Université Abderrahmane Mira de Bejaia

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

Espaces d'Orlicz

Cours, $2^{ème}$ année master mathématiques.
Option : Analyse et Probabilité

Fatiha BOULAHIA épouse TALBI [1].

1. Pour toute remarque, suggestion ou correction concernant ce document, merci de me contacter à cet e-mail : boulahia_fatiha@yahoo.fr

Table des matières

Introduction

Nous avons rédigé ce polycopié pour le cours "Théorie des espaces d'Orlicz", destinés aux étudiants de deuxième année master option Analyse et Probabilité à l'Université Abderrahmane Mira de Bejaia durant les années, $2011-2012$, $2012-2013$ et $2013-2014$. Le polycopié nécessite des connaissances de bases en théorie de la mesure et d'analyse fonctionnelle pour être abordé, ce qui justifie l'introduction du premier chapitre "Rappels de la théorie de la mesure et d'analyse fonctionnelle".

Le présent ouvrage sert de support pour le cours associé, à savoir le module "Théorie des espaces d'Orlicz", l'objectif du cours est de présenter une nouvelle classe d'espaces fonctionnels qui constituent une extension naturelle des espaces de Lebesgue L^p. Ils sont générés par des fonctions dites fonctions d'Orlicz ou N-fonctions généralisant les fonctions polynômiales $\phi_p(x) = |x|^p$ génératrices des espaces de Lebesgue. Le cours en lui-même n'aborde qu'une petite portion des notions sur les espaces d'Orlicz.

Le polycopié est avant tout tourné vers le côté théorique de ces espaces mais il contient des exemples ainsi que de nombreux exercices corrigés et non corrigés.

Nous avons souhaité que le présent ouvrage soit aussi structuré que possible. Par ailleurs, nous avons fait en sorte que le polycopié soit aussi complet que possible tout en gardant une taille raisonnable (moins de 100 pages).

Nous avons tout d'abord présenté, dans ce polycopié, les principaux outils qui sont utiles à la construction de ces espaces à savoir quelques notions de la théorie de la mesure et d'intégration et des fonctions convexes qui sont à la base de la définition de ces derniers. En fait les deux premiers chapitres permettent un rafraîchissement des notions de base déjà étudiées et qui sont indispensables pour aborder la théorie des espaces d'Orlicz.

Les propriétés topologiques et métriques de ces espaces dépendent étroitement de la nature de la croissance de la fonction d'Orlicz qui les définis, ainsi une étude de ces fonctions, leurs conjuguées et leurs propriétés de croissance sont présentées dans le chapitre 3.

Dans le chapitre 4, on a défini les espaces d'Orlicz L_ϕ et E_ϕ, dits "grand et petit espaces d'Orlicz respectivement", ainsi que leurs propriétés topologiques, particulièrement les conditions de séparabilité, de réflexivité, les questions de dualité et les injections continues.

Pour terminer nous présentons les différentes sources qui nous ont servi pour la rédaction du présent ouvrage.

Chapitre 1

Généralités

1.1 Quelques rappels de la théorie de la mesure

Définition 1.1. *Soit E un ensemble quelconque. Une* ***tribu*** *(ou σ-algèbre) sur E est une famille $\mathcal{A}$ de parties de E telles que*

1. $E \in \mathcal{A}$,
2. $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^C \in \mathcal{A}$ *(Stabilité par passage au complémentaire)*.
3. *Si $A_n \in \mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a aussi* $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A_n \in \mathcal{A}$ *(Stabilité par union dénombrable)*.

Les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés les parties mesurables, ou parfois $\mathcal{A}$-mesurables s'il y a ambiguïté. $(E, \mathcal{A})$ est appelé espace mesurable.

Définition 1.2. *Une* ***mesure positive****, ou simplement* ***une mesure****, sur un ensemble mesurable $(E, \mathcal{A})$ est une application $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ vérifiant :*

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. Pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties mesurables deux à deux disjointes on a,

$$\mu(\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Le triplet $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est appelé espace mesuré.

1.1.1 Mesure : σ-finie, non atomique, complète

Définition 1.3. *On dit que la mesure μ est $\sigma-$**finie** lorsqu'il existe un recouvrement dénombrable de E par des sous-ensembles de mesures finies, c'est-à-dire il existe $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ tels que*

$$\mu(E_n) < +\infty \text{ et } E = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} E_n.$$

Définition 1.4. *Un ensemble $A \in \mathcal{A}$ est dit* ***atome*** *si, $\mu(A) > 0$ et pour tout sous-ensemble mesurable B de A avec $\mu(B) < \mu(A)$ on a $\mu(B) = 0$.*

Une mesure est dite ***non atomique*** *si pour tout ensemble mesurable A avec $\mu(A) > 0$, il existe un sous-ensemble mesurable B de A tel que*

$$0 < \mu(B) < \mu(A).$$

C'est-à-dire, A n'est pas un atome.

Définition 1.5. *On dit que la mesure μ est* ***complète*** *si tout ensemble $\mu-$négligeable est mesurable. C'est-à-dire,*

$$A \text{ est négligeable} \Longleftrightarrow \mu(A) = 0$$

1.1.2 Fonctions mesurables

Définition 1.6. *Soit* $(E, \mathcal{A})$ *et* $(F, \mathcal{B})$ *deux espaces mesurables. On dit que l'application* $f : (E, \mathcal{A}) \to (F, \mathcal{B})$ *est mesurable pour les tribus* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *(où* f *est*$(\mathcal{A}, \mathcal{B}) -$ *mesurable) si*

$$\forall B \in \mathcal{B}, \ \text{on a } f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

Autrement dit, l'image réciproque de toute partie mesurable est mesurable.

