left((A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right)$$

$$\begin{aligned}\mu^*(B) &\leq \mu^*(A \cap B) + \mu^*\left(\overline{A} \cap B\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap A_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*\left(\overline{A} \cap A_n\right)\end{aligned}$$

et comme μ et μ^* coïncident sur $\mathfrak{C}$, alors

$$\mu^*(B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap A_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\overline{A} \cap A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(A \cap B) + \mu^*\left(\overline{A} \cap B\right) \leq \mu^*(B) + \varepsilon$$

par conséquent

$$\mu^*(B) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*\left(\overline{A} \cap B\right)$$

et donc $A \in \mathfrak{B}$

$2^{ème}$ cas

Si $\mu^*(B) = +\infty$, alors l'un au moins des nombres $\mu^*(A \cap B)$ et $\mu^*\left(\overline{A} \cap B\right)$ est infini.

Si μ est σ-finie le prolongement est aussi σ-fini.

En effet :

$$A \in \sigma(\mathfrak{C}) \Longrightarrow A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,\ A_n \in \mathfrak{C}$$

μ est σ-finie, alors il existe $(A_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}, A_{n,m} \in \mathfrak{C}$ telle que $\mu(A_{n,m}) < +\infty$ et $A_n \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{n,m}$, donc

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{n,m} \quad \text{et} \quad \mu(A_{n,m}) < +\infty$$

si $\widetilde{\mu}$ est un prolongement de μ, on a

$$\forall A \in \sigma(\mathfrak{C}) ; \exists (B_p)_{p\in\mathbb{N}}, B_p \in \mathfrak{C} \text{ telle que } A \subset \bigcup_{p=1}^{\infty} B_p, \widetilde{\mu}(B_p) < \infty$$

Unicité du prolongement lorsque μ est σ-finie.

Corollaire

Soit $\mathfrak{C}$ un clan sur un ensemble non vide E et μ une mesure positive bornée sur $\mathfrak{C}$. Alors μ se prolonge de façon unique en une mesure $\widetilde{\mu}$ bornée sur $\sigma(\mathfrak{C})$ et l'on a

$$\sup_{B\in\sigma(\mathsf{C})} \widetilde{\mu}(B) = \sup_{A\in\mathsf{C}} \mu(A)$$

Démonstration

On a toujours

$$\sup_{B\in\sigma(\mathsf{C})} \widetilde{\mu}\left(B\right) \geq \sup_{A\in\mathsf{C}}\mu\left(A\right)$$

En effet :

$$\sup_{B\in\sigma(\mathsf{C})} \widetilde{\mu}\left(B\right) \geq \sup_{B\in\mathsf{C}}\widetilde{\mu}\left(B\right) = \sup_{A\in\mathsf{C}}\mu\left(A\right)$$

Par ailleurs

$$B \in \sigma\left(\mathfrak{C}\right) \Longrightarrow B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

où $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathfrak{C}$. Donc

$$\widetilde{\mu}\left(B\right) \leq \widetilde{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sup_{n}\mu\left(A_n\right) \leq \sup_{A\in\mathsf{C}}\mu\left(A\right)$$

2.1.3 Mesures complètes

Ensembles négligeables

Définition.

Etant donné un clan $\mathfrak{C}$ sur un ensemble non vide E et μ une mesure positive définie sur $\mathfrak{C}$. Une partie A de E est dite μ-négligeable s'il existe $B \in \mathfrak{C}$ tel que $A \subset B$ et $\mu\left(B\right) = 0$.

Proposition

Toute partie d'un ensemble négligeable est négligeable.

La réunion d'une famille dénombrable de parties négligeables est négligeable.

Démonstration

Soit A une partie négligeable, alors

$$\exists B \in \mathfrak{C} : A \subset B \text{ et } \mu\left(B\right) = 0$$

Si $C \subset A$, alors $C \subset B$ et $\mu\left(B\right) = 0$. Par conséquent C est μ-négligeable.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable de parties négligeables.

$$A_n \subset B_n \text{ avec } \mu\left(B_n\right) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \text{ et } 0 \leq \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu\left(B_n\right) = 0$$

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right) = 0$$

$\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ est μ-négligeable.

Propriété vraie μ-presque partout

Soit P une propriété qu'un point x peut posséder ou non.

Cette propriété est dite vraie presque partout si l'ensemble des points où elle est en défaut est négligeable. On abrégera souvent en *p.p* ou μ-*p.p* s'il on veut préciser la mesure.

Mesure complète

Une mesure positive sur un σ-clan $\mathfrak{S}$ est dite complète lorsque toute partie μ-négligeable A de E est un élément de $\mathfrak{S}$.

$$\mu \text{ est complète } \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(E)\,; \mu\text{-négligeable, } A \in \mathfrak{S}$$

Remarque

Les mesures positives utilisées dans la théorie de l'intégration ne sont pas nécessairement complète.

Théorème

Soit μ une mesure positive sur un σ-clan $\mathfrak{S}$

$$\widehat{\mathfrak{S}} = \{A \triangle N, A \in \mathfrak{S} \text{ et } N \ \mu\text{-négligeable}\}$$

Alors

1) $\widehat{\mathfrak{S}}$ est un σ-clan.

2) $\begin{array}{rl} \widehat{\mu}: & \widehat{\mathfrak{S}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \\ & A \triangle N \mapsto \widehat{\mu}(A \triangle N) = \mu(A) \end{array}$ est une mesure positive complète définie sur $\widehat{\mathfrak{S}}$.

3) $\left(\widehat{\mu}, \widehat{\mathfrak{S}}\right)$ est le plus petit prolongement complet de $(\mu, \mathfrak{S})$.

Démonstration

$\widehat{\mathfrak{S}}$ est stable pour la différence symétrique et l'intersection donc $\widehat{\mathfrak{S}}$ est un clan. Car

$$A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$$

et

$$A \diagdown B = A \triangle (A \cap B)$$

D'une part, on a

$$\begin{aligned} (A \triangle B) &= (A_1 \triangle N_1) \triangle (B_1 \triangle N_2) \\ &= A_1 \triangle B_1 \triangle N \quad \text{où } N = N_1 \triangle N_2 \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} (A \cap B) &= (A_1 \triangle N_1) \cap (B_1 \triangle N_2) \\ &= (A_1 \cap B_1) \triangle N \quad \text{où } N = (N_1 \cap B_1) \triangle (N_2 \cap A_1) \triangle (N_1 \triangle N_2) \end{aligned}$$

Montrons que $\widehat{\mathfrak{S}}$ est un σ-clan.

Soit

$$\mathfrak{S}' = \{A \cup N,\ A \in \mathfrak{S} \text{ et } N\ \mu\text{-négligeable}\}$$

Alors

$$\widehat{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}'$$

$\mathfrak{S}' \subset \widehat{\mathfrak{S}}$. Soit $B \in \mathfrak{S}'$, alors $B = A \cup N, A \in \mathfrak{S}$ et N μ-négligeable

$$A \cup N = A \triangle \left(N \cap \overline{A}\right) = A \triangle \widetilde{N}, \widetilde{N} = N \cap A, \mu\text{-négligeable}, \ \widetilde{N} \subset N$$

$\widehat{\mathfrak{S}} \subset \mathfrak{S}'$

Soit $B \in \widehat{\mathfrak{S}}$, alors $B = A \triangle N, A \in \mathfrak{S}$ et N μ-négligeable

$$A \triangle N = (A - A_1) \cup (A \cap A_1) \triangle N = C \cup N_1$$

où

$$\begin{aligned} C &= A - A_1 \in \mathfrak{S} \\ N_1 &= (A \cap A_1) \triangle N \subset A_1 \triangle N \subset A_1 \end{aligned}$$

A_1 est tel que $N \subset A_1$ et $\mu(A_1) = 0$.

$\mathfrak{S}'$ est un σ-clan.

Soit $A_k \in \widehat{\mathfrak{S}}$, $k \in \mathbb{N} \Longrightarrow A_k = B_k \cup N_k$

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k = \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k\right) \cup \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} N_k\right)$$

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k \in \mathfrak{S} \quad \text{et} \quad \bigcup_{k=0}^{\infty} N_k \text{ est } \mu\text{-négligeable}$$

Donc

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathfrak{S}'$$

$\widehat{\mu}$ est σ-additive.

Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments deux à deux disjoints d'éléments de $\widehat{\mathfrak{S}}$. alors $A_k = B_k \cup N_k$

$$\widehat{\mu}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(B_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\mu}(A_k)$$

Puisque les B_k sont également deux à deux disjoints.

$\widehat{\mu}$ est complète.

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ $\widehat{\mu}$-négligeable, alors il existe $B \in \widehat{\mathfrak{S}}$ tel que $A \subset B$ et $\widehat{\mu}(B) = 0$

$B \in \widehat{\mathfrak{S}} \Longrightarrow B = B_1 \cup N, B_1 \in \mathfrak{S}$ et N μ-négligeable

$$\widehat{\mu}(B) = 0 \Longrightarrow \widehat{\mu}(B_1 \cup N) = 0 \Longrightarrow \mu(B_1) = 0$$

Donc B_1 est μ-négligeable.

$$A \subset B \Longrightarrow A \subset B_1 \cup N \Longrightarrow A \text{ est } \mu\text{-négligeable}$$

D'autre part

$$A = \emptyset \cup A$$

et comme

$$\emptyset \in \mathfrak{S} \quad \text{et} \quad A \text{ est } \mu\text{-négligeable}$$

alors

$$A \in \widehat{\mathfrak{S}}$$

Par conséquent $\widehat{\mu}$ est complète.

$\widehat{\mu}$ est le plus petit prolongement complet

$$\widehat{\mu}(A) = \widehat{\mu}(A \cup \emptyset) = \mu(A), \forall A \in \mathfrak{S}$$

Soit $\widehat{\mu}_1$ un prolongement complet de μ sur $\widehat{\mathfrak{S}}_1$ contenant $\mathfrak{S}$

$\widehat{\mathfrak{S}}_1$ contient nécessairement $\widehat{\mathfrak{S}}$. En effet :

Soit $A \in \widehat{\mathfrak{S}}$, alors $A = B \cup N$ avec $B \in \mathfrak{S}$ et N-μ-négligeable. Puisque $\widehat{\mathfrak{S}}_1$ est le σ-clan complété de $\mathfrak{S}$, il contient forcément N, par conséquent $B \cup N \in \widehat{\mathfrak{S}}_1$.

De plus pour $A \in \mathfrak{S}$, nous avons

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_1 (A) &= \widehat{\mu}_1 (B \cup N) \geq \widehat{\mu}_1 (B) = \mu (B) = \widehat{\mu}_1 (B \cup N) = \widehat{\mu} (A) \\ &\Rightarrow \widehat{\mu}_1 (A) \geq \widehat{\mu} (A) \end{aligned}$$

Lemme

Si μ est une mesure positive sur un σ-clan $\wp$ (tribu $\mathfrak{B}$), tout élément A du σ-clan complété $\widehat{\wp}$ (tribu complétée $\widehat{\mathfrak{B}}$) est μ^*-mesurable et l'on a

$$\mu^* (A) = \widehat{\mu} (A)$$

Démonstration

Soit $A \in \widehat{\wp} \Longrightarrow A = B \cup N$, avec $B \in \wp$ et N μ-négligeable, c'est à dire

$$\exists B_1 \in \wp \text{ tel que } N \subset B_1 \text{ et } \mu (B_1) = 0$$

Sans nuire à la généralité, on peut supposer que B et N sont disjoints

Montrons que N est μ^*-mesurable, c'est à dire

$$\forall X \in \mathcal{P} (E) \ , \ \mu^* (X) = \mu^* (X \cap N) + \mu^* \left(X \cap \overline{N}\right)$$

Remarquons, tout d'abord, que $\mu^* (X \cap N) = 0$

En effet

$$\mu^* (X \cap N) \leq \mu^* (N) \leq \mu^* (B_1) = \mu (B_1) = 0$$

Par ailleurs

$$\mu^* \left(X \cap \overline{N}\right) \leq \mu^* (X)$$

et comme

$$\begin{aligned} X &= X \cap \left(\overline{N} \cup N\right) \\ &= (X \cap N) \cup \left(X \cap \overline{N}\right) \end{aligned}$$

donc

$$\mu^* (X) \leq \mu^* (X \cap N) + \mu^* \left(X \cap \overline{N}\right) \leq \mu^* (X)$$

d'où l'égalité.

Comme B est μ^*-mesurable, alors $A = B \cup N$ l'est aussi.

Comme N est μ^*-mesurable et $A = B \cup N$, alors

$$\mu^*(A) = \mu^*((B \cup N) \cap N) + \mu^*\left((B \cup N) \cap \overline{N}\right)$$

Par ailleurs

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap N) + \mu^*\left(B \cap \overline{N}\right) = \mu^*\left(B \cap \overline{N}\right)$$

alors

$$\mu^*(A) = \mu^*(B) + \mu^*(N) = \mu^*(B) = \mu(B) = \widehat{\mu}(A)$$

c'est à dire

$$\mu^*(A) = \widehat{\mu}(A)$$

Théorème

Soit μ une mesure positive σ-finie sur une tribu $\mathfrak{B}$. Si on note $\widehat{\mathfrak{B}}$ la tribu complétée de $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B}^*$ la tribu des μ^*-mesurables, alors $\mathfrak{B}^* = \widehat{\mathfrak{B}}$.

