République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A. Mira Bejaia

Faculté des Sciences Exactes
Département de Recherche Opérationnelle

Cours d'Algèbre linéaire

Préparé par :

Dr Karima BOUIBED

Maître de Conférences, Classe B

Année universitaire 2023/2024

Avant-propos

Ce polycopié de cours du module d'Algèbre linéaire est destiné essentiellement aux étudiants de la première année licence en Mathématiques appliquées (système LMD). Mais également, il s'adresse aussi à tous les étudiants de la première année licence de domaine Mathématiques et Sciences Technologique.

Le document est composé principalement de cinq chapitres dont une brève description est donnée comme suit :

Le premier chapitre traite les espaces vectoriels à savoir la définition de la structure d'espace vectoriel, sous espace vectoriel ainsi que les combinaisons linéaire, familles libres et liées de vecteurs et plus particulièrement l'étude des espaces vectoriels de dimension finie.

Dans le deuxième chapitre, nous avons étudié les applications linéaires, définitions et propriétés et quelques résultats sur les applications linéaires injectives et surjectives.

Le troisième chapitre est consacré à la présentation de quelques matrices particulières suivie des différentes opérations sur les matrices notamment les matrices carrées, puis nous avons donné la matrice associée à une application linéaire et quelques opérations sur les applications linéaires et les matrices, ainsi que le calcul des déterminants d'ordre 2, 3 et n et le calcul de l'inverse d'une matrice en utilisant les déterminants.

Le quatrième chapitre donne des méthodes de résolution des systèmes d'équations linéaires.

Dans le cinquième chapitre quelques exercices et leurs corrigés ont été exhibés pour permettre à l'étudiant d'assimiler les notions présentées précédemment, suivie de quelques exercices sans solutions lui permettant de s'exercer et de s'entraîner.

Table des matières

Chapitre 1

Espaces vectoriels

Sommaire

1.1 Structure d'espace vectoriel

On désigne par $(\mathbb{K}, +, .)$ un corps commutatif, en général $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
On note par 0_E l'élément neutre pour la loi $(+)$ et $1_{\mathbb{K}}$ l'élément neutre pour la loi $(.)$.

Définition 1.1.1. On appelle espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ (ou un $\mathbb{K}$-espace vectoriel) tout ensemble E muni d'une loi de composition interne notée par $(+)$ et d'une loi de composition externe notée $(.)$, c'est à dire tout triplet $(E, +, .)$ où

1. $(E, +)$ est un groupe commutatif,

2. La loi (.), c'est à dire l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda.x \end{array}$$

vérifiant :

a. $\forall\, x \in E :\ 1_{\mathbb{K}}.x = x$,

b. $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \forall\,(x,y) \in E^2 :\ \lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y$,

c. $\forall\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall\, x \in E : (\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x$,

d. $\forall\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall\, x \in E : (\lambda.\mu).x = \lambda.(\mu.x)$.

Les éléments de E sont appelés vecteurs et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires.

Exemple 1.1.1. 1. $E = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ où

$$\begin{array}{rcl} (+) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ ((x,y),(x',y')) & \longmapsto & (x,y)+(x',y') = (x+x', y+y') \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (.) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ ((\lambda,(x,y)) & \longmapsto & \lambda.(x,y) = (\lambda.x, \lambda.y) \end{array}$$

$(\mathbb{R}^2, +, .)$ est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ (ou un $\mathbb{R}$-espace vectoriel).

2. $E = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ où

$$\begin{array}{rcl} (+) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ ((x,y),(x',y')) & \longmapsto & (x,y)+(x',y') = (x+x', y+y') \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (.) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ ((\lambda,(x,y)) & \longmapsto & \lambda.(x,y) = (\lambda.x, 0) \end{array}$$

$(\mathbb{R}^2, +, .)$ n'est pas un espace vectoriel car la propriété **a.** de la définition 1.1.1 n'est pas vérifiée.

En effet, $1_{\mathbb{R}}.(x,y) = 1.(x,y) = (1.x, 0) = (x,0) \neq (x,y)$.

1.2 Sous espaces vectoriels

Définition 1.2.1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E.
On dit que F est un sous espace vectoriel et on note (s.e.v) de E si et seulement si

1. $F \neq \emptyset$,
2. $\forall (x, y) \in F^2$, $x + y \in F$,
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in F$, $\lambda.x \in F$.

Remarque 1.2.1. $\{0_E\}$ et E sont des sous espaces vectoriels de E.

Proposition 1.2.1. *Une partie non vide F est un sous espace vectoriel de E si et seulement si*

$$\forall (x, y) \in F^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \lambda.x + \mu.y \in F.$$

Proposition 1.2.2. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F_1 et F_2 deux sous espaces vectoriels de E, alors $F_1 \cap F_2$ est un sous espace vectoriel de E. L'intersection de sous espaces vectoriels est un sous espace vectoriel.*

Remarque 1.2.2. En général, l'union de deux sous espaces vectoriels n'est pas un espace vectoriel.

Par exemple, soient $F_1 = \{(x, 0),\ x \in \mathbb{R}\}$, $F_2 = \{(0, y),\ y \in \mathbb{R}\}$ deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$, $F_1 \cup F_2$ n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^2$ car $(1, 0), (0, 1) \in F_1 \cup F_2$, mais $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin F_1 \cup F_2$.

1.3 Combinaisons linéaires, familles libres, familles liées de vecteurs

1.3.1 Combinaisons linéaires

Définition 1.3.1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x_1, x_2, ..., x_n$ des vecteurs de E. On appelle combinaison linéaire (C.L) des vecteurs $x_1, x_2, ..., x_n$ tout vecteur x de E tel que

$$\boxed{x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \ \text{ où } \ \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}}$$

Théorème 1.3.1. *Soit $\{x_1, \ldots, x_n\}$ une famille de vecteurs de E. L'ensemble F des combinaisons linéaires de cette famille est un sous espace vectoriel de E. C'est le plus petit sous espace vectoriel de E contenant la famille donnée $\{x_1, \ldots, x_n\}$.*

Preuve. Montrons que $F = \{x \in E : x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i,\ \alpha_i \in \mathbb{K},\ x_i \in E\}$ est un sous espace vectoriel de E.
Soient $x, y \in F$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ alors $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$, $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$.
$\lambda_1 x + \lambda_2 y = \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \lambda_2 \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_1 \alpha_i + \lambda_2 \beta_i) x_i = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i$, avec $\gamma_i = \lambda_1 \alpha_i + \lambda_2 \beta_i \in \mathbb{K}$. Ce qui implique que $\lambda_1 x + \lambda_2 y \in F$. Donc F est un s.e.v de E.
Montrons que F est le plus s.e.v contenant $\{x_1, \ldots, x_n\}$.
Supposons que F' est un s.e.v contenant $\{x_1, \ldots, x_n\}$, alors $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in F'$.
Or $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in F$, donc $F \subset F'$.

1.3.2 Familles libres, familles liées de vecteurs

Définition 1.3.2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x_1, x_2, ..., x_n$ des vecteurs de E. La famille $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ est libre si et seulement si $\forall \lambda_i \in \mathbb{K}, i = \overline{1, n}$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}}$$

Autrement dit, les vecteurs $x_1, x_2, ..., x_n$ sont linéairement indépendants (L.I).

Définition 1.3.3. Si la famille $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de vecteurs de E n'est pas libre, alors elle est dite liée (ou les vecteurs $x_1, x_2, ..., x_n$ sont dépendants L.D), c'est à dire il existe au moins $\lambda_i \in \mathbb{K}, i = \overline{1, n}$ avec $\lambda_i \neq 0_{\mathbb{K}}$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E$.

Exemple 1.3.1.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $x_1 = (1, 2, 0)$, $x_2 = (0, 0, -1)$ et $(2, 0, 0)$ sont L.I.
   En effet, soient λ_1, λ_2 et $\lambda_3 \in \mathbb{R}$: $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$.
   Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
   $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow (\lambda_1 + 2\lambda_3, 2\lambda_1, -\lambda_2) = 0_{\mathbb{R}^3}$.
   $$(\lambda_1 + 2\lambda_3, 2\lambda_1, -\lambda_2) = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = \dfrac{\lambda_1}{2} = \dfrac{0}{2} = 0, \\ 2\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \\ -\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

2. $E = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, les vecteurs $x_1 = (1, -2)$ et $(-2, 4)$ sont L.D.
   En effet, $2x_1 + x_2 = 0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)$, ou bien on écrit directement $x_2 = -2x_1$.

Remarque 1.3.1.
1. Si une famille $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ est liée, alors tout vecteur x_i, $i = \overline{1, n}$ s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs.
2. Toute famille contenant 0_E est liée.
3. Toute famille formée d'un unique vecteur différent de 0_E est libre.

Théorème 1.3.2. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x_1, x_2, ..., x_n$ des vecteurs de E, les deux conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *$\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ famille liée.*
2. *L'un au moins des vecteurs x_i est une C.L des autres vecteurs.*

Preuve. 1. $\Rightarrow$ 2.) Supposons que $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ est une famille liée, alors il existe un scalaire non nul telle que $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0_E$. Soit $\alpha_n \neq 0$. Alors $x_n = \frac{-\alpha_1}{\alpha_n} x_1 + \frac{-\alpha_2}{\alpha_n} x_2 + \ldots + \frac{-\alpha_{n-1}}{\alpha_n} x_{n-1}$, d'où x_n est une C.L des vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.
2. $\Rightarrow$ 1.) Supposons que x_n s'écrit comme C.L des vecteurs x_i, $i \neq n$, alors $x_n = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_{n-1} x_{n-1} \Rightarrow \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_{n-1} x_{n-1} - x_n = 0_E$.
Donc la famille $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ est liée.

1.3.3 Sous espace engendré par une partie, familles génératrices

Définition 1.3.4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A une partie de E.
On appelle sous espace engendré par A l'intersection de tous les sous espaces de E contenant A et on le note $< A >$ ou vect(A). C'est le plus petit sous espace vectoriel (au sens de l'inclusion) contenant A.

Définition 1.3.5. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset E$.

On dit que F est une famille génératrice de E (ou F engendre E) si et seulement si

$$\boxed{\forall x \in E,\ \exists\, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K} : x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i}$$

1.4 Bases d'un espace vectoriel

Définition 1.4.1. Soit E un $\mathbb{K}$- e.v., on dit que E est de dimension finie s'il existe une famille génératrice finie de E.

Définition 1.4.2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $B \subset E$.
On dit que B est une base de E si B est une famille libre et génératrice de E.

Théorème 1.4.1. *Soit E un $\mathbb{K}$- e.v., $B = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ est une base de E si et seulement si*

$$\boxed{\forall x \in E,\ \exists\,!(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i}$$

Les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sont appelés les coordonnées (ou les composantes) du vecteur x dans la base B.

Preuve. Soit $B = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ une base de E, donc B est une famille génératrice de E, alors pour tout x de E, on a $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, $x_i \in \{x_1, x_2, ..., x_n\}$
$\alpha_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1, n}$.
Montrons l'unicité.
Supposons que $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) x_i = 0_E$.
Comme B est une famille libre, donc $\alpha_i - \beta_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = \beta_i$, $\forall\, i = \overline{1, n}$.

Exemple 1.4.1.

1. $E = \mathbb{R}^2$, $B = \{e_1 = (1, 0),\ e_2 = (0, 1)\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$
2. $E = \mathbb{R}^3$, $B = \{e_1 = (1, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   En général, si $E = \mathbb{R}^n$,
   $B = \{e_1 = (1, 0, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, 0, ..., 1)\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

3. $E = \mathbb{R}^2$, $B' = \{v_1 = (1, -1),\, v_2 = (0, 2)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   Soit $v = (3, -5) \in \mathbb{R}^2$, les composantes de v dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont 3 et -5 car $v = (3, -5) = 3e_1 - 5e_2$ et dans la base B' sont 3 et -1 car $v = (3, -5) = 3v_1 - v_2$.

Définition 1.4.3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et B une base de E.
On appelle dimension de E, le cardinal de B et on note

$$\boxed{dim_{\mathbb{K}} E = card B}$$

Exemple 1.4.2.

1. $E = \mathbb{R}^2, B_{\mathbb{R}^2} = \{e_1 = (1, 0),\, e_2 = (0, 1)\}$, $\dim \mathbb{R}^2 = 2$.
2. $E = \mathbb{R}^n, B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, $\dim \mathbb{R}^n = n$.
3. $E = \mathrm{R}_n[X]$: polynôme de degré inférieur ou égal à n engendré par un nombre fini de polynômes $\{1, X, X^2, ..., X^n\}$, $\dim E = n + 1$.

Théorème 1.4.2. *S'il existe une base de E de cardinal $n < \infty$, toutes les bases de E ont ce même cardinal n, qu'on appelle alors la dimension de E.*

Théorème 1.4.3. *(**Théorème de la base incomplète**). Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n, $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ une famille de vecteurs de E. Soit $L = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ avec $p \leq n$ une famille libre de E. Alors pour compléter L, il existe $(n - p)$ vecteurs de A qui soient linéairement indépendants avec les vecteurs de L pour obtenir une base de E.*

Exemple 1.4.3. $E = \mathbb{R}^3$, $L = \{x_1 = (0, -1, 0), x_2 = (2, 0, 0)\}$ une famille libre de $\mathbb{R}^3$. On peut compléter L pour avoir une base de $\mathbb{R}^3$ en prenant par exemple, le vecteur $x_3 = (0, 0, 1)$.

