Exo 1

TD 1 ingénieur

1) Les dimensions et les unités des grandeurs physiques.
Pour trouver la dimension de la pression

on a : $P = \frac{F}{S}$ ← force, ← Surface, ↑ pression

la force $F = ma$.

l'accélération $a = \frac{dv}{dt}$.

la vitesse $v = \frac{dx}{dt}$.

1) $[x] = [L]$

2) $[v] = \frac{[L]}{[T]}$

3) $[a] = \frac{[V]}{[T]} = \frac{\frac{[L]}{[T]}}{[T]} = \frac{[L]}{[T][T]} = \frac{[L]}{[T]^2}$.

$F = [M] \cdot \frac{[L]}{[T]^2}$

donc : $P = \frac{[M] \cdot [L] / [T]^2}{[L]^2} = \frac{[M] \cdot [L]}{[T]^2 \cdot [L]^2}$

$[P] = \frac{[M]}{[T]^2 \cdot [L]} \Rightarrow \boxed{[P] = M T^{-2} \cdot L^{-1}}$

Unité $\boxed{Kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}}$ (pascal (Pa))

Energie cinétique $E_c = \frac{1}{2} m v^2$

$$[E] = \frac{1}{2}[M] \cdot \frac{[L]^2}{[T]^2} = \frac{1}{2} M L^2 T^{-2}$$

$$\frac{1}{2} \, kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} = \text{Joule}.$$

~~Pui~~ <u>puissance</u> $P = \frac{W}{t} = \frac{E}{t}$.

$$P = \frac{M L^2 T^{-2}}{T} = M L^2 T^{-3}$$

$kg \, m^2 s^{-3}$ (Watt).

2) La formule de Stokes $F = 6\pi a \eta v$.

$$\eta = \frac{[F]}{[6][\pi][a][V]} = \frac{M L T^{-2}}{L L T^{-1}} = M L^{-1} T^{-1}.$$

$$\eta = 0{,}010 \, g \cdot cm^{-1} s^{-1} = 0{,}010 (10^{-3} kg) \cdot (10^{-2} m)^{-1} s^{-1}$$

$$\simeq 0{,}0010 \, kg \cdot m^{-1} s^{-1}.$$

3) ~~la~~ la formule homogene est $v = \sqrt{2gh}$.

4) une grandeur physique G.

mais $\frac{d^2G}{dt^2} + B \frac{dG}{dt} + 4\pi^2 \alpha^2 G = 0$.

Les dimension et les unités dans le sys (SI) des grandeurs α et B.

$$\left[\frac{d^2G}{dt^2}\right] = \left[B\frac{dG}{dt}\right] = \left[4\pi^2\alpha^2 G\right].$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2G}{dt^2} = \dfrac{[G]}{[t]^2} = \dfrac{[G]}{[T]^2} \\ \left[\beta\dfrac{dG}{dt}\right] = [B]\left[\dfrac{dG}{dt}\right] = [B]\dfrac{[G]}{[t]} \end{cases}$$

$$[4\pi^2\alpha^2 G] = [\alpha]^2[G].$$

Alors: $\dfrac{d^2G}{dt^2} = \left[B\dfrac{dG}{dt}\right] = \cancel{[B]\dfrac{[G]}{[t]}} = \cancel{[B]\dfrac{[G]}{[t]}}$

$$\frac{[G]}{[t]^2} = [B]\frac{[G]}{[t]}.$$

$[B] = \dfrac{1}{[t]} = T^{-1}$ Unité s^{-1}.

$$\left[\frac{d^2G}{dt^2}\right] = [4\pi^2\alpha^2 G] \rightarrow \frac{[G]}{[t^2]} = [\alpha^2][G]$$

$\rightarrow [\alpha] = \dfrac{1}{[t]} = T^{-1}$ Unité s^{-1}.

5-1 $G = \dfrac{[F][r]^2}{[M][m]} = \dfrac{MLT^{-2}L^2}{M^2} = M^{-1}L^3L^{-2}$

Unité $kg^{-1}.m^3.s^{-2}$.

5-2 la 3ème loi de Kepler $\dfrac{T^\alpha}{R^\beta} = \dfrac{4\pi^2}{GM}$.