Démonstration

D'après le lemme précédent $\widehat{\mathfrak{B}} \subset \mathfrak{B}^*$, il reste donc à démontrer que $\mathfrak{B}^* \subset \widehat{\mathfrak{B}}$.

2.1.4 Mesure de Lebesgue

Mesure de Lebesgue sur la droite réelle.

Proposition 1.

La famille des intervalles de $\mathbb{R}$ de la forme $[a, b[\,, a, b \in \mathbb{R}$ et $[a, b[\; = \emptyset$,si $b \leq a$ est un semi-anneau booléen de parties de $\mathbb{R}$.

Démonstration

Soit

$$\mathcal{A} = \{[a, b[\text{ tel que } a, b \in \mathbb{R}\}$$

Il est clair que pour $[a, b[\; = \emptyset$,si $b \leq a, \mathcal{A}$ est un semi anneau

$$\begin{aligned} \forall A, B &\in \mathcal{A}, \text{ on a } A \cap B \in \mathcal{A} \\ \text{et } A \diagdown B &= \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \text{ avec } A_i \in \mathcal{A} \text{ et } A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j \end{aligned}$$

Proposition 2.

La fonction λ, définie sur le semi-anneau $\mathcal{A}$ des intervalles de la forme $[a, b[\,, a, b \in \mathbb{R}$ et $[a, b[= \emptyset$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ par :

$$\lambda\left([a, b[\right) = \begin{cases} b - a & \text{si } a < b \\ \\ 0 & \text{si } b \leq a \end{cases}$$

est σ-additive.

Démonstration

Démontrons, tout d'abord, que λ est additive. Pour bien comprendre la démonstration, nous allons commencer par deux éléments.

Soient A et B deux éléments disjoints de $\mathcal{A}$, alors

$$A = [a, b[\text{ et } B = [c, d[$$

et pour que $A \cup B$ soit un élément de $\mathcal{A}$, il faut que $b = c$, et par conséquent

$$\lambda\left([a, b[\cup [c, d[\right) = \lambda\left([a, d[\right) = d - a = d - c + c - a$$

et comme $b = c$, alors

$$\lambda\left([a, b[\cup [c, d[\right) = d - c + b - a = \lambda\left([a, b[\right) + \lambda\left([c, d[\right)$$

Soit, maintenant, $[a_i, b_i[\,, 1 \leq i \leq n$, une famille finie d'éléments non vide, deux à deux disjoints, de $\mathcal{A}$ dont la réunion est un élément de $\mathcal{A}$.

Il existe nécessairement une permutation p de $\{1, 2, ..., n\}$ telle que

$$a_{p(1)} < b_{p(1)} = a_{p(2)} < ... < b_{p(i)} = a_{p(i+1)} < ... < b_{p(n)}$$

nous avons

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} [a_i, b_i[= [a, b[\subset \mathcal{A}$$

Nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\bigcup_{i=0}^{n} [a_i, b_i[\subset \bigcup_{i=0}^{\infty} [a_i, b_i[$$

ce qui donne, en vertu de l'additivité de λ et le passage à la limité

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda\left([a_i, b_i[\right) \leq \lambda\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} [a_i, b_i[\right)$$

Montrons, maintenant, l'inégalité contraire.

Considérons $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ tel que $a < \varepsilon < b - a$ et posons pour tout $i \in \mathbb{N}$

$$c_i = a_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+2}}$$

Nous avons $\forall i \in \mathbb{N}$

$$[a_i, b_i[\subset]c_i, b_i[\subset [c_i, b_i[$$

donc

$$\left[a, b - \frac{\varepsilon}{2}\right] \subset [a, b[= \bigcup_{i=0}^{\infty} [a_i, b_i[\subset \bigcup_{i=0}^{\infty}]c_i, b_i[$$

Puisque $\left[a, b - \frac{\varepsilon}{2}\right]$ est compact ; les intervalles $]c_i, b_i[$ étant ouverts, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left[a, b - \frac{\varepsilon}{2}\right[\subset \left[a, b - \frac{\varepsilon}{2}\right] \subset \bigcup_{i=0}^{n}]c_i, b_i[\subset \bigcup_{i=0}^{n} [c_i, b_i[$$

D'après les propriétés de la mesure et comme $\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} = \frac{1}{2}\right)$

$$\begin{aligned} b - \frac{\varepsilon}{2} - a &= \lambda\left(\left[a, b - \frac{\varepsilon}{2}\right[\right) \leq \lambda\left(\bigcup_{i=0}^{n} [c_i, b_i[\right) \\ &\leq \sum_{i=0}^{n} \lambda\left([c_i, b_i[\right) = \sum_{i=0}^{n} (b_i - c_i) \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} (b_i - c_i) = \sum_{i=0}^{\infty} (b_i - a_i) + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Donc

$$b - a = \lambda\left([a, b[\right) \leq \sum_{i=0}^{\infty} (b_i - a_i) + \frac{\varepsilon}{2} = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda\left([a_i, b_i[\right) + \frac{\varepsilon}{2}$$

ε étant arbitraire, alors

$$\lambda\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} [a_i, b_i[\right) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \lambda\left([a_i, b_i[\right)$$

Compte tenu de la première inégalité, λ est σ-additive.

Proposition 3.

Il existe sur la tribu de Borel de $\mathbb{R}$ une mesure positive λ unique, appelée mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}$, telle que pour tout intervalle de la forme $[a, b[\,, (a, b \in \mathbb{R}$ et $[a, b[\, = \emptyset)$

$$\lambda\left([a, b[\right) = b - a$$

Cette mesure est σ-finie.

Démonstration.

Il suffit de prolonger à la tribu de Borel de $\mathbb{R}$, qui est l'anneau engendré par $\mathcal{A}$, la fonction σ-additiveλ considérée dans la proposition 2. L'existence, l'unicité et le caractère σ-fini de ce prolongement sont démontrés dans le théorème de prolongement et de mesure complète.

Proposition 4.

La mesure de Lebesgue d'un intervalle de $\mathbb{R}$ (fermé, ouvert, et semi-ouvert) d'extrémités a et b $(a \leq b)$ est $b - a$.

Démonstration

d'après la proposition 3, la mesure de Lebesgue des intervalles de la forme $[a, b[$ est

$$\lambda\left([a, b[\right) = b - a$$

Pour les autres intervalles, nous avons

$$[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[a, b + \frac{\varepsilon}{n}\right[$$

et nous avons

$$\begin{aligned} \lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[a, b + \frac{\varepsilon}{n}\right]\right) &= \lim_{n \to +\infty} \lambda \left[a, b + \frac{\varepsilon}{n}\right[\\ &= \lim_{n \to +\infty} \left(b + \frac{\varepsilon}{n} - a\right) \\ &= b - a \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$]a, b] = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[a + \frac{\varepsilon}{n}, b\right]$$

et nous avons

$$\begin{aligned}\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}\left[a+\frac{\varepsilon}{n},b\right[\right) &= \lim_{n\to+\infty}\lambda\left[a+\frac{\varepsilon}{n},b\right]\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(b-a-\frac{\varepsilon}{n}\right)\\ &= b-a\end{aligned}$$

Et en fin

$$]a,b[=\bigcup_{n=1}^{+\infty}\left[a+\frac{\varepsilon}{n},b\right[$$

Remarque

1-Le singleton $\{a\}$ est un cas particulier d'intervalle fermé $[a,b]$ avec $a=b$, il est donc de mesure nulle.

2-La mesure de Lebesgue d'une partie finie ou dénombrable de $\mathbb{R}$ est nulle.

Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Pour tout entier naturel n, il existe une unique mesure sur $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n})$ telle que la mesure de tout pavé $\prod\limits_{i=1}^{n}[a_i,b_i[$ soit égale à $\prod\limits_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$.

Cette mesure s'appelle la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

3

Applications mesurables

3.1 Généralités sur les applications mesurables.

3.1.1 applications mesurables.

Définition.

Etant donné deux espaces mesurables $(E_1, \mathfrak{C}_1)$ et $(E_2, \mathfrak{C}_2)$. Une application f de E_1 dans E_2 est dite mesurable si

$$\forall A \in \mathfrak{C}_2, \text{ on a } \quad f^{-1}(A) \in \mathfrak{C}_1$$

Autrement dit

$$f^{-1}(\mathfrak{C}_2) \subset \mathfrak{C}_1$$

Définition.

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable, on appelle variable aléatoire réelle toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$$

Remarques.

1°) On remarque, d'après la définition, qu'une variable aléatoire n'est en réalité ni variable ni aléatoire mais une fonction définie sur l'ensemble Ω constitué de tous les résultats possibles d'une expérience stochastique à valeur dans $\mathbb{R}$.

2°) la notion de variable aléatoire est essentiellement liée au choix de l'algèbre et de la σ-algèbre.

3°) Dans la théorie de la mesure, une variable aléatoire n'est qu'une fonction mesurable.

Notation.

Pour distinguer les variables aléatoires des valeurs qu'elles sont susceptibles de prendre, on note les variables aléatoires en majuscule $(X; Y; Z...)$ et les valeurs en minuscule $(x; y; z...)$.

Exemples de variables aléatoires.

1. Une fonction constante est une variable aléatoire pour tout espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$.

   En effet:

   Supposons que $X(\omega) = C$, $\forall \omega \in \Omega$, alors: $\forall x \in \mathbb{R}$,$\{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$,

   car:

$$\{\omega : X(\omega) < x\} = \begin{cases} \Omega & \text{si} \quad x > C \\ \\ \emptyset & \text{si} \quad x \leq C \end{cases}$$

   et Ω et $\emptyset$ font partie de toute algèbre et σ-algèbre.

2. Etant donné un événement $A \in \mathcal{F}$. La fonction indicatrice définie par :

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \omega \in A \\ \\ 0 & \text{si} \quad \omega \in \overline{A} \end{cases}$$

   est une variable aléatoire.

   En effet:

   $\forall x \in \mathbb{R}$, $\{\omega : I_A(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$, car :

$$\{\omega : I_A(\omega) < x\} = \begin{cases} \Omega & \text{si} \quad x > 1 \\ \overline{A} & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ \emptyset & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

et puisque A est un événement c'est à dire un élément de $\mathcal{F}$, alors d'après 1.3.5 $\overline{A}$ est aussi un élément de $\mathcal{F}$, et par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \{\omega : I_A(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$$

On remarque que l'hypothèse $A \in \mathcal{F}$ est une condition nécessaire et suffisante pour que I_A soit une variable aléatoire.

3. Toute fonction X de Ω dans $\mathbb{R}$ est une variable aléatoire pour l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

En effet :

Il est clair que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\{\omega : X(\omega) < x\} \subset \Omega$. Par conséquent,

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{P}(\Omega)$ et X est une variable aléatoire.

Remarque.

Il ne faut pas croire que toute fonction de Ω dans $\mathbb{R}$ est une variable aléatoire, cela dépend du choix de l'algèbre ou la σ-algèbre. L'exemple suivant le montre clairement.

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

$\mathcal{A} = \{\emptyset,\ \Omega,\ \{\omega_1\},\ \{\omega_2, \omega_3\}\}$ est une algèbre sur Ω.

Et soit X une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$\begin{array}{rcl} X: & \Omega & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \omega & \mapsto X(\omega) = \begin{cases} X(\omega_1) = -1 \\ X(\omega_2) = 0 \\ X(\omega_3) = 1 \end{cases} \end{array}$$

Pour $x \leq 1$ on a:

$$\{\omega : X(\omega) < x\} = \{\omega_1, \omega_2\} \notin \mathcal{A}$$

et par conséquent X n'est pas une variable aléatoire.

2.1.2 fonction borélienne.

On appelle fonction borélienne. toute fonction f de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$ telle que:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \{t \in \mathbb{R}^m : f(t) < x\} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$$

où $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$ est la σ-algèbre borélienne. .

Exemple.

Toute fonction continue est borélienne.

Proposition 1.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. L'image réciproque par X d'un intervalle quelconque est un événement. C'est à dire un élément de la σ-algèbre $\mathcal{F}$.

Démonstration.

$\{\omega : X(\omega) \geq x\} = \Omega \backslash \{\omega : X(\omega) < x\};$

$\{\omega : X(\omega) \leq x\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left\{\omega : X(\omega) < x + \frac{1}{n}\right\};$

$\{\omega : X(\omega) > x\} = \Omega \backslash \{\omega : X(\omega) \leq x\};$

$\{\omega : a \leq X(\omega) < b\} = \{\omega : X(\omega) < b\} \backslash \{\omega : X(\omega) < a\};$

$\{\omega : a < X(\omega) < b\} = \{\omega : X(\omega) < b\} \backslash \{\omega : X(\omega) \leq a\};$

$\{\omega : X(\omega) = x\} = \{\Omega : X(\omega) \leq x\} \backslash \{\omega : X(\omega) < x\};$

$\{\omega : a \leq X(\omega) \leq b\} = \{\omega : X(\omega) \leq b\} \backslash \{\omega : X(\omega) < a\};$

$\{\omega : a < X(\omega) \leq b\} = \{\omega : X(\omega) \leq b\} \backslash \{\omega : X(\omega) \leq a\}.$

Proposition 2.