Proposition 1.4.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n. Alors on a*

1. *Toute famille libre admet au plus n éléments.*
2. *Toute famille génératrice admet au moins n éléments.*
3. *Toute base de E admet exactement n éléments.*

Proposition 1.4.2. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n. Soit $B = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ une famille de vecteurs de E. B est une base de E si l'une des conditions suivantes est vérifiée*

1. *B est une famille libre de E.*
2. *B est une famille génératrice de E.*

Exemple 1.4.4. $B = \{x_1 = (-1, 0, 1), x_2 = (0, 2, 0), x_3 = (1, -1, 0)\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$? On a cardF $= 3$, il suffit de montrer que B est libre ou bien B est génératrice. En effet, soient λ_1, λ_2 et $\lambda_3 \in \mathbb{R}$: $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$
$\lambda_1(-1, 0, 1) + \lambda_2(0, 2, 0) + \lambda_3(1, -1, 0) = (-\lambda_1 + \lambda_3, 2\lambda_2 - \lambda_3, \lambda_1) = (0, 0, 0)$, d'où $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow F$ est libre, donc B est une base $\mathbb{R}^3$.

Proposition 1.4.3. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n, alors tout sous espace vectoriel F de E est de dimension finie et on a dim $F \leq$ dim E.*

Proposition 1.4.4. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n et F un sous espace vectoriel de E de dimension p. Alors F possède un supplémentaires dans E de dimension $n - p$.*

Théorème 1.4.4. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soient F et G deux sous espaces vectoriels de E. Alors $(F + G)$ est de dimension finie et on a*

$$\boxed{dim(F + G) = dimF + dimG - dim(F \cap G)}$$

Corollaire 1.4.1. *Si F et G sont deux sous espace vectoriels de E en somme directe. Alors*

$$\boxed{F \cap G = \{\emptyset\} \quad i.e \;\; dim(F \cap G) = 0}$$

et on a

$$\boxed{dim\ (F{+}G) = dim\ F + dim\ G}$$

Proposition 1.4.5. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soient F et G deux sous espaces vectoriels de E. Alors F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si*

$$\begin{cases} 1.\ dimE = dimF + dimG, \\ 2.\ F \cap G = \{0_E\} \quad ou \quad bien \quad B_F \cup B_G \quad est \quad une \quad famille \quad libre. \end{cases}$$

Avec B_E une base de F et B_G une base de G.

Définition 1.4.4. (**Rang d'une famille finie de vecteurs**)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une famille de vecteurs de E.
On appelle rang d'une famille de vecteurs F, la dimension de l'espace vectoriel qu'il engendre et on note

$$\boxed{\text{rang}F = \dim < F >}$$

Autrement dit, le rang de F est le nombre maximal de vecteurs de F qui sont linéairement indépendants.

Exemple 1.4.5. Soit $E = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $F = \{x_1 = (1, -2), x_2 = (-\frac{1}{2}, 1)$
$x_3 = (3, 0), x_4 = (2, -4), x_5 = (0, -4)\}$. On a $x_1 = -2x_2$, $x_4 = -4x_2$
et $x_5 = -4x_2 - \frac{2}{3}x_3$. D'où $F =< \{x_2, x_3\} >$ qu'est une famille libre, donc rang$F = 2$.

1.5 Somme et somme directe de sous espaces vectoriels

Définition 1.5.1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F_1 et F_2 deux sous espaces vectoriels de E. La somme de F_1 et F_2 notée par

$$\boxed{F_1 + F_2 = \{x \in E : \exists (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2,\ x = x_1 + x_2\}}$$

est un sous espace vectoriel de E appelé somme de F_1 et F_2.

Proposition 1.5.1. *Soient F_1, F_2 deux s.e.v d'un $\mathbb{K}$ e.v. E, alors $F_1 + F_2$ est le plus s.e.v contenant $F_1 \cup F_2$.*

Définition 1.5.2. (Somme directe)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F_1 et F_2 deux sous espaces vectoriels de E. On dit que la somme de F_1 et de F_2 notée $F_1 + F_2$ est directe s'il existe un unique $x_1 \in F_1$ et un unique $x_2 \in F_2$ tel que pour tout $x \in E$, on a $x = x_1 + x_2$ et on note

$$\boxed{F_1 \oplus F_2 = \{x \in E : \exists\,! x_1 \in F_1 \,\text{et}\, \exists\,! x_2 \in F_2,\ x = x_1 + x_2\}}$$

Autrement dit, la somme $F_1 + F_2$ est directe si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.

Définition 1.5.3. (Sous espaces supplémentaires)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F_1 et F_2 deux sous espaces vectoriels de E.
On dit que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E (ou bien E est une somme directe de F_1 et F_2) si et seulement si

$$\boxed{F_1 \cap F_2 = \{0_E\} \text{ et } F_1 + F_2 = E}$$

Autrement dit, $F_1 \oplus F_2 = E \Leftrightarrow \begin{cases} F_1 \cap F_2 = \{0_E\}, \\ F_1 + F_2 = E. \end{cases}$

Théorème 1.5.1. *Dans un $\mathbb{K}$ e.v. E de dimension finie, tout s.e.v F admet au moins un supplémentaire G dans E et $E = F \oplus G \Rightarrow dimE = dimF + dimG$.*

Remarque 1.5.1. La réciproque est fausse. Cependant :

$$\text{si} \begin{cases} \dim E = \dim F + \dim G, \text{ et} \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases} \qquad \text{alors } E = F \oplus G.$$

Chapitre 2

Applications linéaires

Sommaire

2.1 Définitions et propriétés générales

Définition 2.1.1. Soient E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est une application linéaire (ou un morphisme d'espaces vectoriels E et F) si et seulement si

1. $\forall x, y \in E,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$,
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ f(\lambda.x) = \lambda.f(x)$.

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Proposition 2.1.1. ***(Caractérisation usuelle des applications linéaires)*** *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est une application linéaire si et seulement si*

$$\boxed{\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in E : f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)}$$

Proposition 2.1.2. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire et $x_i \in E$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$ $i = \overline{1, n}$, alors on a*

$$\boxed{f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i x_i)}$$

Remarque 2.1.1. Si f est une application linéaire alors $f(0_E) = 0_F$.
Autrement dit, si $f(0_E) \neq 0_F$, alors f n'est pas une application linéaire.

Exemple 2.1.1.

1.
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & f(x, y, z) = (x + y + z, 2x + y - z) \end{array}$$

   f est linéaire. En effet, soient $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
   $f(\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z')) = f((\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z'))$

   $f(\lambda(x, y, z)+\mu(x', y', z')) = (\lambda x+\mu x'+\lambda y+\mu y'+\lambda z+\mu z', 2\lambda x+2\mu x'+\lambda y+\mu y'-\lambda z-\mu z')$

   $f(\lambda(x, y, z)+\mu(x', y', z')) = (\lambda(x+y+z)+\mu(x'+y'+z'), \lambda(2x+y-z)+\mu(2x'+y'-z'))$

   $f(\lambda(x, y, z)+\mu(x', y', z')) = \lambda(x+y+z, 2x+y-z)+\mu(x'+y'+z', 2x'+y'-z')$
   $f(\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z')) = \lambda f(x, y, z) + \mu f(x', y', z')$.
   De plus, on a $f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^2}$.

2.
$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & g(x, y) = (-x + y, x - y, 2x - y + 2) \end{array}$$

   $g(0_{\mathbb{R}^2}) \neq 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow g$ n'est pas linéaire.

3.
$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & h(x, y) = x^2 + y - 2 \end{array}$$

   h n'est pas linéaire car, pour (x, y) et $(x', y') \in \mathbb{R}^2$
   $h((x, y) + (x', y')) = h(x + x', y + y') = (x + x')^2 + y + y' - 2$
   $h((x, y) + (x', y')) = x^2 + x'^2 + 2xx' + y + y' - 2$
   $h(x, y) + h(x', y') = x^2 + y - 2 + x'^2 + y' - 2 \neq h((x, y) + (x', y'))$.

Définition 2.1.2.

1. On appelle endomorphisme de E une application linéaire de E dans E.
2. On appelle automorphisme de E une application linéaire de E dans E qui est bijective.
3. On appelle isomorphisme de E dans F une application linéaire de E dans F qui est bijective.

2.2 Image et noyau d'une application linéaire

Définition 2.2.1. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.

1. On appelle image de f et on le note $\mathrm{Im}f$ l'ensemble de vecteurs de F de la forme $f(x)$ avec $x \in E$.

$$\boxed{\mathrm{Im}f = \{y \in F,\, \exists\, x \in E,\, y = f(x)\} = f(E)}$$

2. On appelle noyau de f et on le note $\mathrm{Ker}f$ l'ensemble défini par

$$\boxed{\mathrm{Ker}f = \{x \in E : f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\})}$$

Exemple 2.2.1. Soit l'application linéaire f définie par

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & f(x, y, z) = (2x - y, y + z) \end{array}$$

Déterminons $\mathrm{Ker}f$ et $\mathrm{Im}f$.

1. $\mathrm{Ker}f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)\}$
   $(2x - y, y + z) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0, \\ y + z = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x, \\ z = -y = -2x. \end{cases}$
   $\mathrm{Ker}f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2x,\ z = -2x\} = \{x(1, 2, -2) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$
   Donc $\mathrm{Ker}f = \langle\{(1,\ 2,\ -2)\}\rangle$.
2. $\mathrm{Im}f = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,\, \exists\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\, (y_1, y_2) = f(x, y, z) = (2x - y, y + z)\}$
   $(2x - y, y + z) = (2x, 0) + (-y, y) + (0, z) = 2x(1, 0) + y(-1, 1) + z(0, 1)$
   $\mathrm{Im}f = \langle\{(1, 0), (-1, 1), (0, 1)\}\rangle$. Comme $(-1, 1) = -1(1, 0) + (0, 1)$, donc
   $\mathrm{Im}f = \langle\{(1, 0), (0, 1)\}\rangle = \mathbb{R}^2$.

2.3 Applications linéaires et sous espaces vectoriels

Proposition 2.3.1. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps $\mathbb{K}$ et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Soient G un s.e.v de E et H un s.e.v de F. Alors*

1. *$f(G)$ est un sous espace vectoriel de F, en particulier Imf est un sous espace vectoriel de F.*
2. *$f^{-1}(H) = \{x \in E \,/\, f(x) \in H\}$ est un sous espace vectoriel de E, en particulier $Kerf$ est un sous espace vectoriel de E.*

2.3.1 Applications linéaires injectives et surjectives

Proposition 2.3.2. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors*

1. *f est injective si et seulement si $Kerf = \{0_E\}$.*
2. *f est surjective si et seulement si $Imf = F$.*

Preuve.
1. $\Rightarrow$) Supposons que f est injective et montrons que $\mathrm{Ker}f = \{0_E\}$. Soit $x \in \mathrm{Ker}f \Rightarrow f(x) = 0_F = f(0_E)$, comme f est injective alors $x = 0_E$, donc $\mathrm{Ker}f = \{0_E\}$.
   $\Leftarrow$) Supposons que $\mathrm{Ker}f = \{0_E\}$ et montrons que f est injective.
   Soient $x_1, x_2 \in E \,:\, f(x_1) = f(x_2)$, comme f est linéaire, on a
   $f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2) = 0_F \Rightarrow x_1 - x_2 \in \mathrm{Ker}f$, puisque $\mathrm{Ker}f = \{0_E\}$, alors $x_1 - x_2 = 0_E \Rightarrow x_1 = x_2$. Donc f est injective.
2. f surjective $\Leftrightarrow$ $\forall y \in F$, $\exists\, x \in E : f(x) = y \Rightarrow f(x) \in f(E)$ i.e. $F \subset f(E)$ et on a aussi $f(E) \subset F$, d'où $f(E) = F$ donc $\mathrm{Im}f = F$.

Exemple 2.3.1. Soit l'application linéaire f définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) = (x - y, x + y) \end{aligned}$$

f est-elle injective ? surjective ?
$\mathrm{Ker}f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (x-y, x+y) = (0,0)\}$

$$\begin{aligned} f(x,y) = (0,0) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - y = 0, \\ x + y = 0. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = y, \\ x = -y. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad x = y = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Ker}f = \{0_{\mathbb{R}^2}\} \Leftrightarrow f \text{ est injective.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}f &= \{f(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(x-y, x+y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1,1) + y(-1,1), (x,y) \in \mathbb{R}^2\}. \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Im}f$ est engendré par les vecteurs $x_1 = (1,1)$ et $x_2 = (-1,1)$ qui sont linéairement indépendants, alors ils forment une base de $\mathrm{Im}f$. Puisque $\mathrm{Im}f \subset \mathbb{R}^2$ et de plus $\dim(\mathrm{Im})f = 2$, donc $\mathrm{Im}f = \mathbb{R}^2$. Par conséquent, f est surjective.

