Considérez un point M dans l'espace, défini par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) et sphériques (r, θ, φ), où r est la distance radiale, θ est l'angle polaire (mesuré à partir de l'axe Z positif), et φ est l'angle azimutal (mesuré dans le plan XY à partir de l'axe X positif) (Fig.3).

1. Exprimez les coordonnées cartésiennes (x, y, z) de ce point M en fonction de (r, θ, φ) et vice-versa :

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \tan\varphi = \dfrac{y}{x} \\ \cos\theta = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{cases}$$

2. Calculez les vecteurs de base unitaires $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ du système de coordonnées sphériques en ce point M, en fonction des vecteurs unitaires cartésiens $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Quelle est la différence entre ces deux systèmes de vecteurs ?

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k} \\ \vec{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} - \sin\theta\,\vec{k} \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath} \end{cases}$$

La différence principale entre ces deux systèmes de vecteurs est que les vecteurs cartésiens $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ sont constants dans tout l'espace, tandis que les vecteurs sphériques $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ varient en fonction de la position du point M (base locale .

3. Calculer $d\vec{e}_r/d\theta$, $d\vec{e}_r/d\varphi$, $d\vec{e}_\theta/d\theta$, $d\vec{e}_\theta/d\varphi$ et $d\vec{e}_\varphi/d\varphi$;

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta \; ; \; \frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} = \sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r \; ; \; \frac{d\vec{e}_\theta}{d\varphi} = \cos\theta\,\vec{e}_\varphi$$

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} = -\cos\varphi\,\vec{\imath} - \sin\varphi\,\vec{\jmath} = -\sin\theta\,\vec{e}_r - \cos\theta\,\vec{e}_\theta$$

4. Soit le vecteur $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$. Dans la base des coordonnées sphériques $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$, déterminer les expressions de $\overrightarrow{OM}(t)$ et $d\overrightarrow{OM}/dt$ ainsi que leurs modules.

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k} = r\left[\sin\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k}\right] = r\vec{e}_r(t)$$

$$\left\|\overrightarrow{OM}(t)\right\| = r$$

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\left[\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\vec{e}_r}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\right] = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + r\frac{d\varphi}{dt}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$

$$\left\|\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right\| = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}$$