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. L'image réciproque de tout borélien par X est un événement. Autrement dit, si B est un borélien quelconque. Alors:

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

Démonstration.

Soit B un borélien quelconque, alors B est la réunion ou l'intersection dénombrables d'intervalles c'est à dire $B = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{I}} B_i$ ou $B = \bigcap\limits_{i \in \mathbb{I}} B_i'$où B_i et B_i' sont des intervalles quelconques (ouverts, semi-ouverts, fermés).

Les égalités suivantes et la proposition 1 du $(2, 1, 2)$ donnent le résultat.

$$X^{-1}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{I}} B_i\right) = \bigcup_{i\in\mathbb{I}} X^{-1}(B_i)$$

$$X^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathbb{I}} B_i'\right) = \bigcap_{i\in\mathbb{I}} X^{-1}(B_i')$$

$$X^{-1}(C_\Omega B_i) = C_\Omega X^{-1}(B_i)$$

Proposition 3.

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

$$\{\omega : (X(\omega), Y(\omega)) \in B\} \in \mathcal{F}$$

Démonstration.

Soit $B = [a, b] \times [c, d]$

Alors:

$$\begin{aligned} \{\omega &: (X(\omega), Y(\omega)) \in B\} = \{\omega : a \leq X(\omega) \leq b,\ c \leq Y(\omega) \leq d\} \\ &= \{\omega : a \leq\ X(\Omega) \leq\ b\} \cap \{\omega : c \leq Y(\Omega) \leq\ d\} \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

car X et Y sont des variables aléatoires

Proposition 4.

Si X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et φ une fonction borélienne, alors $Y = \varphi \circ X$ définie par $Y(\omega) = \varphi(X(\omega))$ est aussi une variable aléatoire.

Démonstration.

Soit $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$

$$\{\omega : Y(\omega)) \in B\} = \{\omega : \varphi(X(\omega)) \in B\} = \{\omega : X(\omega) \in \varphi^{-1}(B)\} \in \mathcal{F}$$

car $\varphi^{-1}(B)\} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$

Corollaire.

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Alors: $cX,\ X+c,\ (c \in \mathbb{R});\ X \pm Y;\ XY;\ |X|$; le sont aussi.

Démonstration.

Les fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par:

$$\varphi_1 : x \mapsto cx;\ \varphi_2 : x \mapsto c + x;\ \varphi_3 : x \mapsto |x|$$

ainsi que les fonctions définies de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par:
$\varphi_4 : (x,y) \mapsto x \pm y; \varphi_5 : (x,y) \mapsto xy$ et $\varphi_6 : (x,y) \mapsto \dfrac{x}{y}$
sont continues donc boréliennes.
Comme:
$cX = \varphi_1 \circ X;\ X + c = \varphi_2 \circ X;\ |X| = \varphi_3 \circ X;\ X \pm Y = \varphi_4 \circ Z;\ XY = \varphi_5 \circ Z;\ \dfrac{X}{Y} = \varphi_6 \circ Z$

$$\begin{aligned} Z :\ & \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \omega \mapsto Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega)) \end{aligned}$$

les résultats découlent alors des propositions 4 et 5 précédentes :

2.1.3 fonction de répartition.

Définition.

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire X la probabilité pour que cette variable prenne des valeurs inférieures à x.

$$\begin{aligned} F :\ & \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] \\ & x \mapsto F(x) = P\{X < x\} \end{aligned}$$

Remarque:

Dans la littérature anglo-saxonne, on définit habituellement la fonction de répartition par:

$$\begin{aligned} F :\ & \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] \\ & x \mapsto F(x) = P\{X \leq x\} \end{aligned}$$

Cette différence entre les deux définitions conduit bien évidemment à des résultats différents. Ainsi dans notre définition:

$$F(b) - F(a) = P\{X \in [a;b[\}$$

et dans la définition anglo-saxonne:

$$F(b) - F(a) = P\left\{X \in]a;b]\right\}$$

En effet:

On représente la droite $\mathbb{R}$ de deux façons sous forme de réunion d'intervalles disjoints.

$$\mathbb{R} =]-\infty, a[\cup[a,b[\cup[b,+\infty[=]-\infty,a]\cup]a,b]\cup]b,+\infty\ [$$

Appliquons notre définition à la première représentation et la définition anglo-saxonne à la deuxième représentation on aura :

$$1 = F(a) + P\{X \in [a;b[\} + 1 - F(b) \Longrightarrow\ F(b) - F(a) = P\{X \in [a;b[\}$$

$$1 = F(a) + P\{X \in]a;b]\} + 1 - F(b) \Longrightarrow\ F(b) - F(a) = P\{X \in]a;b]\}$$

Nous allons voir que dans le cas des variables aléatoires discrètes cette différence est de taille.

Propriétés de la fonction de répartition.

1. La fonction de répartition est non négative.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) \geq 0$$

Cette propriété est évidente, puisque la fonction de répartition n'est qu'une probabilité.

2. La fonction de répartition est non décroissante

$$x_2 > x_1,\ F(x_2) \geq F(x_1)$$

En effet:

$$F(x_2) - F(x_1) = P\left\{X \in [x_1; x_2[\right\} \geq 0.$$

3. F est continue à gauche.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $x_n < x_{n+1}$,$x_n \longrightarrow x$, $x_n < x$

Montrons que:

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x)$$

Puisque:

$$\{\omega : X(\omega) < x_n\} \subset \{\omega : X(\omega) < x_{n+1}\}$$

et

$$\{\omega : X(\omega) < x\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega : X(\omega) < x_n\}$$

alors la propriété de continuité des probabilités donne:

$$\begin{aligned} F(x) &= P\{\omega : X(\omega) < x\} = P \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega : X(\omega) < x_n\} \\ &= \lim_{n\to\infty} P\{\omega : X(\omega) < x_n\} = \lim_{n\to\infty} F(x_n) \end{aligned}$$

4.$F(-\infty) = 0$

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $x_{n+1} < x_n$, $x_n \longrightarrow -\infty$ quand n tend vers l'infini.

Alors, on a:

$$\{\omega : X(\omega) < x_{n+1}\} \subset \{\omega : X(\omega) < x_n\}$$

et

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega : X(\omega) < x_n\} = \emptyset$$

D'après la propriété de la continuité des probabilités, on aura:

$$\begin{aligned} 0 &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega : X(\omega) < x_n\}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} P\{\omega : X(\omega) < x_n\} = \lim_{n\to} F(x_n) \end{aligned}$$

5.$F(\infty) = 1$

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $x_{n+1} > x_n$, $x_n \longrightarrow \infty$ quand n tend vers l'infini.

Alors, on a:

$$\{\omega : X(\omega) < x_n\} \subset \{\omega : X(\omega) < x_{n+1}\}$$

et

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega : X(\omega) < x_n\} = \Omega$$

D'après la propriété de la continuité des probabilités, on aura:

$$\begin{aligned}
1 &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\omega : X(\omega) < x_n\}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} P\{\omega : X(\omega) < x_n\} \\
&= \lim_{n\to\infty} F(x_n)
\end{aligned}$$

Théorème:

Soit F une fonction vérifiant les propriétés suivantes :

1) F est non décroissante sur $]-\infty, +\infty[$

2) F est continue à gauche;

3) $\lim_{n\to\infty} F(x) = 0$

Alors, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et une variable aléatoire X définie sur cet espace telle que F est la fonction de répartition de X.

demonstration :

est laissée en exercice

4

Modes de convergence

Notation

Nous allons noter dans toute la suite l'espace des applications μ-mesurables de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$ par $\mathfrak{M}_\mu(\mathbb{E},\mathbb{F})$.

Convergence μ-presque partout. (μ-p.p.)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathfrak{M}_\mu(\mathbb{E},\mathbb{F})$, et f un élément de $\mathfrak{M}_\mu(\mathbb{E},\mathbb{F})$.

On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge μ-presque partout vers f s'il existe une partie négligeable N de $\mathbb{E}$ telle que cette suite converge simplement vers f en tout point de $\mathbb{E}-N$

$$\forall x \in C_{\mathbb{E}}N \ ; \ \lim_{n\to+\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Convergence μ-presque uniforme. (μ-p.u.)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathfrak{M}_\mu(\mathbb{E},\mathbb{F})$, et f un élément de $\mathfrak{M}_\mu(\mathbb{E},\mathbb{F})$.

On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge μ-presque uniforme vers f si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon \text{ mesurable} : \mu(A_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

tel que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $C_{\mathbb{E}}A_\varepsilon$.

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sup_{x\in C_{\mathbb{E}}A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$$

Convergence en moyenne d'ordre p.

Cette définition fait appel aux espaces L^p.. C'est pourquoi, elle sera donnée ultérieurement..

Convergence en mesure

Suite de Cauchy en mesure

Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy en mesure si, et seulement si f_n est mesurable et

$$\forall\alpha>0,\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}:\forall n,m\in\mathbb{N};\ltimes,\gtrdot>\mathbb{N}\Rightarrow\mu\left(\{x:|f_n(x)-f(x)|\geq\alpha\}\right)\leq\varepsilon$$

Convergence en mesure

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathfrak{M}_\mu(\mathbb{E},\mathbb{F})$, et f un élément de $\mathfrak{M}_\mu(\mathbb{E},\mathbb{F})$.

On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers une fonction mesurable f si, et seulement si

$$\forall\alpha>0,\ \lim_{n\to+\infty}\mu\left(\{x:|f_n(x)-f(x)|\geq\alpha\}\right)=0$$

Relations entre différents modes de convergence.

R1. La convergence uniforme entraîne la convergence μ-presque uniforme.

R2. La convergence μ-presque uniforme entraîne la convergence μ-presque partout.

R3. La convergence uniforme entraîne la convergence en mesure.

Théorème d'Egoroff (1869-1931)

Si μ est une mesure bornée et si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathfrak{M}_\mu(\mathbb{E},\mathbb{F})$ convergente μ-p.p vers f alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge μ-presque uniformément vers f.

Démonstration

Supposons que $f_n\longrightarrow f$ partout sur E

Soit k un entier fixé et

$$A_m=\bigcap_{n>m}\left\{x:|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{k}\right\}$$

On a les résultats suivants :

1) A_m est une suite croissante

2) $\bigcup_{m=1}^{+\infty}A_m=E$

1) Il est évident que la suite $(A_m)_{m\in N}$ est croissante, comme il est évident que $\bigcup_{m=1}^{+\infty}A_m\subset E$.

Montrons que $E\subset\bigcup_{m=1}^{+\infty}A_m$

Soit $x \in E$ tel que $f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x)$, donc

$$\exists N \in \mathbb{N} : n > N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \ , \ k \text{ fixé}$$

ainsi $x \in A_N$ et par conséquent

$$E \subset \bigcup_{m=1}^{+\infty} A_m$$

d'où l'égalité.

$$\exists m_k = m(\varepsilon, k) : \mu(A_{m_k}) \geq \mu(E) - \frac{\varepsilon}{2^k}$$

$$\mu\left(\overline{A_{m_k}}\right) < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

Soit

$$A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \overline{A_{m_k}}$$

alors

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} \overline{A_{m_k}}\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu\left(\overline{A_{m_k}}\right) \leq \varepsilon$$

et puisque

$$CA = \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_{m_k}$$

on a

$$CA \subset A_{m_k}$$

donc

$$\forall x \in CA, \forall n > m_k, \text{ on a } |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$$

ainsi

$$\forall k > 0, \exists m_k : n > m_k \Rightarrow \sup_{CA} (|f_n(x) - f(x)|) < \frac{1}{k}$$

d'où la convergence uniforme sur CA avec $\mu(A) < \varepsilon$.

Théorème

Toute suite de Cauchy en mesure est convergente..

Démonstration.

Exercice.

5

Intégrales de Lebesgue

5.1 Fonctions étagées

Soit f une application de E dans F. On dit que f est étagée si, et seulement si elle prend des valeurs en nombre fini.

Autrement dit

$$f(E) = \{y_1, y_2, ..., y_n\} \quad \text{est un ensemble fini.}$$

Appellation.

Lorsque $F = \mathbb{R}$; f est dite application numérique étagée.

Notation

Nous noterons l'ensemble des fonctions étagées par $\mathcal{E}$ et l'ensemble des fonction étagées positives par $\mathcal{E}^+$.

Exemple.

Soit E un espace mesurable et A un sous ensemble de E

$$\begin{aligned} \chi_A \quad &: E \longrightarrow \mathbb{R} \\ &x \mapsto \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

Cette fonction est appelée fonction caractéristique de l'ensemble A.

Représentation canonique d'une fonction étagée.

Soient $y_1, y_2, ..., y_n$ les valeurs distinctes de la fonction étagée f. Notons par A_i l'ensemble défini par

$$A_i = \{x \in E : f(x) = y_i\}$$

alors la fonction f s'écrit

$$f = \sum_{i=1}^{n} y_i \chi_{A_i}$$

Remarque

Il faut bien noter que $(A_i)_i$ est une partition de E

Conséquence

Proposition.