...vitation → G ; la masse de la terre → M ; la masse de la satelit → m ; la distance → r

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

$$\frac{T^{\alpha}}{R^{B}} = \frac{1}{[G][M]} \Rightarrow \cancel{\frac{T^{\alpha}}{R^{B}} = \frac{4\pi^2}{GM}},$$

$$\frac{T^{\alpha}}{R^{B}} = \frac{1}{M^{-1}L^{3}T^{-2}.M}.$$

$$T^{\alpha}.L^{-B} = L^{-3}T^{2}.$$

Alors $\begin{cases} \boxed{\alpha = 2} \\ -B = -3 \Rightarrow \boxed{B = 3} \end{cases}$

$$f = k\,R^{\alpha}\rho^{b}G^{c} \rightarrow [f] = [R]^{\alpha}[\rho]^{b}[G]^{c}.$$

la masse Volumique d'etoile $\frac{m}{V} = \frac{[M]}{[L]^{3}}$.

Alors $\begin{cases} [\rho]^{b} = \frac{[M]^{b}}{[L]^{3b}} \\ [R]^{a} = [L]^{a} \\ [G]^{c} = [M^{-1}L^{3}T^{-2}]^{c}. \end{cases}$

La frequence $[f] = \frac{1}{[T]}$.

on remplace tout on trouve :

$$T^{-1} = L^{a-3b+3c}\,M^{b-c}\,T^{-2c} \quad \begin{cases} a-3b+3c = 0 \\ b-c = 0 \\ -2c = -1. \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{2} \\ b = c = \frac{1}{2} \\ a = 3(b-c) = 0 \end{cases} \longrightarrow f = k\sqrt{\rho G}$$

Exo2 :

ona : $\begin{cases} \vec{V_1} = 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k} \\ \vec{V_2} = -3\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} - \frac{15}{2}\vec{k} \\ \vec{V_3} = -5\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}. \end{cases}$

1) $\vec{V_1} - 2\vec{V_2} + 3\vec{V_3} = -7\vec{i} + 8\vec{j} + 23\vec{k}$.

2) $\|\vec{V_1}\| = \sqrt{30}$; $\|\vec{V_2}\| = \frac{\sqrt{261}}{2}$; $\|\vec{V_3}\| = \sqrt{42}$

$$\vec{U_1} = \frac{\vec{V_1}}{\|\vec{V_1}\|} = \frac{2}{\sqrt{30}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{30}}\vec{j} + \frac{5}{\sqrt{30}}\vec{k}.$$

$$\vec{V_2} = \frac{\vec{V_2}}{\|\vec{V_2}\|} = -\frac{6}{\sqrt{261}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{261}}\vec{j} - \frac{15}{\sqrt{261}}\vec{k}.$$

$$\vec{V_3} = \frac{\vec{V_3}}{\|\vec{V_3}\|} = -\frac{5}{\sqrt{42}}\vec{i} + \frac{4}{\sqrt{42}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{42}}\vec{k}.$$

3)- $\cos\alpha = \frac{V_{1x}}{\|\vec{V_1}\|} = \frac{\vec{V_1}\cdot\vec{i}}{\|\vec{V_1}\|} = \frac{2}{\sqrt{30}}$

$\cos\beta = \frac{V_{1y}}{\|\vec{V_1}\|} = \frac{\vec{V_1}\cdot\vec{j}}{\|\vec{V_1}\|} = -\frac{1}{\sqrt{30}}$

$\cos\gamma = \frac{V_{1z}}{\|\vec{V_1}\|} = \frac{\vec{V_1}\cdot\vec{k}}{\|\vec{V_1}\|} = \frac{5}{\sqrt{30}}$.