1.1.3 Mesure à densité

A partir d'une mesure et d'une fonction mesurable positive, on peut définir une autre mesure de la manière suivante :

Définition 1.7. *Soient* $(E, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et* f *une fonction mesurable positive sur* E *alors* $\forall A \in \mathcal{A}$ *la fonction*

$$\begin{array}{rcl} \gamma : \mathcal{A} & \to & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ A & \mapsto & \int\limits_E f\chi_A d\mu \end{array}$$

est une mesure sur $\mathcal{A}$ *dite* ***mesure de densité*** f *par rapport à* μ *et on écrit* $\gamma = f\mu$.

1.1.4 Mesure absolument continue

Définition 1.8. *Soient* μ *et* γ *deux mesures sur un espace mesurable* $(E, \mathcal{A})$. *On dit que* γ *est* ***absolument continue*** *par rapport à* μ, *et on note* $\gamma \prec\prec \mu$ *si*

$$\forall A \in \mathcal{A}, \ \mu(A) = 0 \Longrightarrow \gamma(A) = 0.$$

Exemple 1.1. *Si* f *est une fonction mesurable positive, alors la mesure* γ *de densité* f *par rapport à* μ *définie par* $\gamma(A) = \int\limits_E f\chi_A d\mu$ *est absolument continue par rapport à* μ *et on l'appelle* ***dérivée de Radon Nikodym****, en référence au théorème de Radon Nikodym qui établit la réciproque de cet exemple.*

Définition 1.9. *On dit que deux mesures* μ_1*et* μ_2 *sur* $(E, \mathcal{A})$ *sont* ***étrangères****, ou* ***disjointes****, et l'on écrit* $\mu_1 \perp \mu_2$, *s'il existe un ensemble* $A \in \mathcal{A}$ *tel que* $\mu_2(A) = \mu_1(A^c) = 0$.

Autrement dit, s'il existe des parties mesurables disjointes A_1, A_2 *telles que* μ_1 *soit portée par* A_1*et* μ_2 *soit portée par* A_2.

1.1.5 Théorème de Radon-Nikodym

Théorème 1.1. (*La décomposition de Lebesgue*)

Soient μ *et* γ *deux mesures* $\sigma-$*finies sur un espace mesurable* $(E, \mathcal{A})$. *Alors il existe un unique couple de mesures* (μ_1, μ_2) *telles que :*

$$\mu = \mu_1 + \mu_2$$
$$\mu_1 \prec\prec \gamma \text{ et } \mu_2 \perp \gamma$$

Théorème 1.2. (*Radon-Nikodym*)

Soient μ *et* γ *deux mesures* $\sigma-$*finies sur un espace mesurable* $(E, \mathcal{A})$ *telle que* $\gamma \prec\prec \mu$. *Alors il existe une fonction mesurable* $f : (E, \mathcal{A}) \to \left(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}_+\right)\right)$ *unique à un ensemble négligeable près, telle que pour tout* $A \in \mathcal{A}$ *on a*

$$\gamma(A) = \int_A f d\mu = \int_E f\chi_A d\mu.$$

1.2 Quelques rappels d'analyse fonctionnelle

1.2.1 Espaces de Banach

Définition 1.10. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle norme sur E et on la note $\|.\|$, toute application définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant :*

1. **La séparation**
$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$
2. **L'homogénéité**
$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E$$
3. **L'inégalité triangulaire**
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in E$$

Le couple $(E, \|.\|)$ est appelé espace vectoriel normé

Exemple 1.2. *Soit $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ alors,*

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \; \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}, \; \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\preceq n} |x_i|, \; et \; \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}, \; p \in]1, +\infty[\tag{1.1}$$

sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque 1.1. .

1. $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|.\|_p$ est noté l_p^n, $\quad 1 \leq p < +\infty$.
2. $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ est noté l_∞^n.,

Exemple 1.3. *Soit $E = C([a, b], R)$ l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$,*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

est une norme sur E, dite norme de la convergence uniforme.

Définition 1.11. *Normes équivalentes*

Deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ définies sur E sont dites **équivalentes** s'il existe deux constantes réelles α,β telles que
$$\alpha \|.\|_1 \leq \|.\|_2 \leq \beta \|.\|_1 .$$

Propriété 1.1. *Dans un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.*

Remarque 1.2.

1. *Les propriétés topologiques d'un espace de Banach sont des propriétés qui se conservent par passage à une norme équivalente, exemple la complétude.*
2. *Les propriétés géométriques ou métriques d'un espace de Banach sont des propriétés qui ne se conservent pas par passage à une norme équivalente, exemple l'uniforme convexité.*

Remarque 1.3. .

Définition 1.12.

1. *Un espace normé $(E, \|.\|)$ est **complet** si toute suite de Cauchy de points de E converge vers un point de E.*

2. *On appelle espace de* ***Banach*** *tout espace normé complet.*

Exemple 1.4.

1. $\mathbb{R}^n$ *muni de l'une des normes données dans* (1.1) *est un espace de Banach.*
2. *L'espace* $C([a,b])$ *muni de la norme de la convergence uniforme est un espace de Banach.*
3. *Soit* $(X, \|.\|_X)$ *et* $(Y, \|.\|_Y)$ *deux sous espaces de Banach d'un espace de Hausdroff (séparé)Z. Alors,*

   (a) $X \cap Y$ *muni de la norme*

   $$\|f\|_{X\cap Y} = \max(\|f\|_X, \|f\|_Y)$$

   est un espace de Banach.

   (b) $X + Y = \{f + g \ : \ f \in X \ \text{et}\ g \in Y\}$ *muni de la norme*

   $$\|h\|_{X+Y} = \inf\{\|f\|_X + \|g\|_Y \ : \ f \in X,\ g \in Y \ \text{et}\ h = f + g\}$$

   est un espace de Banach.