Une fonction numérique étagée est mesurable si, et seulement si

$$\forall i = 1, \cdots, n \quad A_i = \{x \in E : f(x) = y_i\} \quad \text{est mesurable}$$

En effet

$$f : (E, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$$

$$A_i = \{x \in E : f(x) = y_i\}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \{y_i\} \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \Rightarrow f^{-1}\{y_i\} \in \mathcal{F} \\ &\Rightarrow \quad A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow A_i \text{ est mesurable} \end{aligned}$$

Inversement, soit $B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$, alors

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= \{x \in E : f(x) \in B\} \\ &= \{x \in E : y_i \in B\} \\ &= f^{-1}\left\{\bigcup_{i \in I} y_i\right\} \\ &= \bigcup_{i \in I} f^{-1}\{y_i\} = \bigcup_{i \in I} A_i \end{aligned}$$

Puisque $A_i \in \mathcal{F}$, alors $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}$ et par conséquent $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ et f est mesurable.

Théorème

Toute fonction numérique mesurable à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ est limite simple d'une suite croissante de fonctions étagées positives.

Démonstration

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé ; posons pour $0 \leq k \leq n2^n - 1$

$$\begin{aligned} E_{n,k} &= \left\{ x \in E : \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \right\} \\ F_n &= \{ x \in E : f(x) \geq n \} \end{aligned}$$

et définissons une suite de fonction par

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{k}{2^n} & \text{Si } \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \\ \\ n & \text{Si } f(x) \geq n \end{cases}$$

Autrement dit

$$f_n = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \chi_{E_{n,k}} + n\chi_{F_n}$$

Il est clair qu'ainsi définie les fonctions f_n sont étagées.

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

En effet

Remarquons que

$$E_{n,k} = E_{n+1,2k} \cup E_{n+1,2k+1}$$

Si $x \in E_{n+1,2k}$ alors $\frac{2k}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k+1}{2^{n+1}}$ et nous avons

$$f_n(x) = \frac{k}{2^n} \qquad \text{et} \qquad f_{n+1}(x) = \frac{k}{2^n}$$

Donc

$$f_{n+1}(x) = f_n(x)$$

Si $x \in E_{n+1,2k+1}$ alors $\frac{2k+1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}$ et nous avons

$$f_n(x) = \frac{k}{2^n} \qquad \text{et} \qquad f_{n+1}(x) = \frac{2k+1}{2^{n+1}} = \frac{k+\frac{1}{2}}{2^n}$$

Donc

$$f_n(x) < f_{n+1}(x)$$

Conclusion : La suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

<u>La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f.</u>

Nous distinguons deux cas :

1) Si $f(x)$ est fini, posons

$$k = [2^n f(x)]$$

où [.] désigne la partie entière. Alors

$$\frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}$$

et

$$f_n(x) = \frac{k}{2^n}$$

$$0 \leq f(x) - f_n(x) < \frac{1}{2^n}$$

par conséquent

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$$

2) Si $f(x)$ est infini, alors $x \in F_n$ et $f_n(x) = n$

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = +\infty = f(x)$$

Théorème

f est mesurable si, et seulement si elle est limite d'une suite uniformément convergente de fonctions étagées.

Corollaire

Toute fonction mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}$ est limite simple d'une suite de fonctions étagées mesurables finies.

5.2 Intégrale de Lebesgue des fonctions étagées.

Définition

Soient $(E, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et f une fonction étagée positive prenant les valeurs $y_1, y_2, ..., y_n$, $(y_i \neq y_j, \forall i \neq j)$.

On appelle intégrale de Lebesgue de la fonction f par rapport à la mesure μ, et on note $\int\limits_E f d\mu$, le nombre (éventuellement $+\infty$) défini par

$$\int\limits_E f d\mu = \sum_{i=1}^{n} y_i \mu \{x \in A : f(x) = y_i\}$$

avec la convention $0.\infty = 0$

Propriétés de l'intégrale de Lebesgue des fonctions étagées.

$$\int_A C d\mu = C\mu(A)$$

$$\int_A Cf d\mu = C\int_A f d\mu$$

$$\int_A (f+g)\, d\mu = \int_A f d\mu + \int_A g d\mu$$

$$f \leq g \Rightarrow \int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu$$
$$A \subset B \Rightarrow \int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$$

$$\begin{aligned} \mu\left(f^{-1}\,]0,+\infty]\right) &> 0 \Rightarrow \int_E f d\mu > 0 \\ \mu\left(f^{-1}\,]0,+\infty] \cap A\right) &> 0 \Rightarrow \int_A f d\mu > 0 \end{aligned}$$

$$f = 0 \ \mu\text{-}p.p \Leftrightarrow \int_E f d\mu = 0$$

$$\int_A f d\mu \quad > \quad 0 < +\infty \Rightarrow \mu\left(f^{-1}(\{+\infty\})\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$f \text{ est finie } \mu\text{-presque partout.}$$

5.3 Intégrale de Lebesgue d'une fonction positive

Soient $(E, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable positive. On appelle intégrale de Lebesgue de la fonction f, et on note $\int_E f d\mu$ l'élément de $[0, +\infty]$ défini par

$$\int\limits_E f d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int\limits_E f_n d\mu \tag{5.3.1}$$

où $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions étagées non négatives qui tend en croissant vers f.

La fonction f est dite intégrable si $\int\limits_E f d\mu < +\infty$

Si A est un ensemble mesurable alors

$$\int_A f d\mu = \int_E f \chi_A d\mu$$

Remarque

On peut aussi caractériser les intégrales des fonctions mesurables positives à partir d'intégrales de fonctions étagées positives par

$$\int_E f d\mu = \sup \left\{ \int g d\mu, \qquad g \in \mathcal{E}^+, g \leq f \right\}$$

Propriété 1.

La limite (5.3.1) a toujours un sens dans $\overline{\mathbb{R}}$.

En effet :

$$\left| \int_A f_p d\mu - \int_A f_q d\mu \right| = \left| \int_A (f_p - f_q) \, d\mu \right| \leq \mu (A) \sup_{x \in A} |f_p (x) - f_q (x)|$$

Remarque

Il faut bien distinguer le fait que $\int_E f d\mu$ a toujours un sens dans $[0, +\infty]$ et le fait que $\int_E f d\mu$ est finie, c'est à dire $\int_E f d\mu < +\infty$.

Propriété 2.

La limite (5.3.1) ne dépend du choix de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

En effet :

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de fonctions étagées non négatives qui tendent en croissant vers f.

Pour tout entier fixé p nous avons $g_p \leq f$ et par conséquent

$$\int_E g_p d\mu \leq \int_E f d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_E f_n d\mu$$

et donc

$$\lim_{n \to +\infty} \int_E g_n d\mu \leq \lim_{n \to +\infty} \int_E f_n d\mu$$

En changeant g_p par f_p, on obtient l'inégalité inverse et en définitive l'égalité

$$\lim_{n \to +\infty} \int_E g_n d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_E f_n d\mu$$

5.4 Intégrale des fonctions de signe quelconque

Définition

Une fonction mesurable f est dite intégrable si les fonctions positives f^+ et f^- sont intégrables ; on appellera alors intégrale de f et on notera $\int_E f d\mu$ le nombre $\int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$. Autrement dit

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$$

Proposition 1

La fonction mesurable f est intégrable si, et seulement si $|f|$ est intégrable et l'on a

$$\left|\int_E f d\mu\right| \leq \int_E |f| \, d\mu$$

En effet

$$f = f^+ - f^-$$

f^+ et f^- sont intégrables, $2f^{-1}$ le sont aussi $\Rightarrow$ $f^+ + f^-$ est intégrable $\Rightarrow$ $|f|$ est intégrable.

Inversement

$$\begin{aligned} f^+ &\leq f^+ + f^- \\ f^- &\leq f^+ + f^- \end{aligned}$$

donc f est intégrable

Proposition 2

Une fonction mesurable f est intégrable si, et seulement si il existe une fonction positive g intégrable telle que $|f| \leq g$

σ-additivité de l'intégrale de Lebesgue.

Théorème.

Soient $(E, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et f une fonction mesurable. Si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une partition de A, alors

$$\int\limits_A f d\mu = \sum_{i=0}^{+\infty} \int\limits_{A_i} f d\mu$$

Démonstration.

Considérons, tout d'abord, le cas où f est une fonction étagée prenant les valeurs $y_1, y_2, ..., y_n$.

Notons

$$\begin{aligned} B_k &= \{x \in A : f(x) = y_k\} \\ B_k^i &= \{x \in A_i : f(x) = y_k\} \end{aligned}$$

Il est clair que les B_k sont deux à deux disjoints et

$$B_k = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_k^i$$

ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} \int_A f d\mu &= \sum_{k=1}^{n} y_k \mu(B_k) = \sum_{k=1}^{n} y_k \sum_{1=0}^{+\infty} \mu\left(B_k^i\right) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} y_k \mu(B_k) = \sum_{1=0}^{+\infty} \int_{A_i} f d\mu \end{aligned}$$

Supposons, maintenant, que f est une fonction mesurable quelconque.

Comme f est intégrable sur A, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists g \in \mathcal{E} : |f(x) - g(x)| < \varepsilon$$

Puisque g est une fonction simple, nous avons

$$\int_A g d\mu = \sum_{1=0}^{+\infty} \int_{A_i} g d\mu$$

et par conséquent f est intégrable sur chacun des ensemble A_i et nous avons

$$\sum_{1=0}^{+\infty} \left| \int_{A_i} f d\mu - \int_{A_i} g d\mu \right| \leq \sum_{1=0}^{+\infty} \varepsilon \mu(A_i) = \varepsilon \mu(A)$$

et comme $|f - g| < \varepsilon$, alors

$$\left| \int_A f d\mu - \int_A g d\mu \right| \leq \varepsilon \mu(A)$$

Par ailleurs

$$\left|\sum_{i=0}^{+\infty}\int_{A_i} gd\mu + \int_A g_n d\mu - \sum_{i=0}^{+\infty}\int_{A_i} g_n d\mu - \int_A fd\mu\right| \leq 2\varepsilon\mu(A)$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, alors

$$\sum_{1=0}^{+\infty}\int_{A_i} fd\mu = \int_A fd\mu$$

Remarque

Pour tout fonction f, intégrable, et à partir d'une mesure μ on peut construire une autre mesure ν.

Réciproquement, étant donné une mesure ν existe-t-il une fonction f telle que $\nu(A)$ soit l'intégrale de Lebesgue de la fonction f sur A?

La réponse est négative en général, mais avec des hypothèses supplémentaires (voir théorème de Radon-Nycodym) cette réciproque est vraie.

Corollaire

Si f est une fonction intégrable sur un ensemble mesurable A alors elle est intégrable sur tout sous ensemble mesurable de A.

Démonstration

en exercice.

5.5 Continuité absolue de l'intégrale de Lebesgue.

Théorème.

Soit $(E, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Si f est une fonction intégrable au sens de Lebesgue sur un ensemble mesurable A. alors

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0 : \mu(B) < \eta \Rightarrow \left|\int_B fd\mu\right| < \varepsilon$$

pour tout ensemble mesurable $B \subset A$

Démonstration.

Soit f une fonction intégrable sur un ensemble mesurable A.

Posons

$$A_n = \{x \in A : |f(x)| \in [n, n+1[\}$$

et

$$B_N = \bigcup_{n=0}^{N} A_n \qquad , \qquad C_N = A \diagdown B_N$$

Il est clair que $A = \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$, par conséquent d'après le théorème précédent

$$\int_A |f| \, d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{A_n} |f| \, d\mu$$

Choisissons N de tel sorte que

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \int_{A_n} |f| \, d\mu = \int_{C_N} |f| \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit

$$0 < \eta < \frac{\varepsilon}{2(N+1)}$$

Si maintenant B est tel que $\mu(B) < \eta$, alors

$$\left| \int_B f d\mu \right| \leq \int_B |f| \, d\mu = \underbrace{\int_{B \cap B_N} |f| \, d\mu}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{\int_{B \cap C_N} |f| \, d\mu}_{<\varepsilon/2}$$

Conséquence.

Soit f une fonction positive, intégrable sur E par rapport à la mesure μ. Alors la fonction

$$\begin{aligned} \nu : \quad & (E, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ & A \mapsto \nu(A) = \int_A f d\mu \end{aligned}$$

est définie pour tout $A \subset E$, est positive et σ-additive. Autrement dit, ν est une mesure positive.

5.6 Passage à la limite sous le signe de l'intégrale de Lebesgue.

Théorème de Lebesgue.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables convergeant vers f.

si pour tous les n on a

$$|f_n(x)| \leq \varphi(x)$$

où φ est une fonction intégrable sur E, alors la fonction limite f est intégrable sur et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n d\mu = \int_E \lim_{n\to+\infty} f_n d\mu$$

Démonstration

Remarquons, de prime abord, que

$$|f(x)| \leq \varphi(x)$$

ce qui implique que la fonction f est intégrable. d'après la continuité absolue de l'intégrale de Lebesgue, nous avons

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0 : \mu(B) < \eta \Rightarrow \left|\int_B \varphi d\mu\right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

En vertu du théorème d'Egorov, nous pouvons choisir B de façon que $\mu(B) < \eta$ et que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $A = E\diagdown B$.

