

Série de TD n°01 d'Algèbre1
La théorie des ensembles et les relations binaires

Exercice 1.

1. On considère les ensembles :

$$B = \{x \in \mathbb{Z} / |x| < 3\}, E = \{x \in \mathbb{Z} / -5 < x \leq 5\} \quad \text{et} \quad A = E \cap \mathbb{N}^*.$$

Déterminer les ensembles suivants :

$$A \cap B, \quad \mathcal{C}_E^{(A \cup B)}, A - B \text{ et } (A \cap B) \cap \mathcal{C}_E^{(A \cap B)}.$$

2. Soient E un ensemble non vide et A, B, C et D quatre parties de E . Montrer que

a. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset C_E B$.

b. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

c. $A \cap (B - C) = (A \cap B) \cap (A - C)$;

3. Soit $E = \{-1, 0, 1, 2\}$.

a) Donner l'ensemble $E \times E$.

b) Déterminer les ensembles $A = \{(i, j) \in E \times E / i < j\}$, $B = \{(i, j) \in E \times E / i > j\}$ et $C = \{(i, j) \in E \times E / i = j\}$.

c) Montrer que A, B et C forment une partition de $E \times E$.

Exercice 2.

Soit $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, et R la relation binaire définie sur E par :

xRy si et seulement si $x + y$ est pair.

1. Dessiner le graphe représentatif de R .

2. montrer que R est une relation d'équivalence sur E .

3. Déterminer la classe de 0, et l'ensemble quotient E/R .

Exercice 3.

Dans $\mathbb{R}$ on définit la relation binaire $\mathcal{T}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x\mathcal{T}y \iff \cos^2 x + \sin^2 y = 1$$

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une relation d'équivalence.

2. Déterminer la classe d'équivalence de $\frac{\pi}{6}$.

Exercice 4.

1) Dans $\mathbb{R}$, on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \iff x^2 - y^2 \leq x - y.$$

Montrer que :

a) $\mathcal{R}$ n'est pas symétrique.

b) $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique.

2) On définit sur $] \frac{1}{2}, +\infty[$ la relation binaire $\mathcal{S}$ par :

$$\forall x, y \in] \frac{1}{2}, +\infty[, x\mathcal{S}y \iff x^2 - y^2 \leq x - y.$$

a) Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre.

b) Cet ordre est-il total ?

Exercice 5.

On définit sur $\mathbb{N}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{N} : x\mathcal{R}y \iff \exists n, m \in \mathbb{N}^* : y = nx^m.$$

1. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.

2. Cet ordre est-il total ?.