1.2.2 Espaces de Hilbert

Produit scalaire

On donne la définition d'un produit scalaire dans le cas d'un espace vectoriel réel.

Définition 1.13. *Soit* H *un* $\mathbb{R}-$*espace vectoriel. On appelle* ***produit scalaire*** *toute application* $\langle .,. \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ *définie positive, bilinéaire et symétrique.*
Autrement dit, $\langle .,. \rangle$ *vérifie*

1. $\langle x, x\rangle \geq 0,\ \forall x \in H \quad \text{et}\ \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0,$
2. $\begin{cases} \langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y\rangle = \alpha_1\langle x_1, y\rangle + \alpha_2\langle x_2, y\rangle, & \forall x_1, x_2, y \in E \ \text{et}\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \\ \text{et} & \\ \langle x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2\rangle = \beta_1\langle x, y_1\rangle + \beta_2\langle x, y_2\rangle, & \forall y_1, y_2, x \in E \ \text{et}\ \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$
3. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle.$

Exemple 1.5. .

1. *Soient* $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, *et* $y = (y_1, y_2, ..., n_n) \in \mathbb{R}^n$. *Alors,*

   $$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

   est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.
2. *L'application* $\langle .,. \rangle : C([a,b]) \times C([a,b]) \to \mathbb{R}$ *définie par*

   $$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$$

   est un produit scalaire sur $C([a,b])$.

Définition 1.14. *Un espace de Hilbert* H *est un espace de Banach pour la norme induite par le produit scalaire*

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >},\ \forall x \in H$$

Remarque 1.4. .

1. *Deux éléments x, y de H sont orthogonaux si $\langle x, y\rangle = 0$ et on écrit $x \perp y$*
2. *La norme induite par le produit scalaire vérifie* ***l'identité du parallélogramme*** *suivante*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

1.2.3 Propriétés des espaces de Banach

Les injections continues

Définition 1.15. *Soient $(X, \|.\|_X)$ et $(Y, \|.\|_Y)$ deux espaces de Banach, on dit que X* ***s'injecte continûment*** *dans Y et on écrit $X \hookrightarrow Y$ si*

$$\begin{cases} X \subset Y \\ \textit{et} \\ \textit{il existe une constante } c > 0 \textit{ tel que } \|f\|_Y \leq c\,\|f\|_X \quad \forall f \in X. \end{cases}$$

La compacité

Le terme de compacité évoque une idée de petitesse. Ainsi dans un espace topologique compact, il n'est pas possible de mettre une infinité de points sans qu'ils s'accumulent quelque part. Du fait de petitesse, les compacts sont définis par une propriété de finitude topologique. La définition repose sur les notions de recouvrement ouvert et de sous-recouvrement. Plus précisément, un espace topologique séparé est compact, où il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue si, chaque fois qu'il est recouvert par des ouverts, il est recouvert par un nombre fini d'entre eux. En fait la notion de compacité est une abstraction de la propriété vérifiée par les intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$ et que l'on peut énoncer comme suit :

Si $[a, b] \subset \underset{i\in I}{\cup}\theta_i$ où les θ_i sont les ouverts dans $\mathbb{R}$, alors il existe une suite finie θ_{i_1},..., θ_{i_n} parmi les θ_i telle que :

$$[a, b] \subset \theta_{i_1} \cup \theta_{i_2} \cup ..... \cup\ \theta_{i_n}$$

Ainsi, plusieurs propriétés des segments de la droite réelle $\mathbb{R}$ se généralisent aux espaces compacts, ce qui confère à ces derniers un rôle privilégié dans divers domaines des mathématiques, c'est le cas notamment, dans les problèmes d'existence d'extrema et de points fixes pour des applications continues.

Définition 1.16. .

1. *Soit (E, τ) un espace topologique. On dit que la famille d'ouverts $(\theta_i)_{i\in I}$ de E constitue* ***un recouvrement ouvert*** *de E si $E = \underset{i\in I}{\cup}\theta_i$.*
2. *Un espace topologique est dit* ***compact*** *s'il est* ***séparé*** *et si de tout recouvrement de E par des ouverts, on peut extraire un sous recouvrement fini.*
3. *Une partie A d'un espace topologique séparé X est dite* ***relativement compacte*** *dans X si son adhérence $\overline{A}$ dans X est compacte.*

La séparabilité

Définition 1.17. .

1. *Une partie D d'un espace normé E est dite dense dans E si sa fermeture $\overline{D}$ coïncide avec E $\left(\overline{D} = E\right)$.*
2. *Un espace normé E est dit séparable s'il existe un sous ensemble $F \subset E$ dénombrable et dense dans E.*

Exemple 1.6. *Tout espace normé de dimension finie est séparable.*

Le dual d'un espace de Banach

Définition 1.18. *On appelle le dual topologique d'un espace de Banach E et on noté E^* l'ensemble des formes linéaires continues sur E. C'est-à-dire*

$$E^* = \{f : E \to \mathbb{R} \text{ linéaire continue}\}$$

E^*est un espace de Banach muni de la norme définie par

$$\|f\|_{E^*} = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$$

Théorème 1.3. (*Le théorème de représentation de Riesz*)
Soit H^* le dual topologique d'un espace de Hilbert H. Soit $a \in H$, on note

$$\begin{array}{rccc} \phi_a : & H & \to & R \\ & x & \mapsto & < x, x > \end{array}$$

Alors, $\phi :\ a \in H \mapsto \phi_a \in H^*$ est bien définie, et c'est un isomorphisme de H sur H^*.

La stricte convexité

Définition 1.19. *Soit E un espace vectoriel normé. E est dit **strictement convexe** si,*

$$\forall x,\, y \in S(E) \text{ tels que } x \neq y \text{ on a} : \left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1.$$

où $S(E)$ désigne la sphère unité de E.