Donc

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2\mu(A)}$$

Par conséquent

$$\int_E f d\mu - \int_E f_n d\mu = \int_A (f - f_n) d\mu + \int_B f d\mu - \int_B f_n d\mu$$

Comme

$$|f(x)| \leq \varphi(x) \quad \text{et} \quad |f_n(x)| \leq \varphi(x)$$

on en déduit

$$\left|\int_E f d\mu - \int_E f_n d\mu\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

Corollaire.

Si

$$|f_n(x)| \leq M, \quad M \text{ est une constante positive}$$

et $f_n \longrightarrow f_1$, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n d\mu = \int_E \lim_{n\to+\infty} f_n d\mu$$

Théorème de la convergence monotone.(TCM)

(Théorème de Beppo-Levi).

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur E et supposons que

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq ... \leq ...$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$$

alors f est une fonction mesurable et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E \lim_{n\to+\infty} f_n d\mu$$

Démonstration.

Sans nuire à la généralité, nous supposons que $f_1 \geq 0$, sinon on pose $\widetilde{f_n} = f_n - f$.

Montrons, tout d'abord, que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu \leq \int_E \lim_{n\to+\infty} f_n d\mu$$

Comme f_n est croissante, alors

$$f_n \leq \lim_{n\to+\infty} f_n$$

et d'après les propriétés des intégrales de Lebesgue, nous avons

$$\int_E f_n d\mu \leq \int_E \lim_{n\to+\infty} f_n d\mu$$

Par passage à la limité nous obtenons l'inégalité.

Montrons, maintenant, l'inégalité inverse.

Pour ce faire, montrons que pour tout fonction mesurable étagée positive g telle que $g \leq f$, nous avons

$$\int_E g d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu$$

Posons

$$E_n = \{x \in E : f_n(x) \geq cg(x)\}, \quad c \in [0, 1]$$

Il est clair que:

1° Chaque ensemble E_n est mesurable.

2° La suite E_n est croissante

3° $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n = E$

Par construction, nous avons

$$\int_E f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq c \int_{E_n} g d\mu$$

Faisons tendre n vers $+\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu \geq \lim_{n\to+\infty} \int_{E_n} f_n d\mu \geq c \lim_{n\to+\infty} \int_{E_n} g d\mu$$

Comme la suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $\int_{E_n} g d\mu$ est une mesure positive, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{E_n} g d\mu = \int_E g d\mu$$

c étant une constante positive inférieure ou égale à un, donc

$$\int_E g d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu$$

Corollaire.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positives de fonctions mesurables, alors

$$\int_E \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_E f_n d\mu$$

En effet :

$$\begin{aligned} \int_E \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) d\mu &= \int_E \left(\lim_{p\to+\infty} \sum_{n=0}^{p} f_n \right) d\mu \\ &= \lim_{p\to+\infty} \int_E \left(\sum_{n=0}^{p} f_n \right) d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_E (f_n)\, d\mu \end{aligned}$$

Lemme de Fatou.

Pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions mesurables positives , nous avons

$$\int_A \left(\liminf_n f_n \right) d\mu \leq \liminf_n \int_A f_n d\mu$$

Démonstration

$$\forall n \geq p, \text{ nous avons } \inf_{i\geq p} f_i \leq f_n$$

ce qui entraîne, d'après les propriétés de intégrales de Lebesgue

$$\int_A \inf_{i\geq p} f_i d\mu \leq \int_A f_n d\mu.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $n \geq p$, alors

$$\int_A \inf_{i\geq p} f_i d\mu \leq \inf_{n\geq p} \int_A f_n d\mu.$$

et par passage à la limite quand p tend vers $+\infty$, nous obtenons

$$\lim_{p\to+\infty} \int_A \inf_{i\geq p} f_i d\mu \leq \lim_{p\to+\infty} \inf_{n\geq p} \int_A f_n d\mu.$$

Considérons, à présent, la suite $(h_p)_{p\in\mathbb{N}}$ définie par

$$h_p = \inf_{i\geq p} f_i$$

Il est clair que la suite $(h_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante, par conséquent, le théorème de la convergence monotone permet d'écrire

$$\lim_{p\to+\infty} \int_A h_p d\mu = \int_A \lim_{p\to+\infty} h_p d\mu$$

et donc

$$\int_A \left(\lim_p \inf_{i\geq p} f_n\right) d\mu \leq \lim_p \inf_{n\geq p} \int_A f_n d\mu$$

d'où le résultat.

5.7 Intégration des fonctions complexes

Définition (voir Kolmogorov)

Théorème de la convergence dominée de Lebesgue (TCD)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions, à valeurs complexes, intégrables, et convergeant presque partout vers une fonction f.

S'il existe une fonction g intégrable telle que $|f_n| \leq g$ pour tout n, alors la fonction f est intégrable et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E |f_n - f|\, d\mu = 0$$

ainsi que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E \lim_{n\to+\infty} f_n d\mu$$

Démonstration.

L'intégrabilité de la fonction f résulte, immédiatement, de l'intégrabilté de la fonction g et de l'inégalité $|f_n| \leq g$ qui entraîne $|f| \leq g$.

L'Application du lemme de Fatou à la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$h_n = 2g - |f_n - f|$$

donne

$$\int_E 2g d\mu \leq \liminf_n \int_E (2g - |f_n - f|)\, d\mu$$

Par ailleurs, nous avons

$$\liminf_n \int_E (2g - |f_n - f|)\, d\mu = \int_E 2g d\mu - \limsup_n \int_E |f_n - f|\, d\mu$$

Par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E \lim_{n\to+\infty} f_n d\mu$$

ou bien

$$\left|\int (f - f_n)\, d\mu\right| \leq \int |(f - f_n)|\, d\mu = 0$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \int (f - f_n)\, d\mu = 0 \Rightarrow \int f d\mu = \int f_n d\mu \\ &\Rightarrow \int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \end{aligned}$$

Théorème de Radon-Nikodym

Mesure absolument continue par rapport à une autre.

Définition

Soient ν et μ deux mesures définies sur le même espace mesurable $(E, \mathcal{F})$. On dit que la mesure ν est absolument continue par rapport à la mesure μ, et on note $\nu \ll \mu$, si tout ensemble μ-négligeable est aussi ν-négligeable .

Exemple

Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable et μ une mesure sur $(E, \mathcal{F})$, alors

$$\forall A \in \mathcal{F}, A \mapsto \nu(A) = \int_A f d\mu$$

est une mesure absolument continue par rapport à μ.

En effet :

Soit N_μ un ensemble μ-négligeable, alors il existe un ensemble mesurable $N \in \mathcal{F}$ tel que $N_\mu \subset N$ et $\mu(N) = 0$.

Comme $\mu(N) = 0$, alors $\int_N f d\mu = 0$, par conséquent $\nu(N) = 0$ et $\nu \ll \mu$.

Critère d'absolue continuité

Proposition

Soient ν et μ deux mesures définies sur le même espace mesurable $(E, \mathcal{F})$. Si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall A \in \mathcal{F}, \mu(A) < \eta \Rightarrow \nu(A) < \varepsilon$$

alors ν est absolument continue par rapport à la mesure μ. Et si la mesure ν est bornée la réciproque est vraie.

Démonstration

Soit N_μ un ensemble μ-négligeable, alors il existe un ensemble mesurable $N \in$ tel que $N_\mu \subset N$ et $\mu(N) = 0$. Donc $\exists \eta > 0$ tel que $\mu(N) < \eta$. Par conséquent

$$\forall \varepsilon > 0, \nu(N) < \varepsilon \Rightarrow \nu(N) = 0 \Rightarrow \nu \ll \mu$$

Supposons, maintenant, que est ν bornée.

Raisonnons par l'absurde

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \text{ on a } \forall A \in \mathcal{F}, \mu(A) < \eta \text{ et } \nu(A) \geq \varepsilon$$

ou encore

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ on a } \forall A_n \in \mathcal{F}, \mu(A_n) < \frac{1}{2^n} \text{ et } \nu(A_n) \geq \varepsilon$$

Posons

$$B_n = \bigcup_{k \geq n} A_k \quad \text{et} \quad B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

D'une part, nous avons

$$\mu(B_n) \leq \sum_{k \geq n} \mu(A_k) \leq \sum_{k \geq n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Par conséquent

$$\mu(B) \leq \mu(B_n) \leq \frac{1}{2^{n-1}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc

$$\mu(B) = 0$$

D'autre part, la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante et la mesure ν est bornée, alors

$$\nu(B) = \lim_{n\to+\infty} \nu(B_n) \geq \varepsilon$$

L'ensemble B est μ-négligeable, mais pas ν-négligeable, c'est à dire la mesure ν n'est pas absolument continue par rapport à μ. Ce qui contredit l'hypothèse.

Théorème de décomposition de Hahn

Soit $(E, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, où μ est une mesure réelle sur $\mathcal{F}$, alors il existe une partition de E en deux sous ensembles E^+ et E^- tels que

$$\begin{aligned} &\forall A \in \mathcal{F} \quad \text{et} \quad A \subset E^+, \mu(A) \geq 0 \\ &\forall A \in \mathcal{F} \quad \text{et} \quad A \subset E^-, \mu(A) < 0 \end{aligned}$$

Lemme

Soient ν et μ deux mesures définies sur le même espace mesurable $(E, \mathcal{F})$ telles que la mesure ν est absolument continue par rapport à la mesure μ, alors si $\nu \neq 0$

$$\exists \varepsilon > 0, \exists B \in \mathcal{F} : \mu(B) > 0 \ \text{ et } \forall A \in \mathcal{F} \text{ on a } \varepsilon\mu(A \cap B) \leq \nu(A \cap B)$$

Théorème de Radon-Nikodym

Soient μ une mesure positive σ-finie et ν une mesure réelle ou complexe définies sur le même espace mesurable $(E, \mathcal{F})$ telles que ν est absolument continue par rapport à la mesure μ, alors il existe une fonction unique f définie sur E, μ-intégrable, telle que

$$\forall A \in \mathcal{F}\ , \ \ \nu(A) = \int_A f d\mu$$

Cette fonction f associée à ν est appelée dérivée de Radon-Nikodym de ν par rapport à μ ou encore la densité de ν par rapport à μ et on la notera $\dfrac{d\nu}{d\mu}$.

Démonstration

Existence..

Introduisons l'ensemble Φ défini par

$$\Phi = \left\{ \varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}_+, \mu\text{-intégrable} : \forall A \in \mathcal{F}\ , \int_A \varphi d\mu \leq \nu(A) \right\}$$

Soit

$$M = \sup_{\varphi\in\Phi} \int_A \varphi d\mu$$

D'après la propriété caractéristique de la borne supérieure, nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists \varphi_n \in \Phi \text{ telle que } M - \frac{1}{n} \leq \int_A \varphi_n d\mu$$

Posons

$$g_n(x) = \max(\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)) \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} g_n(x) = f(x)$$

Montrons que $g_n \in \Phi$. Pour ça, raisonnons par récurrence sur n.

Pour $n = 2$, nous avons

$$\begin{aligned} \int_A g_2 d\mu &= \int_A \max(\varphi_1, \varphi_2) d\mu \\ &= \int_{A \cap B} \varphi_1 d\mu + \int_{A \cap \overline{B}} \varphi_2 d\mu \end{aligned}$$

où

$$B = \{x : \varphi_1(x) \geq \varphi_2(x)\}$$

Par conséquent

$$\int_A g_2 d\mu \leq \nu(A \cap B) + \nu\left(A \cap \overline{B}\right) = \nu(A)$$

ainsi, et par récurrence, on montre que

$$\int_A g_n d\mu \leq \nu(A)$$

Il est clair que la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Le théorème de la convergence monotone nous donne

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_E g_n d\mu = M \leq \nu(A)$$

Montrons, maintenant

$$\forall A \in \mathcal{F}, \ \nu(A) = \int_A f d\mu$$

Posons

$$\forall A \in \mathcal{F}, \ \lambda(A) = \nu(A) - \int_A f d\mu$$

D'après la construction, la fonction d'ensemble λ est positive et jouit de toutes les propriétés d'une mesure. Elle est, en outre, absolument continue par rapport à μ.

D'après le lemme précédent, si $\lambda \neq 0$, alors

$$\exists \varepsilon > 0, \exists B \in \mathcal{F} : \mu(B) > 0 \ \text{ et } \forall A \in \mathcal{F} \text{ on a } \varepsilon\mu(A \cap B) \leq \lambda(A \cap B)$$

En posant

$$h(x) = f(x) + \varepsilon \chi_B(x)$$

on obtiendrait pour tout ensemble mesurable A

$$\begin{aligned}
\int_A h d\mu &= \int_A f d\mu + \varepsilon \mu(A \cap B) \\
&= \int_{A\cap B} f d\mu + \int_{A\cap \overline{B}} f d\mu + \varepsilon \mu(A \cap B) \\
&\leq \int_{A\cap B} f d\mu + \int_{A\cap \overline{B}} f d\mu + \lambda(A \cap B) \\
&\leq \int_{A\cap \overline{B}} f d\mu + \nu(A \cap B) \leq \nu(A)
\end{aligned}$$

C'est à dire $h \in \Phi$

D'autre part

$$\int_E h d\mu = \int_E f d\mu + \varepsilon \mu(B) > M$$

ce qui contredit la définition de M.