Proposition 2.3.3. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire et $G = \langle\{x_1, x_2, ..., x_n\}\rangle$ un sous espace vectoriel de E, alors*

$$\boxed{f(G) = f(\langle\{x_1, x_2, ..., x_n\}\rangle) = \langle\{f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)\}\rangle}$$

Corollaire 2.3.1. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.*
Si $\dim E = n$ et $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E. Alors $f(B)$ engendre $\mathrm{Im}f$.
Si de plus, $f(B)$ est libre alors elle forme une base de $\mathrm{Im}f$.

Exemple 2.3.2. Soit l'application linéaire f définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \quad &\longmapsto \quad f(x,y,z) = (x - y + z, x + y - z) \end{aligned}$$

Soit $B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. D'après le corollaire précèdent, $\mathrm{Im}f = \langle\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}\rangle = \langle\{(1,1), (-1,1), (1,-1)\}\rangle$. Mais $f(e_3) = -f(e_2)$. Donc $\mathrm{Im}f = \langle\{(1,1), (-1,1))\}\rangle$, puisque $f(e_1)$ et $f(e_2)$ sont linéairement indépendants, donc ils forment une base de $\mathrm{Im}f$.

Proposition 2.3.4. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. E et F de dimension finies. Alors*

1. *f injective $\Rightarrow$ $dimF \geq dimE$.*
2. *f surjective $\Rightarrow$ $dimE \geq dimF$.*
3. *f surjective et $dimE = dimF \Rightarrow f$ est bijective.*

Proposition 2.3.5. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. E et F de dimension finies et B une base de E. Alors*

1. *f est injective si et seulement si $f(B)$ est une famille libre de F.*
2. *f est surjective si et seulement si $f(B)$ est une famille génératrice de F.*
3. *f est un isomorphisme si et seulement si $f(B)$ est une base de F.*

Preuve. 1. $\Rightarrow$) Supposons que f est injective et soit $B = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ une base de E. Montrons que $f(B) = \{f(u_1), f(u_2), ..., f(u_n)\}$ est libre.
Soit $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ telle que $\sum_{i=1}^n \alpha_i f(u_i) = 0_F$. Comme f est une application linéaire, alors on a
$\sum_{i=1}^n \alpha_i f(u_i) = f(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i) = 0_F = f(0_E) \Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = 0_E \Rightarrow \alpha_i = 0, \forall i = \overline{1, n}$ car B est une base de E. D'où la famille $\{f(u_1), f(u_2), ..., f(u_n)\}$ est libre.
$\Leftarrow$) Supposons que $f(B)$ est libre et montrons que f est injective.
Soit $x, x' \in E : f(x) = f(x') \Rightarrow f(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i) = f(\sum_{i=1}^n \beta_i u_i)$, ce qui implique que $\sum_{i=1}^n \alpha_i f(u_i) = \sum_{i=1}^n \beta_i f(u_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) f(u_i) = 0_F \Rightarrow \alpha_i - \beta_i = 0_E$ car $f(B)$ est libre. Donc $\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^n \beta_i u_i \Rightarrow x = x'$, d'où f est injective.
2. $\Rightarrow$) Supposons que f est surjective et montrons que $f(B)$ est une famille génératrice de F.
Soit $y \in f(E) \Rightarrow \exists x \in E : y = f(x) \Rightarrow y = f(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(u_i)$, d'où $\{f(u_1), f(u_2), ..., f(u_n)\}$ est une famille génératrice de $f(E) = F \Rightarrow f(B)$ est une famille génératrice de F.
$\Leftarrow$) Supposons que $f(B)$ est une famille génératrice de F et montrons que f est surjective.
Soit $y \in F \Rightarrow y = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(u_i) = f(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i)$ car ($f(B)$ est génératrice de F et f linéaire), d'où $\forall y \in F$, $\exists x + \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \in E : y = f(x)$, donc f est surjective.
3. f est bijective si et seulement si f est injective et surjective, ceci est équivalent à $f(B)$ est libre et $f(B)$ est génératrice donc $f(B)$ est une base de F.

2.3.2 Rang d'une application linéaire

Définition 2.3.1. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. E et F de dimension finies. On appelle rang de f et on note $\text{rg}(f)$ la dimension de $\text{Im}f$, c'est à dire

$$\boxed{\text{rg}(f) = \dim \text{Im}f}$$

Théorème 2.3.1. ***(Théorème du rang)***. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. E et F de dimension finies. Alors*

$$\boxed{dimE = dim\ \ Kerf + rg(f) = dimKerf + dimImf}$$

Théorème 2.3.2. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$- e.v. tel que :*
$dimE = dimF$ et $f : E \longrightarrow F$ linéaire. Alors

$$\boxed{f \textit{ injective} \Leftrightarrow f \textit{ surjective} \Leftrightarrow f \textit{ bijective}}$$

Remarque 2.3.1. Ce théorème est applicable uniquement en dimension finie et dans le cas particulier où f est un endomorphisme de E.

Exemple 2.3.3. Reconsidérons l'application linéaire f de l'Exemple 2.3.2

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & f(x, y, z) = (x - y + z, x + y - z) \end{array}$$

On a $\text{dimIm}f = 2 = \dim\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow f$ est surjective.
On sait que $\dim\mathbb{R}^3 = \text{dimKer}f + \text{dimIm}f \Rightarrow \text{dimKer}f = \dim\mathbb{R}^3 - \text{dimIm}f = 1$.
Donc $\text{Ker}f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\} \Rightarrow f$ n'est pas injective. Ou bien, $\text{dimIm}f = 2 \neq \dim\mathbb{R}^3 \Rightarrow f$ n'est pas injective.

Chapitre 3

Les matrices

Sommaire

3.1 Généralités sur les matrices

On désigne par $(\mathbb{K}, +, .)$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n, m et p sont des entiers strictement positifs.

Définition 3.1.1. Une matrice à n lignes et m colonnes est une application de $\{1, ..., n\} \times \{1, ..., m\}$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ de la forme

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1j} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2j} & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{ij} & ... & a_{im} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nj} & ... & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Les $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}}$ sont appelés les éléments (coefficients) de la matrice A.
L'indice i désigne le numéro de la ligne et l'indice j le numéro de la colonne de la matrice A. Par exemple, a_{ij} est l'élément de la i^{eme} ligne et de la j^{eme} colonne.
L'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes ou matrices de type (n, m) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté par $\mathcal{M}_{(n,m)}(\mathbb{K})$.

Exemple 3.1.1.

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} \\ \sqrt{11} & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice de type $(3, 2)$ à coefficients dans $\mathbb{R}$, c'est à dire $A \in \mathcal{M}_{(3,2)}(\mathbb{R})$.
2. $B = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 2-7i \\ \frac{5}{2}i & 3 & 21 \end{pmatrix}$ est une matrice de type $(2, 3)$ à coefficients dans $\mathbb{C}$, c'est à dire $B \in \mathcal{M}_{(2,3)}(\mathbb{C})$.

3.2 Matrices particulières

Définition 3.2.1.

1. Matrice nulle : une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} \in \mathcal{M}_{(n,m)}(\mathbb{K})$ est nulle si $a_{ij} = 0$, $\forall\, 1 \leq i \leq n$ et $\forall\, 1 \leq j \leq m$.

   Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. **Matrice ligne** : une matrice ligne contient une seule ligne ($n = 1$).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \end{pmatrix}.$$

Par exemple, $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}, & -2, & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 13, & 0, & \sqrt{2}, & -7 \end{pmatrix}$.

3. **Matrice colonne** : une matrice colonne contient une seule colonne ($m = 1$).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}.$$

Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 5 \\ \sqrt{3} \\ -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$.

4. **Matrice carrée** : une matrice carrée est une matrice dont le nombre de lignes et le nombre de colonnes sont égaux c'est à dire $\boxed{n = m}$, dans ce cas, on dit que la matrice A est une matrice carrée d'ordre n.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \boxed{\dots} & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \boxed{a_{ii}} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \boxed{\dots} & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & \boxed{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

On note par $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

∘ Les coefficients a_{ii}, $1 \leq i \leq n$ encadrés dans la matrice carrée A d'ordre n sont appelés coefficients de la diagonale de A : $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 5 & \frac{-2}{9} \\ 8 & 13 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et les éléments de la diagonale sont $a_{11} = 5$, $a_{22} = 13$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 11 \\ 32 & 4 & \sqrt{13} \\ 1 & \frac{7}{15} & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et les éléments de la diagonale sont $a_{11} = -3$, $a_{22} = 4$, $a_{33} = 8$.

Par exemple, $A = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 25 & 7 \\ 9 & \boxed{\dfrac{13}{4}} & -3 & 11 \\ 22 & -5 & \boxed{42} & 2 \\ 4 & \sqrt{5} & -3 & \boxed{6} \end{pmatrix}$ et la diagonale de A est $\left(-1, \ \dfrac{13}{4}, \ 42, \ 6 \right)$.

5. **Matrice triangulaire inférieure** : une matrice triangulaire inférieure est une matrice carrée dont tous les coefficients au dessus de la diagonale sont nuls.

$$A \text{ triangulaire inférieure } \Leftrightarrow \forall\, i, j \in \{1, ..., n\},\ i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & \boxed{...} & 0 & 0 & 0 \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & \boxed{a_{ii}} & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & \boxed{...} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{ni} & ... & \boxed{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Par exemple, $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 5 & 11 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{2} & -7 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 13 & 8 & 0 \\ 2 & -9 & 11 & 6 \end{pmatrix}$.

6. **Matrice triangulaire supérieure** : une matrice triangulaire supérieure est une matrices carrée dont tous les coefficients au dessous de la diagonale sont nuls.

$$A \text{ triangulaire supérieure } \Leftrightarrow \forall\, i, j \in \{1, ..., n\},\ i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & ... & a_{1i} & ... & a_{1n} \\ 0 & \boxed{a_{22}} & ... & a_{2i} & ... & a_{2n} \\ 0 & 0 & \boxed{...} & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{a_{ii}} & ... & a_{in} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{...} & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & \frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 15 & 0 & -6 & 14 \\ 0 & 2 & 23 & -7 \\ 0 & 0 & 34 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$.

7. **Matrice diagonale** : une matrice diagonale est une matrice carrée à la fois triangulaires supérieure et triangulaire inférieure. Les seuls coefficients non nuls sont donc ceux de la diagonale.

$$A \text{ diagonale } \Leftrightarrow \forall\, i, j \in \{1, ..., n\}, a_{ij} = 0, \forall\, i \neq j$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{a_{22}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\cdots} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{a_{ii}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{\cdots} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$.

8. **Matrice identité** : une matrice identité est une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux a_{ii} valent 1 . On note I_n la matrice identité d'ordre n.

$$I_n = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\cdots} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{\cdots} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}.$$

Par exemple, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9. **Transposée d'une matrice** : On appelle transposée de $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ la

matrice notée $A^t \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ définie par a_{ji}.

$$A^t = (a_{ji})_{\substack{1\leq j\leq m\\ 1\leq i\leq n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{i1} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{i2} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1j} & a_{2j} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{nj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{im} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 14 & -9 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$, $A^t = \begin{pmatrix} 14 & 7 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-4}{3} & 0 \\ 2 & 11 & 8 \\ -5 & 3 & -6 \end{pmatrix}$,

$B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ \frac{-4}{3} & 11 & 3 \\ 0 & 8 & -6 \end{pmatrix}$

10. **Matrice symétrique** : une matrice carrée est dite symétrique si et seulement si $\boxed{A^t = A}$

    Par exemple, $A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 13 \end{pmatrix} = A^t$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} = B^t$.

11. **Matrice antisymétrique** : une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite antisymétrique si et seulement si $\boxed{A = -A^t}$

    Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix} = -A^t$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & \frac{-1}{2} \\ -3 & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 \end{pmatrix} = -B^t$.

3.3 Opérations sur les matrices

1. **Égalité de deux matrices** : Soient $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.
   $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$, $\forall\, 1 \leq i \leq n$, $\forall\, 1 \leq j \leq m$.
2. **Somme de deux matrices** : Soient $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.
   On appelle la somme de A et B et on note $A + B$ la matrice C donnée par $C = (c_{ij}) = A + B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, avec $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall\, 1 \leq i \leq n$, $\forall\, 1 \leq j \leq m$.

3. **Multiplication d'une matrice par un scalaire** : Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda A = \lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$, $\forall\, 1 \leq i \leq n$, $\forall\, 1 \leq j \leq m$.
Par exemple, soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 13 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -12 \\ 0 & 1 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 21 & -5 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$ et $\lambda = -4$.
$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -12 \\ 4 & 14 \\ 17 & -2 \end{pmatrix}$, $\lambda A = -4A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 13 \\ 9 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -16 & -52 \\ -36 & 28 \end{pmatrix}$.
Par contre, $A + C$ et $B + C$ n'existent pas car $A, B \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Propriété 3.3.1. *Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, on a les propriétés suivantes :*

(a) $A + B = B + A$ *(l'addition est commutative).*

(b) $(A + B) + C = A + (B + C)$ *(l'addition est associative).*

(c) $A + O_{nm} = O_{nm} + A = A$ *(O_{nm} la matrice nulle est l'élément neutre de l'addition).*

(d) $\alpha.(A + B) = \alpha.A + \beta.B$.