4) calculer $\underbrace{\vec{V_1} \cdot \vec{V_2}}_{\text{prod scalair}}$ et $\underbrace{\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}}_{\text{produit Vectoriel}}$.

$$\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & \frac{3}{2} \\ 5 & -\frac{15}{2} \end{pmatrix}$$

$$= (2)(-3) + (-1)\left(\frac{3}{2}\right) + (5)\left(-\frac{15}{2}\right).$$

$$= \frac{-6 \times 2}{2} - \frac{3}{2} + -\frac{75}{2}$$

$$= \frac{-12 - 3 - 75}{2} = -45.$$

$$\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 5 \\ -3 & \frac{3}{2} & -\frac{15}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ \frac{3}{2} & -\frac{15}{2} \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -\frac{15}{2} \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & \frac{3}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\left((-1)\left(-\frac{15}{2}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)(5)\right) - \vec{j}\left((2)\left(-\frac{15}{2}\right) - (-3)(5)\right)$$

$$+ \vec{k}\left((2)\left(\frac{3}{2}\right) - (-3)(-1)\right)$$

$= \vec{i}\left(\frac{15}{2} - \frac{15}{2}\right) - \vec{j}\left(-15+15\right) + \vec{k}\left(3-3\right) = \vec{0}$.

5) sans faire la représentation graphique le produit vectoriel étant nul $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ son colinéaires comme leur produit scalaire est négatif, ils sont de son opposés.

6) calculer les produit suivant $\vec{V_1}\cdot(\vec{V_2}\wedge\vec{V_3})$

$\vec{V_1}\wedge(\vec{V_2}\wedge\vec{V_3})$

calcule $\vec{V_1}\cdot(\vec{V_2}\wedge\vec{V_3})$.

$$\vec{V_2}\wedge\vec{V_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & \frac{3}{2} & \frac{-15}{2} \\ -5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{i}\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{15}{2} \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -3 & -\frac{15}{2} \\ -5 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -3 & \frac{3}{2} \\ -5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\vec{i}\left(\frac{3}{2} + \frac{4\times15}{2}\right) - \vec{j}\left(-3 - \frac{5\times15}{2}\right)$$

$$\vec{k}\left(-3\times4 + \frac{5\times3}{2}\right)$$

$$\vec{i}\left(\frac{3}{2} + \frac{60}{2}\right) - \vec{j}\left(\frac{-3\times2}{2} - \frac{75}{2}\right)$$

$$+\vec{k}\left(\frac{-12\times2}{2} + \frac{15}{2}\right)$$

$$= \vec{i}\left(\frac{63}{2}\right) - \vec{j}\left(-\frac{6-75}{2}\right) + \vec{k}\left(\frac{-24+15}{2}\right)$$

$$\boxed{\frac{63}{2}\vec{i} + \frac{81}{2}\vec{j} \cancel{+} \frac{9}{2}\vec{k}}$$

on prend $\vec{w} = (\vec{V_2}\wedge\vec{V_3})$.

$$\boxed{\vec{w} = \frac{63}{2}\vec{i} - \frac{81}{2}\vec{j} - \frac{9}{2}\vec{k}}$$

on calcule: $\vec{V_1}\cdot\vec{w}$.

$$\vec{V_1}\cdot\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{63}{2} \\ +\frac{81}{2} \\ -\frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

$$= 63 \cancel{+} \frac{81}{2} - \frac{5\times9}{2}$$

$$= \frac{63\times2 \cancel{+} 81 - 45}{2}$$

$$= \frac{126 \cancel{+} 81 - 45}{2} = 0$$

on calcule $\vec{V_1} \wedge (\underbrace{\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}}_{\vec{W}})$ $\vec{W}$ déja calculer.

$$\vec{V_1} \wedge \vec{W} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 5 \\ \frac{63}{2} & \frac{81}{2} & -\frac{9}{2} \end{vmatrix}.$$

$$\vec{V_1} \wedge \vec{W} = \vec{i} \left| (-1(-\tfrac{9}{2}) - \tfrac{81}{2} \times 5 \right| - \vec{j} \left| \cancel{2}(\tfrac{-9}{\cancel{2}}) - \tfrac{63}{2} \times 5 \right|$$

$$+ \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ \frac{63}{2} & \frac{81}{2} \end{vmatrix}$$

$$\vec{V_1} \wedge \vec{W} = \vec{i}\left(\frac{9}{2} - \frac{405}{2}\right) - \vec{j}\left(-\frac{9 \times 2}{1 \times 2} - \frac{315}{2}\right) + \vec{k}\left(\frac{2 \times 81}{2} + \frac{63}{2}\right)$$

$$\vec{V_1} \wedge \vec{W} = \vec{i}\left(\frac{9-405}{2}\right) - \vec{j}\left(-\frac{18-315}{2}\right) + \vec{k}\left(\frac{162+63}{2}\right)$$

$$\vec{V_1} \wedge \vec{W} = \left(\frac{-396}{2}\right)\vec{i} + \left(\frac{333}{2}\right)\vec{j} + \frac{225}{2}\vec{k}.$$

$$\boxed{\vec{V_1} \wedge \vec{W} = -198\vec{i} + \frac{333}{2}\vec{j} + \frac{225}{2}\vec{k}.}$$