Unicité.

Supposons qu'on a

$$\nu(A) = \int_A f_1 d\mu = \int_A f_2 d\mu$$

Posons

$$A_n = \left\{ x : f_2(x) - f_1(x) > \frac{1}{n} \right\}$$

nous avons, d'après l'inégalité de Tchebychev

$$\mu(A_n) \leq n \int_A (f_1 - f_2) d\mu = 0$$

De même, pour

$$B_m = \left\{ x : f_1(x) - f_2(x) > \frac{1}{m} \right\}$$

on a

$$\mu(B_n) = 0$$

Comme

$$\{x : f_1(x) \neq f_2(x)\} = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \right) \cup \left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_m \right)$$

On en déduit que

$$\mu\left\{x : f_1(x) \neq f_2(x)\right\} = 0$$

D'où le résultat.

6

Mesure produit

6.1 Produit cartésien

Définition

Soient E_1 et E_2 deux ensembles non vides. On appelle produit cartésien de E_1 par E_2, et note $E_1 \times E_2$, l'ensemble de tous les couples (x, y) où $x \in E_1$ et $y \in E_2$.

$$E_1 \times E_2 = \{(x, y) : x \in E_1, \qquad y \in E_2\}$$

Remarque

Si $A \subset E_1$ et $B \subset E_2$, alors $A \times B \subset E_1 \times E_2$

6.2 Rectangle mesurable

Soient $(E_1, \mathcal{F}_1)$ et $(E_2, \mathcal{F}_2)$ deux espaces mesurables. On appelle rectangle mesurable dans $E_1 \times E_2$ tout ensemble $A \times B$ où $A \in \mathcal{F}_1$ et $B \in \mathcal{F}_2$.

Ensemble élémentaire

On appelle ensemble élémentaire toute réunion finie de rectangles mesurables.

6.3 Tribu produit

Définition.

Soient $(E_1, \mathcal{F}_1)$ et $(E_2, \mathcal{F}_2)$ deux espaces mesurables. On appelle tribu produit de $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$, et on note $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$, la tribu engendré par l'ensemble des rectangles mesurables.

Attention!

La tribu produit $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ n'est pas le produit cartésien $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$.

Section selon un élément

Soit A une partie de $E_1 \times E_2$ et x un point de E_1. On appelle section de A selon x ou bien coupe de A en x, et on note A_x, l'ensemble des point y de E_2 tels que $(x, y) \in A$.

$$A_x = \{y \in E_2 : (x, y) \in A\}$$

De la même façon on définit

$$A^y = \{x \in E_1 : (x, y) \in A\}$$

Proposition

Soient $(E_1, \mathcal{F}_1)$ et $(E_2, \mathcal{F}_2)$ deux espaces mesurables. Alors

$$\forall x \in E_1 \text{ et } A \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2, \text{ la coupe } A_x \in \mathcal{F}_2$$

$$\forall y \in E_2 \text{ et } A \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2, \text{ la coupe } A^y \in \mathcal{F}_1$$

Démonstration

Soit $\mathcal{F}$ la classe de tous les $A \in E_1 \otimes E_2$ et tels que $A_x \in \mathcal{F}_2$ pour tout $x \in E_1$.

Si $A = A_1 \times B_1$ un rectangle mesurable, on a

$$A_x = \begin{cases} B_1 & \text{si } x \in A_1 \\ \emptyset & \text{si } x \notin A_1 \end{cases}$$

Par suite tout rectangle mesurable appartient à $\mathcal{F}$.

Comme $\mathcal{F}_2$ est une algèbre, alors

1) $E_1 \times E_2 \in \mathcal{F}$
2) Si $A \in \mathcal{F},$ alors $\overline{A}_x = \overline{A_x}$ donc $\overline{A} \in \mathcal{F}$
3) Si $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ et $A = \bigcup\limits_i A_i,$ alors $A_x = \bigcup\limits_i (A_i)_x$ donc $A \in \mathcal{F}$

Par conséquent $\mathcal{F}$ est une σ-algèbre.

De la même façon, on montre que

$$\forall y \in E_2 \text{ et } A \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2, \text{ la coupe } A^y \in \mathcal{F}_1$$

Définition

Soient E_1, E_2 et F trois ensembles non vides et f une application définie par

$$\begin{aligned} f: \quad & E_1 \times E_2 \longrightarrow F \\ & (x, y) \mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

A tout $x \in E_1$ nous associons une fonction f_x définie sur E_2 par

$$\begin{aligned} f_x: \quad & E_2 \longrightarrow F \\ & y \mapsto f_x(y) = f(x, y) \end{aligned}$$

De même si $y \in E_2$, f^y est la fonction définie sur E_1 par

$$\begin{aligned} f_y: \quad & E_1 \longrightarrow F \\ & x \mapsto f^y(x) = f(x, y) \end{aligned}$$

Théorème

Soit f une fonction mesurable relativement à $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ sur $E_1 \times E_2$, alors

1) $\forall x \in E_1,$ f_x est mesurable relativement à $\mathcal{F}_2$
2) $\forall y \in E_2,$ f^y est mesurable relativement à $\mathcal{F}_1$

Démonstration

Supposons que F est muni de la tribu $\mathcal{F}_F$. Pour tout $B \in \mathcal{F}_F$, notons par

$$Q = \{(x, y) \in E_1 \times E_2 : f(x, y) \in B\}$$

Il est clair que $Q \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ car f est mesurable.

Par ailleurs, nous avons

$$Q_x = \{y \in E_2 : f_x(y) \in B\} \in \mathcal{F}_2$$

donc f_x est mesurable.

De la même façon, on montre que f^y est mesurable.

Théorème

Soient μ et ν deux mesures σ-finies. Il existe alors sur $(E_1 \times E_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2)$ une mesure β telle que, pour tout rectangle mesurable $A \times B$, on a

$$\beta(A \times B) = \mu(A)\,\nu(B)$$

Démonstration

Pour tout $A \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$, posons

$$\beta(A) = \int\limits_{E_2} \mu(A^y)\,d\nu$$

1) $\beta(\emptyset) = 0$

En effet

$$\emptyset_y = \emptyset \text{ et } \mu(\emptyset) = 0 \Longrightarrow \int\limits_{E_2} \mu(\emptyset)\,d\nu = 0$$

2) Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles deux à deux disjoints appartenant à $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$.

Notons

$$A = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$$

Il est clair que $\forall y \in E_2, A^y$ est la réunion des ensembles $(A_i)^y$ qui sont deux à deux disjoints. On a donc

$$\begin{aligned}
\mu\left(A^y\right) &= \sum_{i=1}^{\infty}\mu\left(\left(A_i\right)^y\right) \\
\beta\left(A\right) &= \int\limits_{E_2}\sum_{i=1}^{\infty}\mu\left(\left(A_i\right)^y\right)d\nu \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\int\limits_{E_2}\mu\left(\left(A_i\right)^y\right)d\nu \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\beta\left(A_i\right)
\end{aligned}$$

Par conséquent β est une mesure.

Par ailleurs, on a

$$\left(A\times B\right)^y=\begin{cases} A & \text{si } y\in B \\ \emptyset & \text{si } y\notin B \end{cases}$$

$$\mu\left(\left(A\times B\right)^y\right)=\mu\left(A\right)\chi_B\left(y\right)$$

et donc

$$\beta\left(A\times B\right)=\mu\left(A\right)\int\limits_{E_2}\chi_B d\nu=\mu\left(A\right)\nu\left(B\right)$$

Remarque

La mesure β du théorème précédent est notée $\mu\otimes\nu$

Théorème de FUBINI

Soient $(E_1,\mathcal{F}_1,\mu)$ et $(E_2,\mathcal{F}_2,\nu)$ deux espaces mesurés, les mesures μ et ν étant σ-finies, et soit f une fonction de $E_1\times E_2$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ $\mu\otimes\nu$-intégrable; les fonctions

$$x\longmapsto\int_{E_2}f\left(x,y\right)d\nu\left(y\right)\qquad\text{et}\qquad y\longmapsto\int_{E_1}f\left(x,y\right)d\mu\left(x\right)$$

Sont respectivement μ-intégrable et ϑ-intégrable et on a

$$\begin{aligned}
\int_{E_1\times E_2}fd\mu\otimes\nu &= \int_{E_1}\left(\int_{E_2}f\left(x,y\right)d\nu\left(y\right)\right)d\mu\left(x\right) \\
&= \int_{E_2}\left(\int_{E_1}f\left(x,y\right)d\mu\left(x\right)\right)d\nu\left(y\right)
\end{aligned}$$

Démonstration

Lemme

Soit $A \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ un ensemble mesurable. La fonction $y \mapsto \mu(A^y)$ est une fonction mesurable sur $(E_2, \mathcal{F}_2)$ et la fonction $x \mapsto \nu(A_x)$ est une fonction mesurable sur $(E_1, \mathcal{F}_1)$.

Supposons que $f = 1_A$

Remarquons, tout d'abord, que si $f = 1_A$ alors $f_x = 1_{A_x}$ et $f^y = 1_{A^y}$.

On alors

$$\int_{E_1} f^y d\mu = \int_{E_1} 1_{A^y} d\mu = \mu(A^y)$$

D'après le lemme précédent, la fonction $y \mapsto \mu(A^y)$ est mesurable.

Par définition, nous avons

$$\mu \otimes \nu(A) = \int_{E_1 \times E_2} 1_A d(\mu \otimes \nu)$$

$$\mu \otimes \nu(A) = \int_{E_2} \left(\int_{E_1} 1_{A^y} d\mu \right) d\nu$$

$$\int_{E_2} \left(\int_{E_1} 1_{A^y} d\mu \right) d\nu = \int_{E_2} \mu(A^y) d\nu = \mu \otimes \nu(A)$$

De la même façon, on trouve

$$\int_{E_1} \left(\int_{E_2} 1_{A_x} d\nu \right) d\mu = \int_{E_1} \mu(A_x) d\mu = \mu \otimes \nu(A)$$

Par linéarité, cette assertion est vraie pour les fonctions mesurables étagées positives.

Toute fonction mesurable positive est limite simple d'une suite croissante de fonction mesurable étagées positive. On conclut à l'aide du théorème de la convergence monotone

Remarque 1

Pour appliquer le théorème de FUBINI, il faut vérifier que f est intégrable par rapport à la mesure produit $\mu \otimes \nu$. A cet effet, il faut vérifier que f est mesurable, ce qui, dans les applications, sera toujours le cas, et que $|f|$ est intégrable. Pour vérifier cette dernière propriété il suffira de constater qu'une des trois intégrales

$$\int |f| \, d\mu \otimes \nu \qquad \int d\mu(x) \int |f(x,y)| \, d\nu(y) \qquad \int d\nu(y) \int |f(x,y)| \, d\mu(x)$$

est finie, car ces intégrales (finies ou infinies) sont toujours égales en vertu du théorème de FUBINI appliquée à la fonction positive $|f|$.

Remarque 2

Si $(x,y) \mapsto f(x,y) = g(x)\,h(y)$ est $\mu \otimes \nu$-intégrable on a

$$\int\limits_{E_1 \times E_2} f d\mu \otimes \nu = \left(\int\limits_{E_1} g(x)\, d\mu(x) \right) \left(\int\limits_{E_2} h(y)\, d\nu(y) \right)$$

Remarque 3

Si l'interversion de l'ordre des intégrations conduit à des résultats différents cela prouve, à posteriori, que le théorème de FUBINI n'est pas applicable.

Exemple

$$\begin{aligned} f: \quad & [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x,y) \mapsto f(x,y) = \tfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

n'est pas intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue.

En remarquant que $x \mapsto \frac{-x}{x^2+y^2}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ on trouve

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 f(x,y)\, dx = -\frac{\pi}{4}$$

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x,y)\, dy = \frac{\pi}{4}$$

Par ailleurs, on peut, facilement, vérifier

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 \left| \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \right| dx = +\infty$$

Remarque 4

L'interversion de l'ordre des intégrales peut conduire à des résultats identiques bien que le théorème de FUBINI ne soit pas applicable.

Exemple

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x,y) \mapsto f(x,y) = \sin(x^2+y^2) \end{aligned}$$

$$\int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} \sin\left(x^2+y^2\right) dx = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} \sin\left(x^2+y^2\right) dy = \frac{\pi}{4}$$

Indication:

$$\int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1+i)$$

Alors que

$$\int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} \left|\sin\left(x^2+y^2\right)\right| dx = +\infty$$

Indication.

