Université de A/MIRA de Béjaia — Année universitaire : 2024/2025
Faculté de Thechnologie — MATHS 1 — Octobre 2024
Département de Technologie 1ère année

Série de TD N°01 : Logique et raisonnement mathématiques

Exercice n°1 . Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Donner leurs négations

1) $(3 \;\; divise \;\; 12) \wedge (\sqrt{a^2} = |a|)$;
2) $(26 \leq 3^2 + (-1)^2) \vee (2^3 = 9)$;
3) $\forall x \in \mathbb{R}^*, \dfrac{1}{x} \leq 1$;
4) $\exists x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R}^*; xy = 1$;
5) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}; x + 1 = y + 2$;
6) $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}; x + y > 0$.

Exercice n°2 . Soient P, Q et R trois propositions.

1. En utilisant la table de vérité, montrer que :

$$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}).$$

2. Donner la négation des propositions suivantes :
   a. $P \Longrightarrow Q$.

   b. $P \vee (Q \wedge R)$.

Exercice n°3 .

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. En utilisant le raisonnement direct, montrer que :

$$(x^2 - xy - 2y^2 = 0) \Longrightarrow (x = 2y).$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer par l'absurde que :

$$\frac{6n+3}{(n+2)^2} \leq 1.$$

3. Montrer par contraposition les deux propositions suivantes :
   a. Soient $x, y \in \mathbb{R}^*$, montrer que : $\left(x \neq -\dfrac{1}{3} \text{ et } y \neq 7\right) \Longrightarrow (3xy - 21x + y + 3 \neq 10)$.
   b. Soient a, b deux réels tel que $a \neq -3b$. Montrer que : $\left(a \neq -\dfrac{14b}{3}\right) \Longrightarrow \left(\dfrac{2a+b}{a+3b} \neq 5\right)$.
4. On considère la proposition

$$R : \left(\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \in \mathbb{Q} \Longrightarrow x \in \mathbb{Q}\right).$$

   a. Donner la négation de R.
   b. Déduire, par le raisonnement par un contre exemple, que R est fausse.

Exercice n°4 . En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ divisible par 17.