Définition 1.20. *On dit que $x \in S(X)$ est un point extrême de la boule unité fermé $B(X)$ si,*

$$\forall y,\, z \in S(X) : x = \frac{1}{2}(y+z) \Longrightarrow x = y = z.$$

Proposition 1.1. *Un espace vectoriel normé E est strictement convexe si tout point de $S(E)$ est un point extrême de $B(E)$, c'est-à-dire,*

$$Extr(B(E)) = S(E)$$

L'uniforme convexité

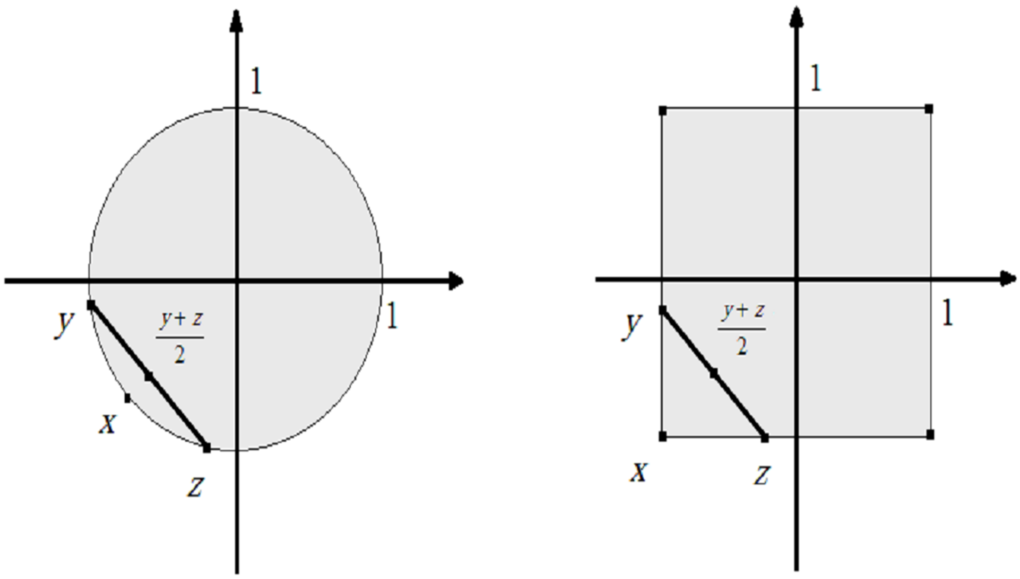
Définition 1.21. *On dit qu'un espace de Banach E est* ***uniformément convexe*** *si* $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta>0$ *tel que* $\forall x,y \in E$ $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ *alors*

$$\|x-y\| > \varepsilon \Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1-\delta.$$

Proposition 1.2. *Un espace* ***uniformément convexe*** *est* ***strictement convexe****.*

Exemple 1.7. .

1. $(\mathbb{R}^2, \|.\|_2)$ *est uniformément convexe.*
2. $(\mathbb{R}^2, \|.\|_1)$ *n'est pas uniformément convexe.*
3. *Les espaces de Hilbert sont uniformément convexes. Ceci découle de l'identité du parallélogramme.*



Les points extrêmes de la boule unité de $\mathbb{R}^2$ *pour* $\|.\|_2$ *et* $\|.\|_\infty$.

La réflexivité

Définition 1.22. *Un espace de Banach E est réflexif lorsque l'injection canonique π est surjective c.-à-d.* $\pi(E) = E^{**}$ *où π est définie comme suit*

$$\begin{array}{rcl} \pi : E & \to & E^{**} \\ x & \mapsto & \pi(x) \end{array}$$

avec $\pi(x)(f) = f(x)$, $\forall x \in E$*. Dans ce cas on écrit* $E \approxeq E^{**}$.

Exemple 1.8. *Les espaces uniformément convexes sont réflexifs.*

1.3 Les espaces de Lebesgue L^p $1 \leq p \leq \infty$

Définition 1.23. *Pour* $p \in [1, \infty[$ *l'espace de Lebesgue* $\mathcal{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$, *noté* $\mathcal{L}^p$, *est l'ensemble de toutes les fonctions Lebesgue mesurables sur* E *à valeurs réelles telles que* $|f|^p$ *soit* μ*-intégrable. C'est à dire*

$$\mathcal{L}^p = \left\{ f : M(E) \longrightarrow \mathbb{R}, \int_E |f|^p \, d\mu < \infty \right\},$$

il est muni de la semi norme

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p} = \left(\int_E |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 1.24. *Lorsque* $p = \infty$, *on définit l'espace des fonctions* ***essentiellement bornées*** *comme suit :*

$$\mathcal{L}^\infty = \{ f : E \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable telle que } \exists c \geq 0 : |f(x)| \leq c \ \ \mu - p.p \text{ sur } E \},$$

dont la semi norme est

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} = \underset{x \in \Omega}{\operatorname{sup} ess} \ f = \inf \{ c \geq 0, |f(x)| \leq c \ \mu - p.p \text{ sur } E \},$$

où $\sup ess \ f$ *désigne le* ***sup essentiel*** *de* f *sur* Ω

Remarque 1.5. .

Pour $1 \leq p \leq \infty$, *l'espace* $\mathcal{L}^p$ *quotienté par la relation d'équivalence "* $= \mu - p.p$*" est noté* $L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ *ou simplement* L^p.