(e) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

(f) $(\alpha.A)B = \alpha.(AB)$.

Théorème 3.3.1. *L'espace $(\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \times m$ dont la base est dite (base canonique) est constituée par la famille de matrices élémentaires $E_{ij}{}_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}}$ définies par*

$$E_{ij} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} & j & \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

4. **Produit de deux matrices** : Soient $A = (a_{ij}), B = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ (le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B). On définit alors le produit de A et B dans cet ordre par la matrice $C = A \times B = (c_{ik}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

tel que

$$\boxed{c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk}}$$

Par exemple, soient $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$
et $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$, $A \times B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$
$A \times B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \end{pmatrix}$.
Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,
$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -4 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Remarque 3.3.1. (a) Le produit $A \times B$ de deux matrices A et B est possible uniquement lorsque le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

(b) En général, et lorsque le produit est bien défini, on a $A \times B \neq B \times A$ (le produit matriciel n'est pas commutatif).

(c) Le produit des matrices carrées d'ordre n est toujours défini.

(d) L'égalité $A \times B = 0 \not\Rightarrow A = 0$ ou $B = 0$. Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors que $A \neq 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$ et $B \neq 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.

(e) L'égalité $A \times B = A \times C$ n'implique pas $B = C$.

5. **Matrices carrées inversibles** : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que A est inversible si et seulement si il existe A' telle que

$$\boxed{AA' = A'A = I_n}$$

Si A est inversible alors A' est unique et est appelée inverse de A (notée A^{-1}).
Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, on cherche $A' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $AA' = I_2$.

$AA' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a-2c & b-2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Par identification, on obtient

$$\begin{aligned} a-2c=1 &\quad\Leftrightarrow\quad a=1+2c, \\ b-2d=0 &\quad\Leftrightarrow\quad b=2d, \\ 3c=0 &\quad\Leftrightarrow\quad c=0, \\ 3d=1 &\quad\Leftrightarrow\quad d=\frac{1}{3}, \\ a=1 &\quad\text{et}\quad b=\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Finalement, $A' = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

6. **Matrices équivalentes** : Soient A, B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.
   On dit que A et B sont équivalentes s'il existe deux matrices carrées inversibles $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ telle que
   $$\boxed{B = Q^{-1}AP}$$
7. **Matrices semblables** : Soient A, B deux matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   On dit que A et B sont semblables s'il existe une matrice carrée inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que
   $$\boxed{B = P^{-1}AP}$$

3.4 Matrices et applications linéaires

3.4.1 Matrice associée à une application linéaire

Définition 3.4.1. Soient E, F deux $\mathbb{K}$-e.v. tels que $\dim E = n$ et $\dim F = m$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soient $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E et $C = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$ une base de F. On appelle matrice associée à l'application linéaire f par rapport aux bases B et C la matrice $M = M_{(B,C)}(f) = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ dont la j-ème colonne est constituée par les coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base C.

$$M = M_{(B,C)}(f) = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_j) & \cdots & f(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Plus simplement, c'est la matrice dont les vecteurs colonnes sont les images par f des vecteurs de la base de départ B, exprimée dans la base d'arrivée C.

Remarque 3.4.1. 1. La taille de la matrice $M_{(B,C)}(f)$ dépend uniquement de la dimension de E et de celle de F.

2. Les coefficients de la matrice dépendent du choix de la base B de E et de la base C de F.

Exemple 3.4.1.

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 - 2x_2 + 3x_3) \end{array}$$

Soient $B = \{e_1 = (1, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, 0),\ (e_3) = (0, 0, 1)\}$ et
$C = \{u_1 = (1, 0), u_2 = (0, 1)\}$. Cherchons la matrice $M_{(B,C)}(f)$ associée à f par rapport aux bases B et C.
$f(e_1) = (1, 1) = u_1 + u_2$, $f(e_2) = (1, -2) = u_1 - u_2$ et $f(e_3) = (-1, 3) = -u_1 + 3u_2$.

$$M_{(B,C)}(f) = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \end{array} \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

3.4.2 Opérations sur les applications linéaires et les matrices

Proposition 3.4.1. *Soient $f, g : E \longrightarrow F$ deux applications linéaires et soient B une base de E, C une base de F et D une base de G. Alors, on a*

1. $\boxed{M_{(B,C)}(f + g) = M_{(B,C)}(f) + M_{(B,C)}(g)}$
2. $\boxed{M_{(B,C)}(\lambda f) = \lambda M_{(B,C)}(f)}$

Proposition 3.4.2. *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires et soient B une base de E, C une base de F et D une base de G. Alors, on a*

$$\boxed{M_{(B,D)}(g \circ f) = M_{(C,D)}(g)M_{(B,C)}(f)}$$

Proposition 3.4.3. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel fini de dimension n, $f : E \longrightarrow E$ une application linéaire et B une base de E. $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice associée à f relativement à la base B de E, alors*

$$\boxed{M \text{ est inversible} \Leftrightarrow f \text{ est bijective}}$$

Définition 3.4.2. (**Rang d'une matrice**) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. On appelle rang (rg) de A le nombre maximum de vecteurs colonnes de A qui sont linéairement indépendants et on a

$$\boxed{\text{rg}(A) \leq \min(n, m)}$$

Proposition 3.4.4. *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. B, C des bases de E, F respectivement. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A = M_{B,C}(f)$. Alors*

$$\boxed{rg(A) = rg(f)}$$

3.5 Matrice de passage, changement de bases

3.5.1 Matrice de passage d'une base à une autre base

Définition 3.5.1. Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie égale à n, B, B' deux bases de E. On appelle matrice de passage de B à B' la matrice de $M_n(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont formées des composantes des vecteurs de B' exprimés dans la base B, on la note $P_{(B,B')}$, c'est à dire, si $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ et $B' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$, alors on a

$$\begin{aligned}
e'_1 &= \alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + ... + \alpha_{n1}e_n \\
e'_2 &= \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + ... + \alpha_{n2}e_n \\
\vdots &= \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots \\
e'_n &= \alpha_{1n}e_1 + \alpha_{2n}e_2 + ... + \alpha_{nn}e_n
\end{aligned}$$

Donc

$$P_{(B,B')} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple 3.5.1. Soit $E = \mathbb{R}^2$. On considère la base $B = \{e_1 = (1,0), e_2 = (1,1)\}$ et la base de $B' = \{e'_1 = (1,2), e'_2 = (5,4)\}$ de $\mathbb{R}^2$.
Cherchons la matrice de passage de la base B vers la base B'. Il faut exprimer les vecteurs de la base B' en fonction des vecteurs de la base B.

$$\begin{aligned} e'_1 &= -e_1 + 2e_2, \\ e'_2 &= e_1 + 4e_2, \end{aligned}$$

La matrice de passage de B vers B' est donc par

$$P = P_{(B,B')} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} e'_1 & e'_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

La matrice de passage de B' vers B est donc par

$$P^{-1} = P_{(B',B)} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} e_1 & e_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \end{array}$$

3.5.2 Changement de bases

3.5.2.1 Changement de bases pour un vecteur

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie égale à n, B et B' deux bases de E et $P = P_{(B,B')}$. Soit X un vecteur de E et considérons $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ les composantes de X dans la base B et $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ les composantes de X dans la base B'. Alors on a

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \text{ ou bien } \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.5.2. Reconsidérons l'exemple 3.5.1 et soit X un vecteur de $\mathbb{R}^2$.
Si (x, y) sont les composantes du vecteur X dans la base B, les composantes du vecteur X dans la base B' sont (x', y') telle que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3}x + \frac{1}{6}y \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y \end{pmatrix}$$

3.5.3 Changement de bases pour la matrice associée à une application linéaire

Théorème 3.5.1. *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-e.v., $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire, B, B' deux bases de E, C, C' deux bases de F, $M_{(B,C)}(f)$ la matrice associée à f relativement aux base B de E et C de F, $P = P_{(B,B')}$, $Q = Q_{(C,C')}$ et $Q^{-1} = Q_{(C',C)}$. Alors, on a la matrice associée à f relativement aux nouvelles bases B' et C' est donnée comme suit*

$$\boxed{M_{(B',C')}(f) = Q^{-1} M_{(B,C)}(f) P}$$

Théorème 3.5.2. *Soit E un $\mathbb{K}$-e.v., $F : E \longrightarrow E$ une application linéaire (f un endomorphisme), B et B' deux bases de E, $M_{(B,B)}(f)$ la matrice associée à f relativement à la base B. Soit $P = P_{(B,B')}(P^{-1} = P_{B',B})$. Alors, on a la matrice associée à f relativement à la base B' est donnée comme suit*

$$\boxed{M_{(B',B')}(f) = P^{-1} M_{(B,B)}(f) P}$$

3.6 Calcul des déterminants

Le calcul du déterminant d'une matrice carrée est un outil important dans l'algèbre linéaire, on l'utilise par exemple, pour vérifier si une matrice est inversible et pour calculer l'inverse d'une matrice, on peut l'appliquer aussi dans la résolution des systèmes d'équations linéaires.

3.6.1 Déterminant d'une matrice d'ordre 2

Définition 3.6.1. Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2.
Le déterminant de A est le nombre réel $a_{11} \times a_{22} - a_{21} \times a_{12}$ et on le note par $\det A = a_{11} \times a_{22} - a_{21} \times a_{12}$.

$$\boxed{\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} - a_{21} \times a_{12}}$$

Exemple 3.6.1. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -2 \times 1 - 7 \times 3 = -23.$

3.6.2 Déterminant d'une matrice d'ordre 3

Définition 3.6.2. Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

3.6.2.1 Méthode 1 : Développement suivant une ligne

Par exemple, développement suivant la première ligne :

$$\boxed{\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}$$

Exemple 3.6.2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -5.$$

3.6.2.2 Méthode 2 : Développement suivant une colonne

Par exemple, développement suivant la première colonne :

$$\boxed{\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -5.$$

3.6.2.3 Méthode 3 : Règle de Sarrus

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc} a_{11}\searrow & a_{12} & \nearrow a_{13} \\ a_{21}\searrow & a_{22} & \nearrow a_{23} \\ a_{31}\nearrow\searrow & a_{32} & \nearrow\searrow a_{33} \\ \color{red}{a_{11}}\nearrow & \color{red}{a_{12}} & \searrow\color{red}{a_{13}} \\ \color{red}{a_{21}}\nearrow & \color{red}{a_{22}} & \searrow\color{red}{a_{23}} \end{array}\right|$$

$$\boxed{\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ \color{red}{1} & \color{red}{0} & \color{red}{-1} \\ \color{red}{3} & \color{red}{5} & \color{red}{2} \end{array}\right|$$

$$\det A = 1\times5\times1+3\times0\times(-1)+-2\times0\times2-(-2\times5\times(-1)+1\times0\times2+3\times0\times1) = -5.$$

3.6.3 Déterminant d'une matrice d'ordre n

Définition 3.6.3. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note A_{ij} la matrice d'ordre $(n-1)$ déduite de A en supprimant la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne et $\triangle_{ij}$ appelé mineur est le déterminant de la matrice A_{ij} .

On appelle déterminant de A développé suivant la i^{eme} ligne le scalaire

$$\begin{aligned}\det A &= (-1)^{i+1}a_{i1}\triangle_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}\triangle_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n}a_{n1}\triangle_{n1} \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}\triangle_{ik}.\end{aligned}$$

On appelle déterminant de A développé suivant la j^{eme} colonne le scalaire

$$\begin{aligned}\det A &= (-1)^{1+j}a_{1j}\triangle_{1j} + (-1)^{2+j}a_{2j}\triangle_{2j} + \cdots + (-1)^{n+j}a_{nj}\triangle_{nj} \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}\triangle_{ij}\end{aligned}$$

3.6.4 Quelques propriétés des déterminants

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. $\det I_n = 1$
2. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.
3. $\det(AB) = \det A \det B$.
4. $\det(A^m) = (\det A)^m$, $m \in \mathbb{N}^*$.
5. $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ est inversible, de plus $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.
6. $\det A^t = \det A$.
7. $\det A = 0$ si l'une de ses colonnes est nulle.
8. $\det A = 0$ si ses colonnes (resp. ses lignes) sont liées.
9. Si A est une matrice triangulaires inférieure ou supérieure ou diagonale, alors $\det A = \Pi_{i=1}^{n} a_{ii}$.
10. Le déterminant ne change pas si on ajoute à une ligne ou à une colonne une combinaison linéaires des autres lignes ou des autres colonnes.

Remarque 3.6.1. Cette dernière propriété est très importante, elle facilite le calcul du déterminant en faisant apparître des zéros sur la ligne (ou la colonne) ciblée.