7) Determiner la surface du triangle formé par les vecteurs $\vec{V_2}$ et $\vec{V_3}$ et le volume du parrallélepipède dont les côtés sont formé par les vecteurs $\vec{V_1}$. $\vec{V_2}$ et $\vec{V_3}$.

$$S = \frac{1}{2} \| \vec{V_2} \wedge \vec{V_3} \| = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{10611}}{2}$$

$\boxed{S \simeq 25{,}71\ U.S}$

<u>Exo 3</u> :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \begin{array}{l} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{array}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6-3 \\ 8-4 \\ 3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k}$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 7^2} = \sqrt{74}$$

les angles directeurs $(\alpha . \beta . \gamma)$.

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x_B - x_A}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \dfrac{3}{\sqrt{74}} \\ \cos\beta = \dfrac{y_B - y_A}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \dfrac{4}{\sqrt{74}} \\ \cos\gamma = \dfrac{z_B - z_A}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \dfrac{7}{\sqrt{74}} \end{cases}$$

<u>donc</u> : $\alpha = 69{,}3°$ $\beta = 62{,}4°$. $\gamma = 35{,}3°$.

Son sens

comme le produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec les trois vecteurs unitaire est positif alors, il a un sens positif suivant les trois axes du repère.

Exo4 :

$$\begin{cases} \vec{u} = 2\vec{i} + 6\vec{k} \\ \vec{V} = 8\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ \vec{W} = 3\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k} \end{cases}$$

$$\vec{S} = -2\vec{i} + y\vec{j} + 12\vec{k}$$

1) Determiner y et z.

$$\vec{u} \wedge \vec{V} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 24 \end{cases}$$

2) Déterminer la valeurs y.

$$\vec{W} \cdot \vec{S} = 0 \rightarrow y = \frac{9}{2}$$

Exo5

le vecteur ~~unitaire~~ $\vec{V}$ peut s'ecrire

$$\vec{V} = \vec{V_n} + \vec{V_\pi} \quad (\vec{V_n} \perp (\pi) \cdot \vec{V_\pi} \parallel (\pi))$$

Le vecteur $\vec{n}$ est perpendiculaire au plan (π) et par conséquent aux vecteur $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

$\vec{n} \cdot \vec{AB} = \vec{n} \cdot \vec{AC} = \vec{n} \cdot \vec{BC} = \vec{0}$.

Nous avons :
$$\begin{cases} \vec{AB} = -2\vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k} \\ \vec{AC} = -\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k} \\ \vec{BC} = \vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}. \end{cases}$$

Soit $\vec{W} = \vec{AB} \wedge \vec{AC} = -15\vec{i} + 5\vec{k}$.

Le vecteur $\vec{W}$ est perpendiculaire au deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ donc aussi au vecteur $\vec{BC}$., alors il est perpendiculaire au plan (π) formé par ces trois vecteurs. On déduit le vecteur unitaire normal au plan (π) par :

$$\vec{n} = \frac{\vec{W}}{\|\vec{W}\|} = -\frac{3}{\sqrt{10}}\vec{i} + \frac{1}{10}\vec{k}.$$

La composante du vecteur $\vec{V}$ suivant la normale au plan s'écrit : $\vec{V_n} = (\vec{V_n} \cdot \vec{n})\vec{n} = \frac{39}{10}\vec{i} - \frac{13}{10}\vec{k}$

la composante dans le plan de ce vecteur se déduit comme suit.

$$\vec{V_\pi} = \vec{V} - \vec{V}_n = -\frac{9}{10}\vec{i} + \vec{j} - \frac{27}{10}\vec{k}.$$

Exo6 :

$$\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})+\vec{w}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})+\vec{v}\wedge(\vec{w}\wedge\vec{u})=\vec{0}$$