Si $f \in \mathcal{L}^p$, *on pourra noté* $\overline{f}$ *sa classe d'équivalence, qui est donc un élément de* L^p, *mais il est fréquent de continuer à la noter* f. *Les semi normes* $\|.\|_{\mathcal{L}^p}$ *et* $\|.\|_{\mathcal{L}^\infty}$ *deviennent des normes sur* L^p *et* L^∞ *respectivement et on les notes* $\|.\|_{L^p}$ *et* $\|.\|_{L^\infty}$ *respectivement.*

1.3.1 Propriétés élémentaires

Pour tout $1 \leq p < \infty$, *on note* q *l'exposant conjugué de* p, *c'est-à-dire* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Inégalité de Hölder

Soit $1 \leq p < \infty$, *si* $f \in L^p$ *et* $g \in L^q$ *alors,*

$$\begin{cases} f.g \in L^1 \\ \text{et} \int_E |f.g| \, d\mu \leq \|f\|_{L^p} . \|g\|_{L^q} \end{cases}$$

Proposition 1.3. .

1. *Si la mesure de* E *est finie, alors* $L^p \subset L^r, \forall p \geq r$.
2. *Pour tout* $1 \leq p \leq \infty$, L^p *est un espace de Banach.*
3. L^2 *est un espace de Hilbert, les propriétés de cet espace ont énormément d'applications en analyse.*
4. *L'espace des fonctions continues à support compact* $C_c(E)$ *est dense dans l'espace* L^p *pour* $1 \leq p < \infty$.

5. *L'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur Ω à support compact $D(\Omega)$ est dense dans l'espace L^p pour $1 \leq p < \infty$.*
6. *L^p est réflexif pour $1 < p < \infty$. L^1 et L^∞ ne sont pas réflexifs.*
7. *L^p est séparable pour $1 \leq p < \infty$ et L^∞ n'est pas séparable.*
8. *Si $1 < p < \infty$ l'espace L^p est uniformément convexe.*

Théorème de représentation de Riesz dans les L^p

Théorème 1.4. *Pour tout $1 \leq p < \infty$, le dual topologique de L^p s'identifie à L^q de la façon suivante : A toute forme linéaire continue f sur L^p il existe un et un seul $g \in L^q$ tel que*

$$\langle f, v\rangle = \int_E g v d\mu, \qquad \forall v \in L^p,$$

de plus,

$$\|f\|_{(L^p)^*} = \|g\|_{L^q}.$$

1.3.2 Les résultats de convergence

Les résultats de convergence dans les espaces de Lebesgue, nous permettent d'intervertir les opérations d'intégration et de limite sous des conditions très faibles (exemple la convergence presque partout). Ce qui n'est pas vrai pour la théorie de Riemann.

Lemme de Fatou

Lemme 1.1. *Soit $(f_n)_n$une suite de fonctions mesurables positives, alors*

$$\int_E \underline{lim}_{n\to+\infty} f_n d\mu \leq \underline{\lim}_{n\longrightarrow\infty} \int_E f_n d\mu$$

Théorème de la convergence monotone ou Beppo-Levi

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite ***croissante*** *de fonctions mesurables positives telles que $\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n = f$. Alors,*

$$f \in M^+ \text{ et } \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

Théorème de la convergence dominée

Soient 1$\leq p < \infty$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de L^p telles que

$$\begin{cases} f_n \text{ converge } \mu - p.p \text{ vers une fonction mesurable } f \\ \text{et} \\ \text{il existe } g \in L^p \text{ tel que pour tout } n \in \mathbb{N},\ |f_n| \leq g\ \mu - p.p \end{cases}$$

Alors,

$$f \in L^p \text{ et } \lim_{n\longrightarrow\infty} \|f_n - f\|_{L^p} = 0 \text{ c.-à-d. } \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_E |f_n - f|\, d\mu = 0$$

Ce qui donne

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E \lim_{n\longrightarrow\infty} f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

1.3.3 La compacité

Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov

Théorème 1.5. (*voir [3]*)
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $A \subset \Omega$.
Soit $\mathcal{F}$ un sous ensemble borné de $L^p(\Omega)$ où $1 \leq p < \infty$. On suppose que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \text{tel que } \delta < d(A, \Omega^c)$$

de sort que

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(A)} < \varepsilon,\ \text{pour tout } h \in \mathbb{R}^N \text{ où } \|h\|_{\mathbb{R}^N} < \delta \text{ et } f \in \mathcal{F}.$$

Alors, $\mathcal{F}_{|A}$ est relativement compact dans $L^p(A)$.
Ici $d(A, \Omega^c)$ désigne la distance entre A et le complémentaire de Ω.

Chapitre 2

Les fonctions convexes

2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1. *Soient E un espace vectoriel réel et f une application définie sur E à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. f est dite*

1. ***convexe*** *si* $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in [0,1]$, *on a*
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),$$
2. ***strictement convexe*** *si* $\forall x, y \in E, x \neq y, \forall \lambda \in [0,1]$ *on a*
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$
3. ***concave*** *si* $\forall x, y \in E,\ \forall \lambda \in [0,1]$ *on a*
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Graphiquement, la convexité de f veut dire que la courbe représentative de f est au dessous de ses cordes (une corde est un segment joignant deux points de la courbe de f)

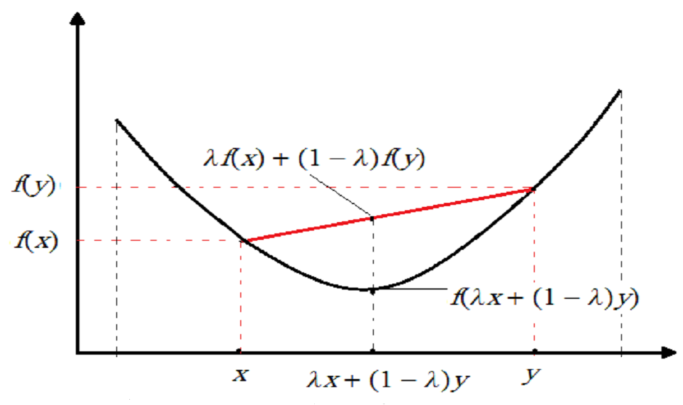


Figure 2.1 – Fonction convexe

Remarque 2.1. .