3.7 Calcul de l'inverse d'une matrice en utilisant le déterminant

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On sait que A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. Cherchons maintenant sa matrice inverse A^{-1}.

Définition 3.7.1. On appelle comatrice de A la matrice carrée d'ordre n définie par

$$\text{com}A = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nj} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

où $\boxed{c_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ij}}$, avec A_{ij} la matrice déduite de A en supprimant la i^{eme} ligne et la j^{eme} colonne.

Définition 3.7.2. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice inverse de A notée par

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\text{com}A)^t}$$

Exemple 3.7.1. 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - (-2) \times 2 = 5 \neq 0 \Rightarrow A \text{ est inversible.}$$

$$\text{com}A = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\det(1) & (-1)^{1+2}\det(-2) \\ (-1)^{2+1}\det(2) & (-1)^{2+2}\det(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\text{com}A)^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0, \text{ d'après la Propriété 8.}$$

$\det B = 0 \Rightarrow B$ n'est pas inversible.

3. Soit $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\det C = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -29$$

$\det C \neq 0 \Rightarrow C$ est inversible.

$$\text{comC} = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\text{comC} = \begin{pmatrix} 2 & -15 & -6 \\ -9 & -5 & -2 \\ 1 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(\text{comC})^t = \begin{pmatrix} 2 & -9 & 1 \\ -15 & -5 & 7 \\ -6 & -2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{-29}\begin{pmatrix} 2 & -9 & 1 \\ -15 & -5 & 7 \\ -6 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Chapitre 4

Résolution des systèmes d'équations linéaires

Sommaire

4.1 Définitions et généralités

Définition 4.1.1. On appelle système linéaire de n équations à m inconnues (variables) et à coefficients dans $\mathbb{K}$ tout système de la forme :

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1m}x_m = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2m}x_m = b_2, \\ \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots = \cdots, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{1m}x_m = b_i, \\ \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots = \cdots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{nm}x_m = b_n. \end{cases}$$

Les $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}}$ sont appelés les coefficients du système (S).
La matrice A suivante est appelée matrice du système (S).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{im} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Le vecteur $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ est appelé le second membre du système (S).

Le vecteur $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est appelée le vecteur des inconnus du système (S).

Alors le système (S) s'écrit sous la forme matricielle suivante $Ax = b$,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{im} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Définition 4.1.2. (**Système homogène associé à** (S))
On peut associé à un système (S) un système homogène noté par (S_h) et ceci en annulant les secondes membres des équations du système (S), c'est à dire $b_i = 0$, $\forall\, i = \overline{1, n}$.

$$(S_h)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1m}x_m = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2m}x_m = 0, \\ \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots = 0, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{1m}x_m = 0, \\ \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots = 0, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{nm}x_m = 0. \end{cases}$$

Donc la forme matricielle du système homogène (S_h) est donnée par $Ax = 0$.

Exemple 4.1.1. Soit (S_1) un système d'équations linéaire dans $\mathbb{R}^2$.

$$(S_1)\begin{cases} x + y = 13, \\ 2x - y = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$(S_{h_1})\begin{cases} x + y = 0, \\ 2x - y = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Définition 4.1.3. On appelle rang du système linéaire (S) le rang de sa matrice associée

$$\boxed{\text{rg}(S) = \text{rg}A = r}$$

Définition 4.1.4. On appelle solutions du système (S) tout élément $(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_m^*)$ vérifiant (S).

Remarque 4.1.1.

1. Un système homogène (S_h) possède au moins la solution $(0, 0, \cdots, 0)$ dite solution triviale.
2. Un système d'équations linéaires peut avoir une seule solution, ou bien une infinité de solutions ou aucune solution.
3. Un système d'équations linéaires est dit incompatible s'il n'admet aucune solution.

Exemple 4.1.2. Résolvons le système (S_1) du l'Exemple 4.1.1.

$$\begin{aligned} x + y &= 13 \\ 2x - y &= 2 \Rightarrow y = 2x - 2 \\ x + y &= 11 \Rightarrow x + 2x - 2 = 13 \Rightarrow 3x = 13 + 2 = 15 \Rightarrow \boxed{x = 5}. \\ y &= 2 \times 5 - 2 = 8 \Rightarrow \boxed{y = 8.} \end{aligned}$$

Donc la solution du système (S_1) est le couple $(x, y) = (5, 8)$.
La solution du système homogène (S_{h_1}) est le couple $(x, y) = (0, 0)$.

4.2 Résolution des systèmes d'équations linéaires

4.2.1 Systèmes de Cramer

Le système (S) est dit de Cramer si et seulement si A est une matrice carrée inversible, c'est à dire

$$\boxed{(n = m \text{ et } \det A \neq 0)}$$

Dans ce cas, (S) admet une unique solution donnée par :

$x_i = \dfrac{\det A_{x_i}}{\det A}$, $\forall\, i = \overline{1, n}$, où A_{x_i} est la matrice obtenue de A en remplaçant la colonne i de A par le vecteur b.

Exemple 4.2.1. 1. Reconsidérons l'Exemple 4.1.1.

$$(S_1) : Ax = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(S_1) est système de Cramer car $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, donc (S_1) a une solution unique (x^*, y^*) avec

$$x^* = \frac{\begin{vmatrix} 13 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-15}{-3} = 5 \Rightarrow \boxed{x^* = 5}$$

$$y^* = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 13 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-24}{-3} = 8 \Rightarrow \boxed{y^* = 8}.$$

Donc $(x^*, y^*) = (5, 8)$ est la solution unique du système (S_1).

2. Résoudre le système linéaire suivant :

$$(S_2)\left\{\begin{array}{l} -x_1+x_2+2x_3=1, \\ 3x_1+x_3=0, \\ -2x_2+5x_3=-2. \end{array}\right.$$

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ et $\det A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -29 \neq 0 \Leftrightarrow (S_2)$ admet une solution unique (x_1^*, x_2^*, x_3^*) avec $x_1^* = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}}{-29}$, $x_2^* = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}}{-29}$,

$x_3^* = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{-29}$.

4.2.2 Cas général

Considérons le système (S) à m équations et à n inconnues. (S) : $AX = B$.
On sait que $\text{rg}(S)$ est le rang de la matrice A.
Supposons que $\text{rg}(S) = r$. C'est l'ordre maximum d'un déterminant non nul extrait de A Supposons que le déterminant non nul est donné par les premières lignes et les r première colonnes de la matrice A qu'on note A_r

$$A_r = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix}$$

Les inconnues correspondantes aux colonnes de A_r sont dites inconnues principales.
Les équations correspondantes aux lignes de A_r sont dites équations principales.

Définition 4.2.1. Les déterminants bordant $\triangle_r = |A_r|$, sont appelés déterminants caractéristiques. On les note par $\triangle_s$. Ils sont donnés par

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{24} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & b_r \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sr} & b_s \end{pmatrix}, \forall r+1 \leq s \leq m.$$

Théorème 4.2.1. *(**Rouché-Fontené**)*
Un système à m équations linéaires, à n inconnues, de rang r admet au moins une solution si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée

(i) $m = r(< n)$,

(ii) $\forall\, s \in \{r+1,\, r+2,\, ...,\, m\},\ \triangle_s = 0.$

Il y a $m - r$ déterminant caractéristique).
Dans ce cas, la solution se ramène à celle d'un système de Cramer (r équations principales et r inconnues principales) après avoir supprimer les $(m - r)$ équations non principales, en donnant aux $(n-r)$ inconnues non principales, des valeurs arbitraires (elles sont considérées comme des paramètres).

Remarque 4.2.1. S'il existe un $\triangle_s \neq 0$ alors le système est impossible.

Cas $n = m$ et $\det A = 0$, le système (S) n'est pas de Cramer.

Exemple 4.2.2. 1. Soit le système d'équations linéaires suivant :

$$(I)\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 2, \\ -4x_1 + 2x_2 = -4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

On a $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, mais $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 0$, donc (I) n'est pas de Cramer. En effet , les deux équations sont proportionnelles, donc équivalentes. On peut simplement exprimer x_2 en fonction de x_1 (ou le contraire) : $x_2 = 2x_1 - 2$. Donc le système (I) admet une infinité de solutions $\{(x_1, 2x_1 - 2),\ x_1 \in \mathbb{R}\}$.

2. Soit le système d'équations linéaires suivant :

$$(II)\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 + 4x_3 = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, mais $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$, donc (II) n'est pas de Cramer, le rang de A ($\text{rg}A = r < 3$).

Remarque 4.2.2. Le rang d'une matrice A est l'ordre du déterminant non nul, le plus élevé, extrait de A.

Parmi les matrices d'ordre 2 extraites de A, on trouve la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ de déterminant égal à 3. Il résulte que $\text{rg}M = 2$.
Le système associé à M est donné comme suit :

$$(II)' \begin{cases} x_1 = 1 - 2x_3, \\ -x_1 + 3x_2 = -1 - x_3, \end{cases}$$

Les deux inconnues x_1, x_2 sont les inconnues principales et x_3 est un paramètre. Le système $(II)'$ admet une solution (paramétrique) unique donnée par

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 - 2x_3 & 0 \\ -1 - x_3 & 3 \end{vmatrix}}{3} = 1 - 2x_3,\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 - 2x_3 \\ -1 & -1 - x_3 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-3x_3}{3} = -x_3.$$

Donc $x_1 = \boxed{1 - 2x_3}$, $x_2 = \boxed{-x_3}$.
On porte cette solution $(x_1, x_2) = (1 - 2x_3, -x_3)$ dans la troisième équation du système (II), on obtient
$2x_1 + 4x_3 = 2(1 - 2x_3) + 4x_3 = 2 - 4x_3 + 4x_3 = 2.$
La solution $(x_1, x_2) = (1 - 2x_3, -x_3)$ vérifie le système (II) donc c'est la solution paramétrique de (II). On dit aussi que le système (II) admet une infinité de solutions $\{(1 - 2x_3, -x_3, x_3),\ x_3 \in \mathbb{R}\}$.

Cas où $m < n$, le système (S) n'est pas de Cramer.

Exemple 4.2.3. Soit le système d'équations linéaire suivant :

$$(III)\begin{cases} -2x_1+2x_2=5, \\ -x_1+3x_2=-3, \\ x_1-2x_2=4. \end{cases}$$

On a $A=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, donc le système n'est pas de Cramer $(n=3, m=2)$. Parmi les matrices d'ordre 2 extraites de la matrice A associée au système (III), on trouve $M=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=-4\neq 0$, donc $\mathrm{rg}M=2$. M est associée au système

$$(III)'\begin{cases} -2x_1+2x_2=5, \\ -x_1+3x_2=-3. \end{cases}$$

qui admet une unique solution $(x_1,x_2)=(\frac{-21}{4},\frac{-11}{4})$. Mais la solution $(\frac{-21}{4},\frac{-11}{4})$ ne vérifie pas l'équation $x_1-2x_2=4\,(\frac{-21}{11}-2\frac{-11}{4}=\frac{1}{4}\neq 4)$. Donc le système (III) n'admet pas de solution.

Cas où $m>n$, le système (S) n'est pas de Cramer.

Exemple 4.2.4. Soit le système d'équations linéaires suivant :

$$(IV)\begin{cases} x_1-x_2+x_3=3, \\ -2x_1+3x_2-x_3=1. \end{cases}$$

On a $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, donc le système n'est pas de Cramer $(n=2, m=3)$. Parmi les matrices d'ordre 2 extraites de la matrice A associée au système (IV) , on trouve $M=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=1\neq 0$, donc $\mathrm{rg}M=2$ la matrice M est associée au système

$$(IV)'\begin{cases} x_1-x_2=3-x_3, \\ -2x_1+3x_2=1+x_3. \end{cases}$$

x_1, x_2 sont les inconnues principales et x_3 est un paramètre.
Le système $(IV)'$ a une solution unique donnée par le couple

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{\begin{vmatrix} 3 - x_3 & -1 \\ 1 + x_3 & 3 \end{vmatrix}}{1}, \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 - x_3 \\ -2 & 1 + x_3 \end{vmatrix}}{1} \right) = (-2x_3 + 10, -x_3 + 7).$$

Donc le système (IV) admet une infinité de solutions,

$$\{(-2x_3 + 10, -x_3 + 7, x_3),\ x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Chapitre 5

Exercices avec et sans solutions

Sommaire

Dans ce chapitre, on va donné quelques exercices avec solutions sur les cinq chapitres traités dans ce document ainsi que quelques sujets d'examens des années précédentes.

5.1 Exercices sur le Chapitre 1

Exercice 5.1.1. 1) Sur $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on définit une loi interne $(+)$ et une loi externe $(.)$ par $(+) : (x, y) + (x^{'}, y') = (xx', y + y')$ et $(.) : \ \lambda.(x, y) = (x^{\lambda}, \lambda y)$.
$(E, +, .)$ est-il un $\mathbb{R}$ espace vectoriel ?
2) Vérifier si les parties suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont des sous espaces vectoriels du $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ usuel.