On utilise la formule de développant du double produit vectoriel :

$$\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})=(\vec{u}.\vec{w})\vec{v}-(\vec{u}.\vec{v})\vec{w} \quad \text{--- (1)}$$

$$\vec{w}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})=(\vec{w}.\vec{v})\vec{u}-(\vec{w}.\vec{u})\vec{v} \quad \text{--- (2)}$$

$$\vec{v}\wedge(\vec{w}\wedge\vec{u})=(\vec{v}.\vec{u})\vec{w}-(\vec{v}.\vec{w})\vec{u} \quad \text{--- (3)}$$

$$(1)+(2)+(3)=\vec{0}.$$

Exo7 :

Soient les vecteurs suivant.

$$\begin{cases} \vec{r}(t)=(2t)\vec{i}+(5t^2)\vec{j}-(7t^3)\vec{k} \\ \vec{v}(t)=(-4t^3)\vec{i}+(10t^2)\vec{j}-(2t)\vec{k} \end{cases}$$

calculer les quantité suivante :

$$2\vec{r}(t)-3\vec{v}(t)=(4t+12t^3)\vec{i}-(20t^2)\vec{j}+(6t-14t^3)\vec{k}$$

$$\|\vec{r}\| = t\sqrt{4+25t^2+49t^4}$$

$$\vec{r}(t)\cdot\vec{v}(t) = 56t^4.$$

$$\vec{r}(t)\wedge\vec{v}(t) = (-10t^3+70t^5)\vec{i} + (28t^6-4t^2)\vec{j}$$
$$+(20t^3+20t^5)\vec{k}$$

* $\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt} = 2\vec{i} + 10t\vec{j} - 21t^2\vec{k}$

* $\dfrac{d\vec{v}(t)}{dt} = (-12t^2)\vec{i} + 10t\vec{j} - 2\vec{k}.$

* $\dfrac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = 10\vec{j} - 63t\vec{k}.$

* $\dfrac{d^2\vec{v}(t)}{dt^2} = -24t\,\vec{i} + 10\vec{j}.$

Exo 8:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

* $\overrightarrow{grad}(r) = \dfrac{\vec{r}}{r}$

* $\overrightarrow{grad}\left(\dfrac{1}{r}\right) = -\dfrac{\vec{r}}{r^3}$

$div(\vec{r}) = 3$

$\overrightarrow{rot}(\vec{r}) = \vec{0}$

$\Delta\left(\dfrac{1}{r}\right) = 0$

5) $\overrightarrow{grad}\, U(r) = \dfrac{\partial V}{\partial r}\left(\dfrac{\vec{r}}{r}\right)$.

6) $\vec{E}(\vec{r}) = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$.

$$\begin{cases} E_x = k \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ E_y = k \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ E_z = k \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{cases}$$

$$\vec{rot}(\vec{E}(r)) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\vec{j}$$

$$+ \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)=-\frac{\frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2}+\frac{\frac{zy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2}=0$$

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)=-\frac{\frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2}+\frac{\frac{zx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2}=0$$

$$\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)=-\frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2}+\frac{\frac{yx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2}=0$$

donc $\overrightarrow{rot}\left(\vec{E}(\vec{r})\right)=\vec{0}$.

<u>Exo 9</u> : $\begin{cases}\rho=\|\overrightarrow{OM}\| \\ \theta=(\vec{i},\overrightarrow{OM})\end{cases}$.

1) $\begin{cases}x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ $\qquad\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}\end{cases}$.

2) $\begin{cases}\vec{e}_\rho=\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j} \\ \vec{e}_\theta=-\sin\theta\,\vec{i}+\cos\theta\,\vec{j}\end{cases}$.