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi}\int_0^{n\pi} \left|r\sin r^2\right| dr d\theta = \lim_{n\to+\infty} n \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} r\sin r^2 dr d\theta = +\infty$$

Remarque 5

Si les mesures μ et ν ne sont pas σ-finie, le théorème de FUBINI n'est pas applicable

Exemple

Soient μ la mesure de Lebesgue, ν la mesure de décompte et f une fonction définie par

$$\begin{aligned} f: \quad & [0,1]\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x,y) \mapsto f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x \neq y \end{cases} \end{aligned}$$

f est mesurable

$$\int_{[0,1]} f(x,y)\, d\mu(x) = 0$$

$$\int_{[0,1]} f(x,y)\, d\nu(y) = 1$$

On en déduit

$$\int_{[0,1]} d\nu\,(y) \int_{[0,1]} f\,(x,y)\,d\mu\,(x) \neq \int_{[0,1]} \mu\,(x) \int_{[0,1]} f\,(x,y)\,d\nu\,(y)$$

7

Espaces de Lebesgue

7.1 Fonctions convexes

Définition

Une fonction φ définie sur un intervalle $]a,b[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite convexe si $\forall x,y \in]a,b[\,, \forall\lambda \in [0,1]$, on a

$$\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y) \tag{7.1.1}$$

si $-\varphi$ est convexe, φ est dite concave.

Exercice

La relation (7.1.1) est équivalente à l'inégalité

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s} \leq \frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t} \tag{7.1.2}$$

pour $a < s < t < u < b$

Preuve

Montrons que si φ est convexe, alors l'inégalité (**??**) est vraie

Procédons par l'absurde et supposons que

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s} > \frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t}$$

Nous avons

$$\forall t \in]s,u[\,, \exists \lambda \in]0,1[\ \left(\lambda = \frac{t-s}{u-s}\right) : t = s + \lambda (u-s) = \lambda u + (1-\lambda) s$$

donc

$$(1-\lambda)(\varphi(t) - \varphi(s)) > \lambda(\varphi(u) - \varphi(t))$$

et par conséquent

$$\varphi(t) > \lambda\varphi(u) + (1-\lambda)\varphi(s)$$

ou encore

$$\varphi(\lambda u + (1-\lambda) s) > \lambda\varphi(u) + (1-\lambda)\varphi(s)$$

ce qui contredit l'hypothèse

Pour démontrer l'inverse, nous allons encore une fois procéder par l'absurde.. et supposons que φ n'est pas convexe c'est dire

$$\exists s,u \in]a,b[\,, \exists \lambda \in [0,1] : \varphi(\lambda u + (1-\lambda) s) > \lambda\varphi(u) + (1-\lambda)\varphi(s)$$

sans nuire à la généralité, supposons que $s < u$ et posons $t = \lambda u + (1-\lambda) s$, alors

$$\varphi(t) > \frac{t-s}{u-s}\varphi(u) + \frac{u-t}{u-s}\varphi(s)$$

$$\frac{u-t+t-s}{u-s}\varphi(t) > \frac{t-s}{u-s}\varphi(u) + \frac{u-t}{u-s}\varphi(s)$$

$$\frac{u-t}{u-s}\varphi(t) - \frac{u-t}{u-s}\varphi(s) > \frac{t-s}{u-s}\varphi(u) - \frac{t-s}{u-s}\varphi(t)$$

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t-s} > \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u-t}$$

ce qui contredit l'hypothèse.

Proposition 1

Une fonction réelle et différentiable φ est convexe si et seulement si la dérivée φ' est une fonction monotone croissante.

Démonstration

Soit $a < x_1 < x_2 < b$

φ étant convexe, d'après (**??**) et la transitivité de la relation inférieur ou égale, on a pour $a < x_1 < t < x_2 < v < b$

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(x_1)}{t - x_1} \leq \frac{\varphi(v) - \varphi(x_2)}{v - x_2}$$

$$\lim_{t \to x_1} \frac{\varphi(t) - \varphi(x_1)}{t - x_1} < \lim_{v \to x_2} \frac{\varphi(v) - \varphi(x_2)}{v - x_2}$$

$$\varphi^{'}(x_1) \leq \varphi^{'}(x_2)$$

Inversement. Les inverses de toutes les implications précédentes sont vraies, ce qui affirme l'assertion 1

Proposition 2

Si φ est une fonction convexe et ψ est une fonction convexe croissante, alors $\psi \circ \varphi$ est une fonction convexe.

Démonstration

Application directe de la définition de la convexité et de la croissance.

Exemple

Si f est convexe, il en est de même de e^f

Proposition 3

Tout fonction convexe est continue.

Démonstration.

Proposition 4

Si φ est une fonction convexe sur $[a, b]$, alors

$$\forall t \in [a, b], \exists A(t) : \forall y \in [a, b], \varphi(y) - \varphi(t) \geq A(t)(y - t)$$

Démonstration.

Soit
$$A(t) = \sup_{u \in]a,t[} \frac{\varphi(t) - \varphi(u)}{t - u}, a < u < t < b$$

1^{er} cas : si $y \in]a, t[$
$$\frac{\varphi(y) - \varphi(t)}{y - t} \leq A$$

donc
$$\varphi(y) - \varphi(t) \geq A(y - t)$$

$2^{ème}$ cas : si $y \in]t, b[$

Comme φ est convexe, alors
$$\frac{\varphi(t) - \varphi(u)}{t - u} \leq \frac{\varphi(y) - \varphi(t)}{y - t}, \forall u$$

donc
$$\sup_{u \in]a,t[} \frac{\varphi(t) - \varphi(u)}{t - u} \leq \frac{\varphi(y) - \varphi(t)}{y - t}$$

par conséquent
$$\varphi(y) - \varphi(t) \geq A(y - t)$$

Proposition 5

Si φ est convexe et si φ" existe sur $]a, b[$, alors $\varphi"(x) \geq 0, \forall x \in]a, b[$.

Démonstration

D'après la proposition 1, on a

$$\begin{aligned}
x &< y \Longrightarrow \varphi^{'}(x) < \varphi^{'}(y) \\
&\Longrightarrow \varphi^{'}(y) - \varphi^{'}(x) \geq 0 \\
&\Longrightarrow \frac{\varphi^{'}(y) - \varphi^{'}(x)}{y - x} \geq 0 \\
&\Longrightarrow \lim_{y \to x} \frac{\varphi^{'}(y) - \varphi^{'}(x)}{y - x} \geq 0 \\
&\Longrightarrow \varphi"(x) \geq 0
\end{aligned}$$

Exemples de fonctions convexes

$$\begin{array}{lll} 1) & x \longmapsto e^x & x \in \mathbb{R} \\ 2) & x \longmapsto -\log x & x \in \mathbb{R}_+^* \\ 3) & x \longmapsto x \log x & x \in \mathbb{R}_+^* \\ 4) & x \longmapsto x^a & x \in \mathbb{R}_+ \ , a > 1, \ a < 0 \end{array}$$

7.2 Inégalités

1. Inégalité de Young.

Etant donné un nombre réel α appartenant à l'intervalle $]0,1[$. Pour tous a et b appartenant à l'intervalle $[0,+\infty]$, nous avons

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha) b$$

Démonstration

L'inégalité est évidente si a ou b est nul ainsi que si a ou b est infini.

Par ailleurs, comme la fonction $x \mapsto -\log x$ est convexe, alors

$$-\log(\alpha a + (1-\alpha) b) \leq -\alpha \log a - (1-\alpha) \log b$$

Donc

$$\log a^\alpha + \log b^{(1-\alpha)} \leq \log(\alpha a + (1-\alpha) b)$$

D'où le résultat.

2. Inégalité de Jensen.

Soit $(E, \mathcal{F}_1, P)$ un espace probabilisé. Si f est une fonction réelle P-intégrable de E dans $]a,b[$ et φ est une fonction convexe sur $]a,b[$, alors

$$\varphi\left(\int_E f dp\right) \leq \int_E (\varphi \circ f) dp$$

Démonstration.

Comme φ est convexe, alors d'après la proposition 4

$$\forall t \in \mathbb{R}, \exists C(t) : \forall y \in \mathbb{R}, \varphi(y) - \varphi(t) \geq C(t)(y-t)$$

En posant

$$t = \int_E f dp \qquad y = f(x)$$

et en intégrant par rapport à la mesure P, nous avons

$$\int_E (\varphi \circ f)\, dp - \varphi\left(\int_E f dp\right) \geq C(t)\left(\int_E f dp - \int_E f dp\right) = 0$$

Par conséquent

$$\varphi\left(\int_E f dp\right) \leq \int_E (\varphi \circ f)\, dp$$

3. Inégalité de Hölder.

Exposants conjugués.

On dit que les nombres positifs p et q sont des exposants conjugués si $p + q = pq$, ce qui est équivalent à $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Remarque.

Il est clair que $1 < p < +\infty$ et $1 < q < +\infty$. Lorsque p tend vers 1, q tend vers $+\infty$, on convient de dire alors que $(1, +\infty)$ est un couple d'exposants conjugués.

Théorème.

Soit $(E, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, $f$et g étant deux fonctions μ-mesurables définies sur E et à valeurs dans $[0, +\infty]$. on a

$$\int fg d\mu \leq \left(\int f^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int g^q d\mu\right)^{1/q}$$

où p et q sont deux exposants conjugués.

Lorsque $p = q = 2$ cette inégalité porte le nom de Cauchy Schwarz.

Démonstration.

Soient

$$F = \frac{f}{\left(\int f^p d\mu\right)^{1/p}} \quad \text{et} \quad G = \frac{g}{\left(\int g^q d\mu\right)^{1/q}} \tag{7.2.1}$$

Il est clair que

$$\int F^p d\mu = \int G^q d\mu = 1$$

Pour x vérifiant $0 < F(x) < +\infty$ et $0 < G(x) < +\infty$ il existe deux nombres réels t et u tels que

$$F(x) = e^{t/p} \quad \text{et} \quad G(x) = e^{u/q}$$

par exemple ($t = p \log F(x)$ et $u = q \log G(x)$).

La fonction $x \mapsto e^x$ étant convexe et p et q étant des exposants conjugués, alors

$$e^{t/p+u/q} \leq \frac{1}{p}e^t + \frac{1}{q}e^u$$

on en déduit, pour tout $x \in E$

$$F(x)\, G(x) \leq \frac{1}{p}(F(x))^p + \frac{1}{q}(G(x))^q \tag{7.2.2}$$

par conséquent

$$\int F(x)\, G(x)\, d\mu \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

En insérant (7.2.1) dans (7.2.2) on obtient le résultat.

4. Inégalité de Minkowski.

Soit $(E, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, f et g étant deux fonctions μ-mesurables définies sur E et à valeurs dans $[0, +\infty]$, on a

$$\left(\int (f+g)^p\, d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int f^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int g^p d\mu\right)^{1/p}$$

où $1 < p < +\infty$

Démonstration.

Nous avons

$$(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}$$

D'après l'inégalité de Hölder, nous avons pour tout q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\int f(f+g)^{p-1}\, d\mu \leq \left(\int f^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int (f+g)^{q(p-1)}\, d\mu\right)^{1/q}$$

ainsi que

$$\int g(f+g)^{p-1}\, d\mu \leq \left(\int g^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int (f+g)^{q(p-1)}\, d\mu\right)^{1/q}$$

Par conséquent

$$\int (f+g)^p\, d\mu \leq \left[\left(\int f^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int g^p d\mu\right)^{1/p}\right] \left(\int (f+g)^p\, d\mu\right)^{1/q}$$

En divisant les deux termes de cette inégalité par

$$\left(\int (f+g)^p \, d\mu \right)^{1/q}$$

On obtient le résultat.

7.3 Espaces $\mathcal{L}^p \, (1 \leq p \leq +\infty)$

1. Notations

Soient $(\mathbb{E}, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, $\mathbb{F}$ un espace de Banach sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\mathfrak{M}_\mu (\mathbb{E}, \mathbb{F})$ l'espace des applications $\mu-$mesurables de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$.

Pour toute fonction f de $\mathfrak{M}_\mu (\mathbb{E}, \mathbb{F})$ et tout $p \in [1, +\infty]$, posons

$$\begin{array}{rcl} N_p : \ \mathfrak{M}_\mu (\mathbb{E}, \mathbb{F}) & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ f \ \mapsto & N_p (f) = & \begin{cases} \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} & \text{si } p \text{ est fini} \\ \\ \inf \left\{ M : M \in \overline{\mathbb{R}}_+, |f| \leq M \ \mu - \text{p.p} \right\} & \text{si } p \text{ est infini} \end{cases} \end{array}$$

Remarque 1

Dans la définition des espaces $\mathcal{L}^p$, on doit supposer f mesurable. Le fait d'être p intégrable n'entraîne pas l'intégrabilité simple, ni même ma mesurabilié, par exemple, supposons une fonction f égale à 1 sur un ensemble non mesurable A et -1 sur son complémentaire. f n'est pas mesurable, cependant $|f|^2$ égale partout à 1 est de carré intégrable pour toute mesure bornée.

Propriétés

$$\begin{array}{ll} 1) & \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \ N_p (\lambda f) = |\lambda| \, N_p (f) \\ 2) & N_p (f) = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \ \mu - \text{p.p} \\ 3) & \forall f, g \in \mathfrak{M}_\mu (\mathbb{E}, \mathbb{F}) \, ; N_p (f+g) \leq N_p (f) + N_p (g) \end{array}$$

Remarque 2

L'application $f \mapsto N_p (f)$ est une semi-norme et non pas une norme.