1. *Si f est convexe alors $(-f)$ est concave.*
2. *Si f est strictement convexe alors f est convexe.*
3. *L'ensemble des fonctions convexes sur E n'est pas un espace vectoriel, car si $\lambda < 0$ alors λf est concave.*
4. *Un ensemble A est convexe si et seulement si χ_A (la fonction indicatrice de A) est convexe.*

Définition 2.2. *Le **domaine** d'une fonction $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ noté $Dom(f)$ est l'ensemble des points où elle ne prend pas la valeur $+\infty$ (elle peut prendre la valeur $-\infty$)*

$$Dom(f) = \{x \in E \text{ tel que } f(x) < +\infty\}.$$

Remarque 2.2. .

1. *f est dite **propre** si son domaine est non vide et f est finie. Autrement dit, les fonctions propres ne prennent jamais la valeur $-\infty$ et ne sont pas identiques à $+\infty$.*
2. *Le domaine d'une fonction convexe est convexe.*

Définition 2.3. ***L'épigraphe*** *d'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ noté $epi(f)$ est la partie de l'espace $E \times \mathbb{R}$ qui est au dessus de son graphe.*

$$epi(f) = \{(x, u) \in E \times \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) \leq u\}$$

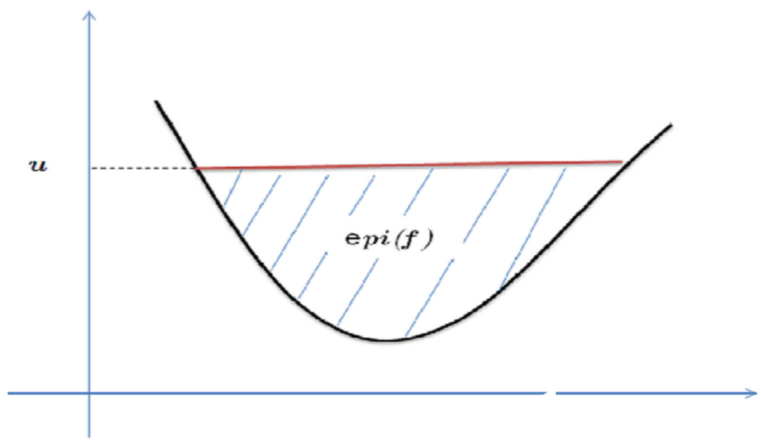


FIGURE 2.2 – Epigraphe d'une fonction convexe

Proposition 2.1. .

1. *$f : E \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe si et seulement si son épigraphe est un ensemble convexe de $E \times \mathbb{R}$.*
2. *Toute composition d'une fonction convexe f et d'une fonction convexe croissante ϕ est convexe. La composée de deux fonctions convexes n'est pas nécessairement convexe,*
   on peut prendre comme exemple $f(x) = -x$ et $g(x) = x^2$, alors $(f \circ g)(x) = -x^2$ qui n'est pas convexe.

3. *Toute combinaison linéaire à coefficients positifs d'une famille de fonctions convexes est convexe.*
4. *Le produit de deux fonctions convexes n'est pas toujours convexe, on prend $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ deux fonctions convexes, mais $x \mapsto x^3$ n'est pas convexe.*
5. *Soit J un ensemble et $(f_j)_{j\in J}$ une famille de fonctions convexes sur E telles que pour tout $x \in E$, $\sup\limits_{j\in J} f_j(x) < +\infty$ alors l'enveloppe supérieure g définie par*

$$g(x) = \sup_{j\in J} f_j(x)$$

est convexe sur E.

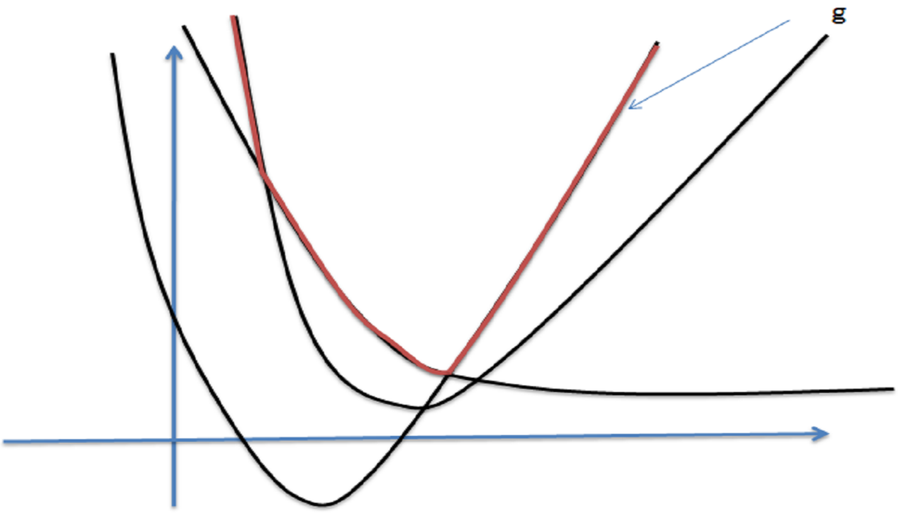


FIGURE 2.3 – Envelope supérieure

Remarque 2.3. *L'enveloppe inférieure $g = \inf\limits_{j\in J}(f_j)$ d'une famille de fonctions convexes n'est pas en général convexe, comme on peut le voir sur la figure suivante.*