(a) $A = \{\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3/\ x + y = 0\}$

(b) $B = \{\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3/\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

(c) $C = \{\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3/\ x = 2y\ et\ z = 0\ \}$

(d) $D = \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + xy \geq 0\}$.

Solution. 1. Vérifions si $(E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, +, .)$ est un espace vectoriel.

(1) $(E, +)$ est-il un groupe commutatif ?

Soient $(x, y), (x', y') \in E$: $(x, y) + (x', y') = (xx', y + y') = (x'x, y' + y)$
$(x, y) + (x', y') = (x', y') + (x, y)$, d'où $(+)$ est commutative.
Soient $(x, y), (x', y'), (x'', y'') \in E$
$[(x, y) + (x', y')] + (x'', y'') = (xx', y + y') + (x'', y'') = (xx'x'', y + y' + y'')$
$(xx'x'', y + y' + y'') = (x, y) + (x'x'', y' + y'') = (x, y) + [(x', y') + (x'', y'')]$,
d'où $(+)$ est associative.
Soit $(x, y) \in E$, $\exists ?(e_1, e_2) \in E : (x, y) + (e_1, e_2) = (e_1, e_2) + (x, y) = (x, y)$.
$(x, y) + (e_1, e_2) = (xe_1, y + e_2) = (x, y)$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad xe_1 = x \Rightarrow e_1 = 1, \\ &\Rightarrow \quad y + e_2 = y \Rightarrow e_2 = 0. \end{aligned}$$

Donc $(e_1, e_2) = (1, 0) \in E$ est l'élément neutre de la loi $(+)$.
Soit $(x, y) \in E$, $\exists ?(x', y') \in E$: $(x, y) + (x', y') = (x', y') + (x, y) = (1, 0)$.
$(x, y) + (x', y') = (xx', y + y') = (1, 0)$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad xx' = 1 \Rightarrow x' = \frac{1}{x},\ x \neq 0, \\ &\Rightarrow \quad y + y' = 0 \Rightarrow y' = -y. \end{aligned}$$

D'où $(x', y') = (\frac{1}{x}, -y)$ est le symétrique de (x, y) par rapport à la loi $(+)$.
Donc on déduit que $(E, +)$ est un groupe commutatif.

(2) Les propriétés de la loi externe (.) sont-elles vérifiées ?

a. $\forall\, (x, y) \in E : 1.(x, y) = (x^1, 1.y) = (x, y)$.
b. $\lambda \in \mathbb{R}$, $\forall\, (x, y), (x', y') \in E$: $\lambda. ((x, y) + (x', y')) = \lambda.(xx', y + y')$
$((xx')^\lambda, \lambda(y + y')) = (x^\lambda x'^\lambda, \lambda y + \lambda y') = (x^\lambda, \lambda y) + (x'^\lambda, \lambda y')$
$\lambda. ((x, y) + (x', y')) = \lambda.(x, y) + \lambda.(x', y')$.
c. $\forall\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\forall\, (x, y) \in E, (\lambda + \mu).(x, y) = (x^{\lambda+\mu}, (\lambda + \mu)y)$
$(\lambda + \mu).(x, y) = (x^\lambda.x^\mu, \lambda.y + \mu.y) = \lambda.(x, y) + \mu.(x, y)$.
d. $\forall\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\forall\, (x, y) \in E$, $(\lambda.\mu).(x, y) = (x^{\lambda.\mu}, \lambda.\mu.y) = \lambda\mu(x, y)$.

Les deux conditions (1) et (2) sont vérifiées, donc $(E, +, .)$ est un espace vectoriel.

2. Vérifions si les parties suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont des sous espaces vectoriels du $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ usuel.

   (a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ x + y = 0\}$.
   On a $0_{\mathbb{R}^3} \in A$. Soient $(x, y, z), (x', y', z') \in A$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$
   $\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z') = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') : \lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y'$
   $\lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y' = \lambda(x + y) + \mu(x' + y') = 0 + 0 = 0$.
   D'où $\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z') \in A$, donc A est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

   (b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.
   $0_{\mathbb{R}^3} \in B$. Soient $(1, 0, 0), (0, 1, 0) \in B$, mais $(1, 0, 0) + (0, 1, 0) = (1, 1, 0)$ n'est pas dans B, donc B n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

   (c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ x = 2y \,\text{et}\, z = 0\}$.
   $0_{\mathbb{R}^3} \in C$. Soient $(x, y, z), (x', y', z') \in C$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$
   $\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z') = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')$
   $\lambda x + \mu x' = 2\lambda y + 2\mu y' = 2(\lambda x + \mu y)$ et $\lambda z + \mu z' = 0$, d'où C est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

   (d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + xy \geq 0\}$.
   $0_{\mathbb{R}^3} \in D$. Soient $(1, 1), (0, -4) \in D$, mais $((1, 1) + (0, -4)) = (1, -3) \notin D$, donc D n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5.1.2. 1. Montrer que la famille $\{(x_1, x_2)\}$ où $x_1 = (1, 2)$ et $x_2 = (1, 1)$ engendre $\mathbb{R}^2$. Est-elle une base ?

2. La famille $\{x_1, x_2, x_3\} \in \mathbb{R}^3$ avec $x_1 = (1, 1, -1), x_2 = (2, 1, 3)$ et $x_3 = (0, -1, 5)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Solution. 1. Montrons que la famille $\{(x_1, x_2)\}$ où $x_1 = (1, 2)$ et $x_2 = (1, 1)$ engendre $\mathbb{R}^2$.
$\exists ? \, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = \alpha_1(1, 2) + \alpha_2(1, 1) = (\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2)$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & x = \alpha_1 + \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 = -x + y, \\ \Rightarrow \quad & y = 2\alpha_1 + \alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = 2x - y. \end{aligned}$$

Donc $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x,y)=(-x+y)x_1+(2x-y)x_2=(-x+y)(1,2)+(2x-y)(1,1)$.

Soient $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R} :\ \alpha_1x_1+\alpha_2x_2=0_{\mathbb{R}^2}\Rightarrow(\alpha_1+\alpha_2,2\alpha_1+\alpha_2)=(0,0)$, ce qui implique que $\alpha_1=\alpha_2=0$, d'où $\{(x_1,x_2)\}$ est libre, de plus elle engendre $\mathbb{R}^2$ donc elle forme une base de $\mathbb{R}^2$.

2. La famille $\{x_1,x_2,x_3\}\in\mathbb{R}^3$ avec $x_1=(1,1,-1),x_2=(2,1,3)$ et $x_3=(0,-1,5)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
Il suffit de vérifier si $\{x_1,x_2,x_3\}$ est libre.
Soients $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R} :\ \alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3=0_{\mathbb{R}^3}$

$$(\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3,-\alpha_1+3\alpha_2+5\alpha_3)=(0,0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2=0\Rightarrow\alpha_1=-2\alpha_2,\\ \alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0\Rightarrow\alpha_3=-\alpha_2,\\ -\alpha_1+3\alpha_2+5\alpha_3\Rightarrow 0=0.\end{cases}$$

Pour par exemple, $\alpha_1=-2,\alpha_2=1$ et $\alpha_3=-1$, cette famille n'est pas libre. Par conséquent elle ne peut pas être une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5.1.3. Considérons deux s.e.v de $\mathbb{R}^3$, $E=\{(x,x,x)\in\mathbb{R}^3\,/\,x\in\mathbb{R}\}$ et $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,/\,x+2y+3z=0\}$.

1. Déterminer une base de E et F.
2. Montrer que $\mathbb{R}^3=E\oplus F$.

Solution. 1. Cherchons une base de E et F.
$E=\{(x,x,x)\in\mathbb{R}^3\,/\,x\in\mathbb{R}\}=\{x(1,1,1)\,/\,x\in\mathbb{R}\}$, donc E est engendré par le vecteur $x_1=(1,1,1)\neq 0_{\mathbb{R}^3}\Rightarrow x_1$ forme une base de E et on la note B_E.
$F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,/\,x+2y+3z=0\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,/\,x=-2y-3z\}$
$F=\{(-2y-3z,y,z)/\,y,z\in\mathbb{R}\}=\{y(-2,0,1)+z(-3,0,1)/\,y,z\in\mathbb{R}\}$, donc F est engendré par les vecteurs $x_2=(-2,0,1)$ et $x_3=(-3,0,1)$. Vérifions si $\{x_2,x_3\}$ est libre.
Soient $\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R} : \alpha_2x_2+\alpha_3x_3=0_{\mathbb{R}^3}\Rightarrow(-2\alpha_2-3\alpha_3,0,\alpha_2+\alpha_3)=(0,0,0)$.

$$(-2\alpha_2-3\alpha_3,0,\alpha_2+\alpha_3)=(0,0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}-2\alpha_2-3\alpha_3=0\Rightarrow 2\alpha_3-3\alpha_3=-\alpha_3=0\Rightarrow\alpha_3=0,\\ \alpha_2+\alpha_3=0\Rightarrow\alpha_2=-\alpha_3\Rightarrow\alpha_2=0.\end{cases}$$

D'où $\{x_2,x_3\}$ est libre, de plus elle engendre F,donc elle forme une base F et on la note B_F.

2. Montrons que $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$.
   $\mathbb{R}^3 = E \oplus F \Leftrightarrow \begin{cases} 1.\ \dim\mathbb{R}^3 = \dim E + \dim F, \\ 2.\ E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \text{ ou } B_E \cup B_F \text{ est une famille libre.} \end{cases}$
   On a $\dim E + \dim F = 1 + 2 = 3 = \dim\mathbb{R}^3$.
   Montrons la famille $B_E \cup B_F = \{x_1 = (1,1,1), x_2 = (-2,0,1), x_3 = (-3,0,1)\}$.
   Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}^3$: $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$
   $$(\alpha_1 - 2\alpha_2 - 3\alpha_3, \alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 0_{\mathbb{R}^3} \begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \Rightarrow -2\alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \Rightarrow -\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = -\alpha_3. \\ \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0. \end{cases}$$
   D'où $\{x_1, x_2, x_3\}$ est une famille libre. Donc $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$.

Exercice 5.1.4. Dans le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les sous espaces vectoriels suivants :
$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0\}$ et $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + z = 0\}$

1. Déterminer $E \cap F$ et sa base $\mathcal{B}_{E\cap F}$
2. Déterminer une base de E qu'on note par $\mathcal{B}_E$
3. Compléter cette base pour avoir une base de $\mathbb{R}^3$ notée $\mathcal{B}$.
4. Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^3$, exprimer les coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$.

Solution.

1. $E \cap F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \in E \text{ et } (x,y,z) \in F\}$
   $E \cap F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0\}$
   $E \cap F = \{(\frac{-2}{3}z, \frac{-1}{3}z, z),\ z \in \mathbb{R}\} = \{z(\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}, 1),\ z \in \mathbb{R}\}$, d'où $E \cap F$ est engendré par le vecteur $x = (\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}, 1) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, donc il forme une base de $E \cap F$ qu'on note $B_{E\cap F}$.
2. $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = -y - z\}$
   $E = \{(-y-z, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y, z \in \mathbb{R}\} = \{(-y, y, 0) + (-z, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : y, z \in \mathbb{R}\}$
   $E = \{y(-1,1,0) + z(-1,0,1) : y, z \in \mathbb{R}\}$, d'où E est engendré par la famille $\{x_1 = (-1,1,0), x_2 = (-1,0,1)\}$.
   Vérifions si $\{x_1, x_2\}$ est libre. Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$
   $\alpha_1(-1,1,0) + \alpha_2(-1,0,1) = (-\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1, \alpha_2) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$, donc $\{x_1 = (-1,1,0), x_2 = (-1,0,1)\}$ est libre. Par conséquent, $\{x_1, x_2\}$ forme une base de E qu'on note B_E.

3. On peut compléter la base B_E par un vecteur $x_3 = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ qui soit L.I. avec les vecteurs de B_E pour avoir une base de $\mathbb{R}^3$. C'est à dire, on cherche $x_3 \in \mathbb{R}^3$ pour que la famille $\{x_1 = (-1, 1, 0), x_2 = (-1, 0, 1), x_3 = (a, b, c)\}$ soit libre. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} : \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$
$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = (-\alpha_1 - \alpha_2 + a\alpha_3, \alpha_1 + b\alpha_3, \alpha_2 + c\alpha_3) = (0, 0, 0)$.
$$(-\alpha_1 - \alpha_2 + a\alpha_3, \alpha_1 + b\alpha_3, \alpha_2 + c\alpha_3) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha_1 - \alpha_2 + a\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + b\alpha_3 = 0, \\ \alpha_2 + c\alpha_3 = 0. \end{cases}$$
Pour $b = c = 0$, on a $\alpha_1 = \alpha_2 = 0 \Rightarrow a\alpha_3 = 0 \Rightarrow \forall a \neq 0,\ \alpha_3 = 0$. On peut prendre par exemple, $a = 1$, d'où $x_3 = (1, 0, 0)$.
Donc $B = \{x_1 = (-1, 1, 0), x_2 = (-1, 0, 1), x_3 = (1, 0, 0)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Les coordonnées de v dans la base B sont les scalaires $\alpha_1, \alpha_2,\ \alpha_3$ vérifiant : $v = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \Rightarrow (x, y, z) = (-\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1, \alpha_2)$.
$$\begin{cases} x = -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \Rightarrow \alpha_3 = x + y + z, \\ y = \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = y, \\ z = \alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = z. \end{cases}$$
Donc $\forall\, v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $v = yx_1 + zx_2 + (x + y + z)x_3$, d'où $(y, z, x + y + z)$ sont les coordonnées de v dans la base B de $\mathbb{R}^3$.