Remarque 3

Soit $f \in \mathfrak{M}_\mu(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, $N_\infty(f)$ peut être définie par

$$N_\infty(f) = \inf_{N \in \mathcal{N}} \left(\sup_{x \in E \setminus N} \{|f(x)|\} \right)$$

Où $\mathcal{N}$ est l'ensemble des parties $\mu-$négligeables de $\mathbb{E}$.

Démonstration

Définition

On appelle $\mathcal{L}^p_\mu(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ l'espace vectoriel des fonctions mesurables f tel que $N_p(f) < +\infty$. S'il n'y a pas d'ambiguïté sur $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ et la mesure μ, l'espace $\mathcal{L}^p_\mu(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ est noté tout simplement $\mathcal{L}^p$.

Appellation

Si p est fini, $\mathcal{L}^p$ est appelé espace des fonctions de $p^{ième}$ puissance μ-intégrables

Si $p = +\infty$, $\mathcal{L}^p$ est appelé espace des fonctions μ-essentiellement bornées.

Proposition 1.

Si la mesure μ est bornée, alors

$$\mathcal{L}^p \subset \mathcal{L}^q \text{ si } p > q$$

Démonstration

Soit $f \in \mathcal{L}^p$.

Considérons les deux ensembles mesurables suivants

$$\begin{aligned} &1) \quad A = \{x : |f(x)| \leq 1\} \\ &2) \quad B = \{x : |f(x)| > 1\} \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} &1) \quad f_1 = f.1_A \\ &2) \quad f_2 = f.1_B \end{aligned}$$

Il est clair que f_1 et f_2 sont mesurables, $f_1 + f_2 = f$ et $f_1 f_2 \in \mathcal{L}^p$

Par ailleurs

$f_1 \in \mathcal{L}^q$ car elle est mesurable et bornée et μ est bornée.

$$\forall x \in \mathbb{E}, |f_2(x)|^q \leq |f_2(x)|^p \Longrightarrow f_2 \in \mathcal{L}^q$$

Par conséquent

$$f_1 + f_2 = f \in \mathcal{L}^q \text{ et } \mathcal{L}^p \subset \mathcal{L}^q$$

Proposition 2.

Si μ est la mesure de décompte, alors

$$\mathcal{L}^p \supset \mathcal{L}^q \text{ si } p > q$$

Démonstration

Nous allons utiliser les mêmes notations que celles de la proposition 1.

Soit $f \in \mathcal{L}^q$.

Comme μ est la mesure de décompte, alors

$$f \in \mathcal{L}^q \iff \sum_{x \in \mathbb{E}} |f(x)|^q < +\infty$$

$$\sum_{x \in \mathbb{E}} |f(x)|^q < +\infty \Longrightarrow cardB < +\infty$$

Par conséquent

$$\sum_{x \in B} |f(x)|^p < +\infty$$

Par ailleurs

$\forall x \in \mathbb{E} \backslash B, |f(x)| \leq 1$

$$\sum_{x \in \mathbb{E} \backslash B} |f(x)|^p \leq \sum_{x \in \mathbb{E} \backslash B} |f(x)|^q + \infty$$

$$\sum_{x \in \mathbb{E}} |f(x)|^p = \sum_{x \in b} |f(x)|^p + \sum_{x \in \mathbb{E} \backslash B} |f(x)|^p < +\infty$$

et donc $f \in \mathcal{L}^p$

et par conséquent

$$\mathcal{L}^p \supset \mathcal{L}^q$$

Remarque

Sans conditions supplémentaires, il n'y a pas de relation d'inclusion entre deux espaces $\mathcal{L}^p$ d'indices p différents.

Ainsi, dans le cas où μ est la mesure de Lebesgue sur $]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)} \in \mathcal{L}^1$ mais pas dans $\mathcal{L}^2$ tandis que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)}$ est dans $\mathcal{L}^2$ mais pas dans $\mathcal{L}^1$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)} = 2\arctan\sqrt{x}\,\Big|_0^{+\infty} = \pi$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x\,(1+x)^2} = \left(\log x + \frac{1}{1+x} - \log(1+x)\right)\Big|_0^{+\infty} = +\infty$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)^2} = -\frac{1}{1+x}\,\Big|_0^{+\infty} = 1$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x} = \log(1+x)\,\Big|_0^{+\infty} = +\infty$$

Autre exemple

La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \in \mathcal{L}^2$ et non à $\mathcal{L}^1$

La fonction $x \mapsto \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{|x|}} \in \mathcal{L}^1$ et non à $\mathcal{L}^2$

7.4 Espaces $L^p\,(1 \le p \le +\infty)$

On définit sur $\mathcal{L}^p$ une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ en posant

$$f\,\mathcal{R}\,g \Longleftrightarrow N_p(f-g) = 0 \quad \mu\text{-}p.p$$

Définition

On appelle espace $L^p_\mu(\mathbb{E},\mathbb{F})$ l'espace quotient $\mathcal{L}^p_\mu(\mathbb{E},\mathbb{F}) \diagup \mathcal{R}$

Remarque

L'espace L^p est donc un espace de classes de fonctions

$$N_p = \|.\|_p : \begin{array}{l} L^p \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \dot{f} \mapsto N_p(f) = \|f\|_p \end{array}$$

Théorème de Reisz-Fischer

L'espace vectoriel normé L^p est complet pour $1 \leq p \leq +\infty$

Démonstration

On démontre que toute suite de Cauchy d'éléments de L^p converge vers un élément de L^p.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans L^p . Il existe une sous suite $(f_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ $n_1 < n_2 < ...$ telle que

$$N_p\left(f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right) = \left\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right\| < \frac{1}{2^i}, i = 1, 2, ... \tag{7.4.1}$$

1) Montrons que la suite $(f_{n_i}(x))_{i\in\mathbb{N}}$ converge pour tout x vers une fonction $f(x)$.

Soit

$$g_k(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^{k} \left|f_{n_i}(x) - f_{n_{i-1}}(x)\right|$$

Ainsi définie, la suite $(g_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de nombres positifs.

Par ailleurs, l'inégalité de Minkowski donne

$$\begin{aligned} \left(\int g_k^p d\mu\right)^{1/p} &= \left(\int \left(f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^{k} \left|f_{n_i}(x) - f_{n_{i-1}}(x)\right|\right)^p\right)^{1/p} \\ &\leq \|f_{n_1}\| + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} \leq \|f_{n_1}\| + 1 \end{aligned}$$

D'après le théorème de la convergence monotone dans L^p, la suite $(g_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ converge à la fois μ-presque partout et au sens de la norme N_p vers un élément g de L^p.

Il en résulte que la série

$$f_{n_1}(x) + (f_{n_2}(x) - f_{n_1}(x)) + \cdots$$

converge presque partout vers $f(x)$.

Il est clair que la somme partielle de la série précédente est égale à f_{n_k}

$$\lim_{k\to+\infty} f_{n_k}(x) = f(x) \qquad p.p.$$

Or on sait que si une suite de Cauchy contient une sous suite convergeant vers une certaine limite, elle même converge vers cette limite. Donc

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$$

Appelons sa somme $f(x)$ quand elle converge et posons $f(x) = 0$ sur l'ensemble restant qui est de mesure nulle.

Nous avons trouvé une fonction f qui est limite simple presque partout de $(f_{n_i})_i$.

Il faut maintenant montrer que cette fonction est limite de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ au sens de L^p

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, n, m > N \Rightarrow \|f_n - f_m\| < \varepsilon$$

Pour $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$

$$\exists n_k \in \mathbb{N} : n > n_k \Rightarrow \|f_n - f_{n_k}\| < \frac{1}{\varepsilon^k}$$

Si $n_k > n_l \qquad n > n_l$, nous aurons

$$\|f_n - f_{n_k}\| \leq \|f_n - f_{n_l}\| + \|f_{n_l} - f_n\| \leq \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^l} = \frac{1}{2^{l-1}}$$

c'est à dire

$$\int_E \left|f_{n_{i-1}} - f_{n_i}\right|^p d\mu \leq \left(\frac{1}{2^{l-1}}\right)^p$$

Nous savons

$$\lim_{k \to +\infty} f_{n_k} = f \qquad p.p. \Rightarrow |f_{n_k} - f_n|^p \to |f - f_n|^p \qquad p.p$$

alors d'après le lemme de Fatou

$$\int_E \left|f_{n_{i-1}} - f_{n_i}\right|^p d\mu \leq \left(\frac{1}{2^{l-1}}\right)^p$$

ce qui veut dire que

$$\left(\int_E \left|f_{n_{i-1}} - f_{n_i}\right|^p d\mu\right)^{1/p} \leq \frac{1}{2^{l-1}}$$

et donc $f - f_n \in L^p$ et par conséquent $f \in L^{p\cdot}$

Remarque

L^2 est l'unique espace de Hilbert de la famille des espaces de Banach, $1 \leq p \leq +\infty$

$$\begin{array}{ccc} L^2 \times L^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (f,g) & \longmapsto & \langle f,g\rangle = \int\limits_E fg d\mu \end{array}$$

est un produit scalaire

$$\begin{array}{ll} 1) & \langle f, g_1 + g_2\rangle = \langle f, g_1\rangle + \langle f, g_2\rangle \\ 2) & \langle f, \lambda g\rangle = \overline{\lambda}\langle f, g\rangle \\ 3) & \langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle} \\ 4) & \langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0 \end{array}$$

Nous savons qu'un espace normé E est préhilbertien si, et seulement si, sa norme satisfait l'identité du parallèlogramme.

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2$$

L^1 n'est pas un hilbertien

$$x \mapsto f(x) = 1 \qquad x \mapsto g(x) = \sin x$$

$$\begin{aligned} \|f+g\| &= \int_0^{2\pi} |1+\sin x|\, dx = 2\pi \\ \|f-g\| &= \int_0^{2\pi} |1-\sin x|\, dx = 2\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|f\| &= \int_0^{2\pi} 2dx = 4\pi \\ \|g\| &= \int_0^{2\pi} |\sin x|\, dx = 4 \end{aligned}$$

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 8\pi^2 \neq 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2 = 8\pi^2 + 16$$

Définition

Une suite convergente dans L^p, $1 \leq p \leq +\infty$ est aussi dite convergente en moyenne d'ordre p et en moyenne quadratique dans le cas $p = 2$.

Théorème de densité

Soit $(\mathbb{E}, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions étagées définies sur cet espace, telles que

$$\forall f \in \mathcal{E}, \quad \mu\left(\{x : f(x) \neq 0\}\right) < +\infty$$

est dense dans L^p si $1 \leq p < +\infty$.

Démonstration

Remarquons tout d'abord, que $\mathcal{E} \subset L^p$.

Soit $f \in L^p$

f étant mesurable, il existe une suite de fonctions étagées (f est limite d'une suite de fonctions étagées)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{E}$, posons

$$g_n(x) \begin{cases} f_n(x) & \text{si } |f_n(x)| \leq 2|f(x)| \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi définie la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est étagée et $g_n \in L^p$.

$$|g_n| \leq 2|f|$$

comme $f \in L^p$ g_n aussi.

D'après le TCD $g_n \longrightarrow f \qquad p.p$

D'après TCD

$$\lim_{n\to+\infty} N_p(f - g_n) = 0$$

d'où le résultat.

Fonction à support compact

On appelle support d'une fonction f de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{R}$, et on le note $\operatorname{supp} f$, l'adhérence de l'ensemble des $x \in \mathbb{E}$ tels que $f(x) \neq 0$.

Corollaire 1.

L'espace vectoriel $C_c^0(\mathbb{R})$ des fonctions continues à support borné sur $\mathbb{R}$ est dense dans L^p.

Remarque 7.4.1 *Remarque 2.*

Les résultats précédents ne sont valable que pour $1 \leq p < +\infty$. Ainsi, par exemple, la fonction constante $x \mapsto 1$ qui appartient à L^∞ n'appartient pas à l'adhérence de $C_c^0(\mathbb{R})$.

Remarque 7.4.2 *Remarque 2.*

Si $1 \leq p < +\infty$ l'espace $L^p(\mathbb{R})$ est le complété de l'espace $C_c^0(\mathbb{R})$ pour la norme $f \mapsto \|f\|_p$.

Pour $p = +\infty$ il n'en est pas ainsi. Le complété de $C_c^0(\mathbb{R})$ n'est pas $L^\infty(\mathbb{R})$, mais $C_0^0(\mathbb{R})$ des fonctions continues qui s'annulent à l'infini.

(Une fonction f de E dans R ou C s'annule à l'infini si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K \text{ (compact de } \mathbb{R}) : \forall x \in K, |f(x)| < \varepsilon$$

Pour une meilleure compréhension de ce cours et approfondir les connaissances nous conseillons les auteurs et ouvrages suivants:

Bibliographie

[1] El Kacimi Alaoui A.: Eléments d'intégration et d'analyse fonctionnelle, Ellipses,1999.

[2] Genet J. : Mesure et intégration: théorie élémentaire,Vuibert université,1976.

[3] Métivier M. : Notions fondamentalesde la théorie des probabilités, Dunod, 1972.

[4] Vo Khac K.: Mesure, intégration, convolution et analyse de Fourier, Ellipses,1984.