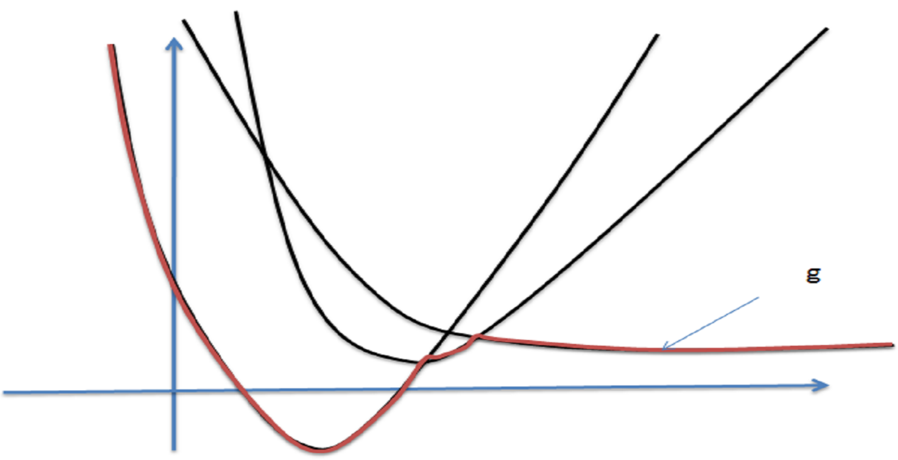


FIGURE 2.4 – Envelope inférieure

2.2 Régularité des fonctions convexes

Nous allons maintenant nous intéresser aux liens entre la convexité, la continuité et la dérivabilité d'une fonction. On dispose d'un résultat assez fort qui nous dit que la convexité implique la continuité. En revanche une fonction convexe n'est pas nécessairement dérivable, mais si elle l'est, on peut en déduire certaines propriétés.

2.2.1 La continuité

Théorème 2.1. *Si f est une fonction convexe sur $[a, b]$ alors f est continue sur $]a, b[$.*

Démonstration. Soit $x_0 \in]a, b[$, on désigne par M la borne supérieure de f sur un intervalle $I_0 = [c, d] \subset [a, b]$ de centre x_0.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de I_0 qui converge vers x_0, le segment qui joint x_0 à x_n est tout entier inclus dans I_0.

Pour démontrer la continuité à droite en x_0, on suppose que $x_n > x_0$ et on considère d'abord x_n comme barycentre à coefficients positifs du couple (x_0, d), à savoir

$$x_n = t_n x_0 + (1 - t_n)d, \text{ avec } \ t_n = (x_n - d)/(x_0 - d) \in [0, 1]$$

En utilisant la convexité de f et le fait que $t_n \in [0, 1]$, on obtient

$$f(x_n) = f(t_n x_0 + (1 - t_n)d) \leq t_n f(x_0) + (1 - t_n)f(d) \leq f(x_0) + (1 - t_n)f(d),$$

ce qui entraîne que

$$f(x_n) - f(x_0) \leq (1 - t_n)M. \tag{2.1}$$

On considère maintenant x_0 comme barycentre à coefficients positifs du couple (c, x_n), alors

$$x_0 = \lambda_n x_n + (1 - \lambda_n)c\ .$$

Ce qui implique que

$$\lambda_n = (x_0 - c)/(x_n - c).$$

D'où

$$x_0 = \lambda_n x_n + c - \lambda_n c,$$

ou encore

$$\lambda_n(x_n - c) = x_0 - c.$$

Avec les mêmes arguments que précédemment, on obtient

$$f(x_0) - f(x_n) \leq (1 - \lambda_n)(f(b) - f(x_n)) \leq M(1 - \lambda_n). \tag{2.2}$$

Les deux inégalités (2.1) et (2.2) donnent

$$-(1 - t_n)2M \leq f(x_0) - f(x_n) \leq M(1 - \lambda_n).$$

Comme $t_n \to 1$ et $\lambda_n \to 1$ lorsque $x_n \to x_0$, on en déduit la continuité à droite.

Un raisonnement analogue, échangeant les rôles de c et d, permet d'obtenir la continuité à gauche. □

Remarque 2.4. *Une fonction convexe sur $[a, b]$ n'est pas nécessairement continue sur tout l'intervalle de $[a, b]$ comme le montre l'exemple suivant :*

$$\begin{array}{rcl} f : [0,1] & \to & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 \ si \ 0<x<1 \\ 1 \ si \ \ x\in\{0,1\} \end{cases} \end{array}$$

2.2.2 La dérivabilité

Théorème 2.2. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur l'intervalle I, alors*

1. *f admet une dérivée à droite $f'_d(a)$ et une dérivée à gauche $f'_g(a)$ en tout point a de $\mathring{I}$.*
2. *Les fonctions dérivées à droite et à gauche sont croissantes sur $\mathring{I}$ et pour $a < b$ dans $\mathring{I}$, on a*

$$f'_g(a) \leq f'_d(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'_g(b) \leq f'_d(b)$$

Démonstration. 1) Commençons par montrer l'existence des deux dérivées à droite et à gauche.

Soit $h_1,\ h_2 \in \mathbb{R}$ tels que $0 < h_1 < h_2$ et $x \in I$, alors

$$x - h_2 \leq x - h_1 \leq x \leq x + h_1 \leq x + h_2.$$

D'après l'inégalité des trois cordes (voir l'exercice 2.4), on obtient

$$\frac{f(x) - f(x - h_2)}{h_2} \leq \frac{f(x) - f(x - h_1)}{h_1} \leq \frac{f(x + h_1) - f(x)}{h_1} \leq \frac{f(x + h_2) - f(x)}{h_2}. \tag{2.3}$$

Grâce a l'inégalité (2.3), on aura

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x) - f(x - h)}{h} > -\infty.$$

Donc f est dérivable à gauche de x, et on note le nombre dérivé à gauche de x par $f'_g(x)$.

Toujours grâce à (2.3) on obtient

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} < +\infty.$$

Donc f est dérivable à droite et on note le nombre dérivé à droite de x par $f'_d(x)$ et on a

$$f'_g(x) \leq f'_d(x).$$

2) Montrons que f'_g et f'_d sont croissantes sur $\mathring{I}$.