3) $\dfrac{d\vec{e}_\rho}{d\theta}=-\sin\theta\,\vec{i}+\cos\theta\,\vec{j}=\vec{e}_\theta$.

$$\frac{d\vec{e_\theta}}{d\theta} = -\cos\theta\,\vec{i} - \cos\theta\,\vec{j} = -\vec{e_\rho}.$$

4) $\vec{OM}(t) = r(t)\vec{e_\rho}(t).$

$$\frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e_\rho} + r\frac{d\vec{e_\rho}}{dt}$$

$$= \frac{dr}{dt}\vec{e_\rho} + r\frac{d\vec{e_\rho}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$$= \frac{dr}{dt}\vec{e_\rho} + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e_\theta}.$$

$$\left\|\frac{d\vec{OM}}{dt}\right\| = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}$$

$$\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right) = \frac{d^2r}{dt^2}\vec{e_\rho} + \frac{dr}{dt}\frac{d\vec{e_\rho}}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{e_\theta}$$

$$+ r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{e_\theta} + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{e_\theta}}{dt}$$

$$= \frac{d^2r}{dt^2}\vec{e_\rho} + \frac{dr}{dt}\frac{d\vec{e_\rho}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{e_\theta} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{e_\theta}$$

$$+ r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{e_\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$$=\frac{d^2r}{dt^2}\vec{e_\rho}+\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{e_\theta}+\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{e_\theta}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{e_\theta}$$

$$-r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{e_\rho}=\left(\frac{d^2r}{dt^2}-r\frac{d\theta d\theta}{dt\,dt}\right)\vec{e_\rho}$$

$$+\left(r\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)\vec{e_\theta}.$$

$$\left\|\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}\right\|=\sqrt{\left(\frac{d^2r}{dt^2}-r\frac{d\theta d\theta}{dt\,dt}\right)^2+\left(r\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)^2}$$

5) Soit le vecteur $\vec{OM}(t)=r(t)\vec{e_\rho}(t)+z(t)\vec{k}$.

$$\frac{d\vec{OM}}{dt}=\frac{dr}{dt}\vec{e_\rho}+r\frac{d\theta}{dt}\vec{e_\theta}+\frac{dz}{dt}\vec{k}.$$

$$\left\|\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}\right\|=\left(\frac{d^2r}{dt^2}-r\frac{d\theta d\theta}{dt\,dt}\right)\vec{e_\rho}+\left(r\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)\vec{e_\theta}$$

$$+\frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}.$$

Considérez un point M dans l'espace, défini par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) et sphériques (r, θ, φ), où r est la distance radiale, θ est l'angle polaire (mesuré à partir de l'axe Z positif), et φ est l'angle azimutal (mesuré dans le plan XY à partir de l'axe X positif) (Fig.3).

1. Exprimez les coordonnées cartésiennes (x, y, z) de ce point M en fonction de (r, θ, φ) et vice-versa :

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \tan\varphi = \dfrac{y}{x} \\ \cos\theta = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{cases}$$

2. Calculez les vecteurs de base unitaires $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ du système de coordonnées sphériques en ce point M, en fonction des vecteurs unitaires cartésiens $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Quelle est la différence entre ces deux systèmes de vecteurs ?

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k} \\ \vec{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} - \sin\theta\,\vec{k} \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath} \end{cases}$$

La différence principale entre ces deux systèmes de vecteurs est que les vecteurs cartésiens $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ sont constants dans tout l'espace, tandis que les vecteurs sphériques $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ varient en fonction de la position du point M (base locale .

3. Calculer $d\vec{e}_r/d\theta$, $d\vec{e}_r/d\varphi$, $d\vec{e}_\theta/d\theta$, $d\vec{e}_\theta/d\varphi$ et $d\vec{e}_\varphi/d\varphi$;

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta \; ; \; \frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} = \sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r \; ; \; \frac{d\vec{e}_\theta}{d\varphi} = \cos\theta\,\vec{e}_\varphi$$

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} = -\cos\varphi\,\vec{\imath} - \sin\varphi\,\vec{\jmath} = -\sin\theta\,\vec{e}_r - \cos\theta\,\vec{e}_\theta$$

4. Soit le vecteur $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$. Dans la base des coordonnées sphériques $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$, déterminer les expressions de $\overrightarrow{OM}(t)$ et $d\overrightarrow{OM}/dt$ ainsi que leurs modules.

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k} = r\left[\sin\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k}\right] = r\vec{e}_r(t)$$

$$\|\overrightarrow{OM}(t)\| = r$$

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\left[\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\vec{e}_r}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\right] = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + r\frac{d\varphi}{dt}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$

$$\left\|\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right\| = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}$$