5.2 Exercices sur le Chapitre 2

Exercice 5.2.1. Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto f_1(x, y) = x^2 + xy$$
$$f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y) \longmapsto f_2(x, y) = (2x + y, x - y)$$
$$f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f_3(x) = \cos x$$
$$f_4 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x, y) \longmapsto f_4(x, y) = (x + 3, y, 4x - y)$$

Solution. Vérifions si les applications suivantes sont linéaires.
$f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto f_1(x,y) = x^2 + xy.$
Soient $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2 : f_1\left((x,y)+(x',y')\right) = f_1(x+x', y+y')$

$$\begin{aligned} f_1(x+x',y+y') = (x+x')^2 + (x+x')(y+y') &= x^2 + x'^2 + 2xx' + xy + xy' + x'y + x'y' \\ &\neq x^2 + xy + x'^2 + x'y' = f_1(x,y) + f_1(x',y'). \\ &\Rightarrow f_1 \text{ n'est pas linéaire.} \end{aligned}$$

$f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto f_2(x,y) = (2x+y, x-y).$
On a $f_2(0_{\mathbb{R}^2}) = 0_{\mathbb{R}^2}$. Soient $\alpha, \mu \in \mathbb{R}$ et $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f_2\left(\lambda(x,y) + \mu(x',y')\right) &= f_2(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') = (2(\lambda x + \mu x') + \lambda y + \mu y', \lambda x + \mu x' - \lambda y - \mu y') \\ &= (2\lambda x + 2\mu x' + \lambda y + \mu y', \lambda x + \mu x' - \lambda y - \mu y') \\ &= (2\lambda x + \lambda y, \lambda x - \lambda y) + (2\mu x' + \mu y', \mu x' - \mu y') \\ &= \lambda(2x+y, x-y) + \mu(2x'+y', x'-y') = \lambda f_2(x,y) + \mu f_2(x',y'), \end{aligned}$$

d'où f_2 est linéaire.
$f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f_3(x) = \cos x.$
On sait que $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \neq \cos x + \cos y \Rightarrow f_3$ n'est pas linéaire.
$f_4 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x,y) \longmapsto f_4(x,y) = (x+3, y, 4x-y).$
On a $f_4(0_{\mathbb{R}^2}) = (3,0,0) \neq 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow f_4$ n'est pas linéaire.

Exercice 5.2.2. Soit $\{e_1, e_2\}$ et $\{u_1, u_2, u_3\}$ les bases canoniques respectives des $\mathbb{R}$ espaces vectoriels $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer l'application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ vérifiant :
   $f(e_1) = 2u_2 + u_3,\ f(e_2) = u_2 - u_1.$
2. Déterminer Imf et préciser sa dimension.

Solution. On a $\{e_1, e_2\}$ et $\{u_1, u_2, u_3\}$ les bases canoniques respectives des $\mathbb{R}$ espaces vectoriels $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminons l'application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ vérifiant
   $f(e_1) = 2u_2 + u_3,\ f(e_2) = u_2 - u_1.$
   On a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $(x,y) = xe_1 + ye_2$

$f(x,y) = f(xe_1 + ye_2) = xf(e_1) + yf(e_2)$
$f(x,y) = -yu_1 + (2x+y)u_2 + 2xu_3$.
Donc $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y,z) = (-y, 2x+y, 2x)$. i.e.

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y,z) = (-y, 2x+y, 2x) \end{array}$$

2. $\text{Im}f = \{f(x,y,z) = (-y, 2x+y, 2x) \in \mathbb{R}^3 :\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.

$$\begin{aligned} &= \{(0,2x,2x) + (-y,y,0) :\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}. \\ &= \{x(0,2,2) + y(-1,1,0) :\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}. \end{aligned}$$

D'où $\text{Im}f$ est engendré par les vecteurs $x_1 = (0,2,2)$ et $x_2 = (-1,1,0)$.
Vérifions si la famille $\{x_1 = (0,2,2), x_2 = (-1,1,0)\}$ est libre.
Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow (-\alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1) = (0,0,0)$.

$$(-\alpha_2, 2\alpha_1+\alpha_2, 2\alpha_1) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ 2\alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0, \end{cases}$$

d'où $\{x_1 = (0,2,2), x_2 = (-1,1,0)\}$ est libre.
Donc $\{x_1 = (0,2,2), x_2 = (-1,1,0)\}$ forme une base de $\text{Im}f$.
D'où $\dim \text{Im}f = 2$.

Exercice 5.2.3. Soit

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+z, y-x, x+y+2z). \end{array}$$

1. Calculer les images par f des vecteurs de la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$. En déduire une base de Imf.
2. Déterminer une base de $Kerf$.
3. L'application f est-elle injective ? surjective ?

Solution.

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto (x+z, y-x, x+y+2z). \end{aligned}$$

1. Calculons les images par f des vecteurs de la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.
   $f(e_1) = (1, -1, 1)$, $f(e_2) = (0, 1, 1)$, $f(e_3) = (1, 0, 2)$.
   On sait que $\mathrm{Im}f = \langle\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}\rangle$. Mais on remarque que :
   $f(e_3) = f(e_1) + f(e_2)$, d'où $\mathrm{Im}f = \langle\{f(e_1), f(e_2)\}\rangle$.
   De plus, $\{f(e_1), f(e_2)\}$ est libre. En effet, soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$.
   $$(\alpha_1, -\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0. \\ \alpha_1 = \alpha_2 = 0. \end{cases}$$
   Donc $\{f(e_1), f(e_2)\}$ est libre, par conséquent elle forme une base de $\mathrm{Im}f$.
2. $\mathrm{Ker}f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}\} = \{(x+z, y-x, x+y+2z) = (0,0,0)\}$.
   $$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad x + z = 0 \Rightarrow z = -x, \\ &\Rightarrow \quad y - x = 0 \Rightarrow y = x, \\ &\Rightarrow \quad x + y + 2z = 0 \Rightarrow 0 = 0. \\ &\Rightarrow \quad \mathrm{Ker}f = \{x(1,1,-1),\ x \in \mathbb{R}\} \\ &\Rightarrow \quad \mathrm{Ker}f \text{ est engendré par le vecteur } x_1 = (1,1,-1) \neq (0,0,0). \end{aligned}$$
   Donc $\{x_1 = (1,1,-1)\}$ est une base de $\mathrm{Ker}f$.
3. L'application f n'est pas injective car $\mathrm{Ker}f \neq 0_{\mathbb{R}^3}$.
   f n'est pas surjective car $\dim \mathrm{Im}f = 2 \neq \dim\mathbb{R}^3$.

Exercice 5.2.4. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n et f une application définie par

$$\begin{aligned} f:E &\longrightarrow E \\ P &\longmapsto f(P) = P + (1-X)P'. \end{aligned}$$

Montrer que f est une application linéaire et donner une base de $Kerf$ et Imf.

Solution. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n et f une application définie par

$$\begin{array}{rcl} f : E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & f(P) = P + (1 - X)P'. \end{array}$$

1. Montrons que f est linéaire.
   On a $f(0_E) = 0_E$, avec 0_E est le polynôme nul.
   Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $P, Q \in E : f(\lambda P + \mu Q) = \lambda P + \mu Q + (1 - X)(\lambda P + \mu Q)'$
   $f(\lambda P + \mu Q) = \lambda P + \mu Q + (1 - X)\lambda P' + (1 - X)\mu Q'$
   $f(\lambda P + \mu Q) = \lambda P + \lambda(1 - X)P' + \mu Q + (1 - X)\mu Q' = \lambda f(P) + \mu f(Q)$.
   Donc f est linéaire.
2. $\mathrm{Ker} f = \{P \in E : f(P) = 0_E\} = \{P \in E : P + (1 - X)P' = 0\}$
   $\mathrm{Ker} f = \{P \in E : P = (X - 1)P'\}$
   $\mathrm{Ker} f = \{P \in E : \frac{P'}{P} = \frac{1}{X-1}, X \neq 1\} = \{P = k(X - 1), X \neq 1\} \Rightarrow \mathrm{Ker} f$ est engendré par $P = k(X - 1)$. Donc $P = k(X - 1)$ forme une base de $\mathrm{Ker} f$.
   On a $E = \langle\{1, X, X^2, ..., X^n\}\rangle \Rightarrow \mathrm{Im} f = \langle\{f(1), f(X), f(X^2), ..., f(X^n)\}\rangle$.
   Mais $f(1) = f(X)$. D'où $\mathrm{Im} f = \langle\{f(X), f(X^2), ..., f(X^n)\}\rangle$.
   De plus, cette famille est libre car les vecteurs sont des polynômes de degré différents. Donc $\langle\{f(X), f(X^2), ..., f(X^n)\}$ est une base de $\mathrm{Im} f$.

5.3 Exercices sur le Chapitre 3

Exercice 5.3.1. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini dans la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ par

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (4x + 3y + 2z, y, -x - y + z). \end{array}$$

1. Déterminer la matrice A associée à f relativement à B.
2. Montrer que $B' = \{u_1 = e_1 - e_3,\ u_2 = -e_1 + e_2,\ u_3 = 2e_1 - e_3\ \}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la matrice P de passage de B à B' et son inverse P^{-1}.

4. Déterminer la matrice A' associée à f relativement à B'.
5. Calculer $(A')^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. En déduire A^n, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Solution. 1. La matrice A associée à f relativement à la base B
$f(e_1) = (4, 0, -1) = 4e_1 + 0e_2 - e_3$, $f(e_2) = (3, 1, -1) = 3e_1 + e_2 - e_3$
et $f(e_3) = (2, 0, 1) = 2e_1 + 0e_2 + e_3$.

$$A = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

2. Montrons que $B' = \{u_1 = e_1 - e_3,\ u_2 = -e_1 + e_2,\ u_3 = 2e_1 - e_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Soient $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \in \mathbb{R} : \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha_1(e_1 - e_3) + \alpha_2(-e_1 + e_2) + \alpha_3(2e_1 - e_3) = (0, 0, 0) \Rightarrow (\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3)e_1 + \alpha_2 e_2 + (-\alpha_1 - \alpha_3)e_3 = (0, 0, 0)$. Comme $\{e_1, e_2, e_3\} = B$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Alors, on a

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_2 & = & 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_3 & = & 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\alpha_3 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 & = & 0 \Rightarrow -\alpha_3 + 0 + 2\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 & = & 0. \end{array}$$

D'où $B' = \{u_1 = e_1 - e_3,\ u_2 = -e_1 + e_2,\ u_3 = 2e_1 - e_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. $$P = P_{(B,B')} = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

La matrice inverse $P^{-1} = P_{(B',B)}$. On a

$$
\begin{aligned}
u_1 &= e_1 - e_3 \\
u_2 &= -e_1 + e_2 \\
u_3 &= 2e_1 - e_3 \\
u_1 - u_3 &= -e_1 \Rightarrow \boxed{e_1 = -u_1 + u_3}. \\
u_1 &= e_1 - e_3 \Rightarrow e_3 = -u_1 + e_1 = -u_1 - u_1 + u_3 \Rightarrow \boxed{e_3 = -2u_1 + u_3}. \\
e_2 &= u_2 + e_1 = -u_1 + u_2 + u_3 \Rightarrow \boxed{e_2 = -u_1 + u_2 + u_3}.
\end{aligned}
$$

$$
P^{-1} = P_{(B',B)} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.
$$

4. La matrice A' associée à f relativement à B'. On a $A' = P^{-1}AP$.

$$
A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}
$$

$$
A' = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}
$$

5. $(A')^n = \underbrace{A' \times A' \ldots \times A'}_{n \text{ fois}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$(A')^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$

$$
A' = P^{-1}AP \Rightarrow (A')^n = P^{-1}A^nP \Rightarrow A^n = P(A')^nP^{-1}.
$$

$$
A^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Exercice 5.3.2. Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$B' = \{e'_1 = e_1 - e_2 + e_3, e'_2 = 2e_1 - e_2 + e_3, e'_3 = 2e_1 - 2e_2 + e_3\}$.

1. Montrer que B' est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Determiner la matrice de passage P de B à B'. Calculer P^{-1}.
3. Determiner la matrice A' de f dans la base B'.
4. Calculer $P^{-1}AP$ en fonction de A'.
5. Calculer A'^4. En déduire A^{4n}.

Solution. 1. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} : \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$
$\alpha_1(e_1 - e_2 + e_3) + \alpha_2(2e_1 - e_2 + e_3) + \alpha_3(2e_1 - 2e_2 + e_3) = (0, 0, 0)$
$(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3)e_1 + (-\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3)e_2 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)e_3 = (0, 0, 0)$.
Comme $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, alors on a

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\alpha_3 &= 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_3 = 0}. \\ -\alpha_1 - \alpha_2 - 0 &= 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\alpha_2 \\ -\alpha_2 + 2\alpha_2 + 0 &= 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_2 = 0} \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = 0}. \end{aligned}$$

Donc B' est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. $P = P_{(B,B')} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} e'_1 & e'_2 & e'_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$

$$P^{-1} = P_{(B',B)} = \begin{array}{c} \\ e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

3. On a $f(x,y,z) = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

   Donc $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+4y+4z, & -x-3y-3z, & 2y+3z \end{pmatrix}$.

   $f(e'_1) = f(1,-1,1) = (1,-1,1) = e'_1$,

   $f(e'_2) = (2,-1,1) = (2,-2,1) = e'_3$,

   $f(e'_3) = f(2,-2,1) = (-2,1,-1) = -e'_2$.

$$A' = \begin{array}{c} \\ e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e'_1) & f(e'_2) & f(e'_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

4. $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A'$.

5. $A'^4 = A'^2A'^2$ et on a $A'^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

   $$A'^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

$$A^4 = PA'P^{-1}PA'P^{-1}PA'P^{-1}PA'P^{-1} = PA'^4P^{-1} = PI_3P^{-1} = I_3 \Rightarrow A^{4^n} = I_3.$$

Exercice 5.3.3. Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déduire A^n en fonction de n.

Solution. 1.

$$\det A = \begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{vmatrix} = -\sin^2\theta - \cos^2\theta = -1 \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ inversible.}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\mathrm{com}A)^t = \frac{1}{\det A}C^t = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on déduit A^n en fonction de n.
   On remarque que $A = A^{-1} \Rightarrow A \times A^{-1} = A \times A = A^2 = I_2$.
   Pour $n = 2k$, on a $A^{2k} = (A^2)^k = I_2^k = I_2$.
   Pour $n = 2k+1$, on a $A^{2k+1} = (A^2)^k A = I_2^k A = I_2 A = A$, on déduit que

$$A^n = \begin{cases} I_2 & \text{si}\, n = 2k,\ k \in \mathbb{N}^*, \\ A & \text{si } n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Exercice 5.3.4. Soit $\in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

1. Calculer $\det A$ le déterminant de A.
2. Determiner les valeurs de a, b, c et d qui annule $\det A$.

Solution. 1.

$$\det A = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b & b & b \\ b & c & c \\ b & c & d \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} a & b & b \\ a & c & c \\ a & c & d \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} a & b & b \\ a & b & c \\ a & c & d \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} a & b & b \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

Donc $\det A = a(b-a)(c-b)(d-c)$.

2. Les valeurs de a, b, c et d pour que $\det A = 0$.

$$\det A = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 & \text{ou,} \\ a = b & \text{ou,} \\ b = c & \text{ou,} \\ c = d & . \end{cases}$$

Exercice 5.3.5. Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de la matrice A.
2. La matrice A est-elle inversible si oui calculer son inverse A^{-1}.

Solution. 1.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2.$$

2. $\det A = -2 \neq 0 \Leftrightarrow A$ est inversible et sa matrice inverse notée par $A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^t$.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

5.4 Exercices sur le Chapitre 4

Exercice 5.4.1. Soit le système d'équations linéaires suivant :

$$(S_1) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = -1, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

1. Écrie le système (S_1) sous la forme $AX = b$ en précisant A et b.
2. Le système (S_1) est-il de Cramer ?
3. Résoudre le système (S_1).
4. Déterminer le système homogène $(S_1)_h$ du système (S_1).
5. Résoudre le système $(S_1)_h$.

Solution. 1. On a

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $(S_1) = AX = b$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. $\det A = 12 \neq 0$, donc (S_1) est un système de Cramer et admet une solution unique.
3. La solution du système (S_1) est donnée par

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{12} = \frac{3}{2},\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{12} = 1,\ x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{12} = \frac{1}{2}.$$

Donc la solution unique du système (S_1) est $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2})$.

4. Le système (S_h) est donné par

$$AX = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque $\det A = 12 \neq 0$, donc le système (S_h) admet une solution unique donnée par

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{12} = 0, \; x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{12} = 0, \; x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{12} = 0.$$

Donc la solution du système (S_h) est $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$.

Exercice 5.4.2. Soit le système d'équations linéaires suivant :

$$(S_2) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 7, \\ 3x_1 - x_2 = 5, \\ x_1 - 5x_2 = -11. \end{cases}$$

Le système (S_2) admet-il une solution ?

Solution. On a $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, donc le système (S_2) n'est pas de Cramer ($n = 3$, $m = 2$). Parmi les matrices d'ordre 2 extraites de la matrice A associée au système (S_2), on trouve $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$.
Donc $\mathrm{rg}M = 2$.
M est associé au système $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 7, \\ 3x_1 - x_2 = 5, \end{cases}$
qui admet une unique solution $(x_1, x_2) = (2, 1)$. Mais la solution $(2, 1)$ ne vérifie pas l'équation $x_1 - 5x_2 = -11$.
Donc le système (S_2) n'admet pas de solution.

Exercice 5.4.3. Résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$(S_3) \begin{cases} x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 4x_4 - 8x_5 = 11, \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 6x_5 = -7, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 4. \end{cases}$$

Solution. On a $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 & 4 & -8 \\ 5 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 3 & -2 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,5}(\mathbb{R})$ donc le système (S_3) n'est pas de Cramer ($n = 3$, $m = 5$). Tous les déterminants d'ordre 3 extraits de la matrice

A associée au système (S_3) sont nuls. Parmi les matrices d'ordre 2 extraites de la matrice A associée au système (S_3), on trouve $M = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $\det M = 26$ et $\mathrm{rg} M = 2$.

M est associée au système $(S_3)'$ $\begin{cases} x_1 - 5x_2 = -7x_3 - 4x_4 + 8x_5 + 11, \\ 5x_1 + x_2 = 3x_3 - 2x_4 - 6x_5 - 7, \\ 3x_1 - 2x_2 = -2x_3 - 3x_4 + x_5 + 4. \end{cases}$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -7x_3 - 4x_4 + 8x_5 + 11 & -5 \\ -2x_3 - 3x_4 + x_5 + 4 & -2 \end{vmatrix}}{26} = \frac{-24x_3 - 7x_4 + 21x_5 - 2}{26},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -7x_3 - 4x_4 + 8x_5 + 11 \\ 5 & -2x_3 - 3x_4 + x_5 + 4 \end{vmatrix}}{26} = \frac{33x_3 + 17x_4 - 39x_5 - 51}{26}.$$

Cette solution ne vérifie pas la troisième équation du système $(S_3)'$.
Donc le système (S_3) n'admet pas de solution.

5.5 Exercices sans solutions

Exercice 5.5.1. On considère dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs suivants :

$v_1 = (1,2,3,4),\ v_2 = (1,1,1,3),\ v_3 = (2,1,1,1),\ v_4 = (-1,0,-1,2)$ et $v_5 = (2,3,0,1)$.

Soient E l'espace vectoriel engendré par $v_1,\ v_2$ et v_3 et F celui engendré par v_4 et v_5. Calculer les dimensions respectives de E, F et $E+F$.

Exercice 5.5.2. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto (-2x-4z, 3y, 2x+4z) \end{aligned}$$

1. Déterminer une base de $Kerf$. f est-il injectif ? Peut-il être surjectif ? Pourquoi ?
2. Déterminer une base de Imf. Quel est le rang de f ?
3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = Kerf \oplus Imf$.

Exercice 5.5.3. Soient $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ et $C = \{u_1, u_2\}$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ et f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(e_1) = u_1 + u_2,\ f(e_2) = 2u_1 \text{ et } f(e_3) = u_1 - u_2.$$

1. Trouver la matrice M associée à f relativement aux bases B et C.
2. Montrer que $B' = \{e'_1 = e_1 + e_2, e'_2 = e_1 + e_3, e'_3 = e_1 + e_2 + e_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et $C' = \{u'_1 = u_1 + u_2, u'_2 = -u_1 + u_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer la matrice de passage P de la base B à la base B' et la matrice de passage Q de la base C à la base C'. En déduire la matrice M' associée à f par rapport aux bases B' et C'.

Exercice 5.5.4. Etant donné a un réel, on considère les quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants :
$v_1 = (a,1,0,a),\ v_2 = (2a,0,1,0),\ v_3 = (2,1,a,0)$ et $v_4 = (a,0,0,1)$.
Déterminer suivant les valeurs de a la dimension du sous espace vectoriel E de $\mathbb{R}^4$ engendré par ces quatre vecteurs.

Exercice 5.5.5. Dans l'espace vectoriel des polynômes $R[X]$, on considère le sous espace vectoriel F engendré par les polynômes $1+X$ et $(1+X)^2$ et le sous espace vectoriel H engendré par les polynômes $1-X,\ (1-X)^2$ et $X(1-X)$.

1. Déterminer les dimensions de F et H.
2. Déterminer $F \cap H$ et trouver une base de $F \cap H$.

Exercice 5.5.6. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z) = (x-z,\ 2x+y-3z,\ -y+2z) \end{array}$$

et soit $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer $f(e_1),\ f(e_2)$ et $f(e_3)$, puis déterminer les coordonnées de $f(e_1),\ f(e_2)$ et $f(e_3)$ dans la base canonique.
2. Déterminer une base de $Kerf$ et une base de Imf.
3. f est - elle injective ? surjective ? justifier votre réponse.

Exercice 5.5.7. Soit $\mathbb{R}^3$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, F et G des sous ensembles de $\mathbb{R}^3$ définis par :
$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-2y+z=0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x-y+2z=0\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base de F et une base de G.
3. Donner une base de $F \cap G$.
4. Les espaces F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 5.5.8. Soit $\{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer l'application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant :
   $f(e_1) = 2e_1 + e_2,\ f(e_2) = e_1 - e_2$.
2. f est-elle injective ? Pourquoi ?

Exercice 5.5.9. Soit f une application définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (-2x+4y+4z, -x+z, -2x+4y+4z) \end{array}$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer une base de $Kerf$ et une base de Imf.
3. A-t-on $Kerf \oplus Imf = \mathbb{R}^3$?

Exercice 5.5.10. Soient $u = (2, -1, 1)$, $v = (3, 2, 0)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par u et v
et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = y, \ z = 0\}$.

1. Montrer que G est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de F de G et de $F \cap G$.
3. $\mathbb{R}^3$ est-il une somme directe de F et G ? Justifier votre réponse.

Exercice 5.5.11. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (-2x - 4z, 3y, 2x + 4z) \end{aligned}$$

1. Déterminer une base de $Kerf$. f est-il injectif ? Peut-il être surjectif ? Pourquoi ?
2. Déterminer une base de Imf. Quel est le rang de f ?
3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = Kerf \oplus Imf$.

Exercice 5.5.12. Soient $B = (e_1, e_2, e_3)$ et $C = (u_1, u_2)$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ et f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(e_1) = u_1 + u_2, \ f(e_2) = 2u_1 \text{ et } f(e_3) = u_1 - u_2.$$

1. Trouver la matrice M associée à f relativement aux bases B et C.
2. Montrer que $B' = \{e'_1 = e_1 + e_2, e'_2 = e_1 + e_3, e'_3 = e_1 + e_2 + e_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et $C' = \{u'_1 = u_1 + u_2, u'_2 = -u_1 + u_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer la matrice de passage P de la base B à la base B' et la matrice de passage Q de la base C à la base C'. En déduire la matrice M' associée à f par rapport aux bases B' et C'.

Exercice 5.5.13. Soit $\mathbb{R}^3$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, F et G des sous ensembles de $\mathbb{R}^3$ définis par :
$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + 2z = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base de F et une base de G, puis une base de $F \cap G$.
3. Les espaces F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 5.5.14. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (-2x - 4z, 3y, 2x + 4z) \end{array}$$

1. Déterminer une base de $Kerf$ et une base de Imf. Quel est le rang de f ?
2. Montrer que $\mathbb{R}^3 = Kerf \oplus Imf$.

Exercice 5.5.15. Soit $B = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer l'application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant :
   $f(e_1) = 2e_1 + e_2$, $f(e_2) = e_1 - e_2$.
2. f est-elle injective ? Surjective ? Justifier votre réponse.
3. Trouver la matrice M associée à f relativement à la base B. M est-elle inversible ? Justifier votre réponse.

Bibliographie

[1] S. Balac et F. Sturm. Algèbre et analyse : Cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2009.

[2] R. Cairoli. Algèbre linéaire. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes 1987.

[3] J.P. Escofier. Toute l'algèbre de la Licence : Cours et exercices corrigés. Dunod, Paris 2002, 2006.

[4] P. Florent, M. Lauton et G. Lauton. Algèbre linéaire. Les presses de l'Université du Québec, Canada 1977.

[5] H. Roudier. Algèbre linéaire : Cours et exercices. Vuibert 2008.