Soit $a, b \in \mathring{I}$, avec $a < b$, alors il existe $x, y \in \mathring{I}$ tels que $x < a < y < b$ car $\mathring{I}$ est un ouvert dans $\mathbb{R}$.

D'après l'inégalité des trois cordes appliquée à $x < a < y$ puis à $a < y < b$, on obtient

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a} \leq \frac{f(y) - f(b)}{y - b}.$$

Donc

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(a) - f(x)}{a - x} = f'_g(a) \leq \frac{f(y) - f(b)}{y - b}.$$

Ce qui donne

$$f'_g(a) \leq \lim_{y \to b^-} \frac{f(y) - f(b)}{y - b} = f'_g(b)$$

Donc f'_g est croissante sur $\mathring{I}$.

Un raisonnement analogue donne que f'_d est croissante. $\square$

Remarque 2.5. *Une fonction convexe n'est pas nécessairement dérivable en tout point comme le montre l'exemple de la valeur absolue sur $[-1, 1]$.*

2.3 Exercices

2.3.1 Exercices avec solutions

Exercice 2.1. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Montrer que f est convexe sur I si et seulement si*

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{1}{2}(f(x)+f(y)). \tag{2.4}$$

Solution 2.1. .

La nécessité

Si f est convexe alors on a certainement l'inégalité (2.4)

La suffisance

Pour montrer que (2.4) est suffisante pour la convexité de f on commence par montrer par récurrence sur n que

$$f(\frac{kx+(2^n-k)y}{2^n}) \leq \frac{k}{2^n}f(x) + (\frac{2^n-k}{2^n})f(y); \qquad \forall k = 0,..,2^n. \tag{2.5}$$

Pour $n=0$, on a $k \in \{0,1\}$.

Si $k=0$, on trouve

$$f(0) = f(0).$$

Si $k=1$ on aura

$$f(x) = f(x).$$

Supposons que l'inégalité (2.5) est vraie pour n et on démontre qu'elle est vraie pour $(n+1)$.

$$\begin{aligned}
f(\frac{kx+(2^{n+1}-k)y}{2^{n+1}}) &= f\left(\frac{1}{2}\frac{k}{2^n}x + \frac{1}{2}(1+1-\frac{k}{2^n}y\right) \\
&= f\left(\frac{(\frac{k}{2^n}x+(1-\frac{k}{2^n})y)+y}{2}\right) \\
&\leq \frac{1}{2}f(y) + \frac{1}{2}f(\frac{kx+(2^n-k)y}{2^n}) \\
&\leq \frac{1}{2}f(y) + \frac{1}{2}f(\frac{k}{2^n}x+(1-\frac{k}{2^n})y).
\end{aligned}$$

Par l'hypothèse de récurrence on obtient

$$\begin{aligned}
f(\frac{kx+(2^{n+1}-k)y}{2^{n+1}}) &\leq \frac{1}{2}f(y) + \frac{1}{2}\left[\frac{k}{2^n}f(x) + (1-\frac{k}{2^n})f(y)\right] \\
&\leq \frac{1}{2}f(y) + \frac{k}{2^{n+1}}f(x) + \frac{1}{2}(1-\frac{k}{2^n})f(y) \\
&\leq \frac{k}{2^{n+1}}f(x) + (\frac{2^{n+1}-k}{2^{n+1}})f(y).
\end{aligned}$$

D'où

$$f(\frac{kx+(2^n-k)y}{2^n}) \leq \frac{k}{2^n}f(x) + (\frac{2^n-k}{2^n})f(y), \qquad \forall k = 0,..,2^n.$$

On suppose maintenant que $\forall (x,y) \in I^2$ on a

$$f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{1}{2}(f(x)+f(y)),$$

et montrons que $\forall\alpha \in [0,1]$, *on a*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)\,y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)\,f(y).$$

Soit $\alpha \in [0,1]$ *alors il existe une suite* $\left(\frac{k}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui converge vers* α, $\quad k = 0,..,2^n$ *d'après l'inégalité* (2.5) *on a*

$$\lim_{n\to+\infty} f(\frac{kx+(2^n-k)y}{2^n}) \leq \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{k}{2^n}f(x) + (\frac{2^n-k}{2^n})f(y)\right]$$

Par la convergence de $\left(\frac{k}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *vers* α *et la continuité de* f *on obtient*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)\,y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)\,f(y)$$

Exercice 2.2. *Soit* $x < z < y$ *trois réels, alors il existe* $\lambda \in]0,1[$ *tel que*

$$z = \lambda x + (1-\lambda)y.$$

Solution 2.2. *Ce résultat s'obtient facilement, en posant* $\lambda = \frac{y-z}{y-x}$.

Exercice 2.3. *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$.

Montrer que la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ *est convexe sur* I *si et seulement si pour tout* $a \in I$, *l'application* $\tau_a : I\backslash\{a\} \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$\tau_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

est croissante sur $I\backslash\{a\}$.

La fonction τ_a *représente le taux d'accroissement de* f *au voisinage de* a

Solution 2.3. .

La nécessité

Supposons que la fonction f *est convexe sur* I *et montrons que* τ_a *est croissante sur* $I\backslash\{a\}$.

Soit $x, y \in I\backslash\{a\}$ *avec* $x < y$. *Trois cas peuvent se présenter :* $a < x < y$, $\;x < a < y\;$ *ou* $x < y < a$.

Si $a < x < y$, *on pose*

$$\lambda = \frac{y-x}{y-a} > 0.$$

On aura,

$$x = \lambda a + (1-\lambda)y \text{ et } 1-\lambda = \frac{x-a}{y-a} > 0.$$

Puisque f *est une fonction convexe sur* I, *on en déduit que*

$$f(x) = f(\lambda a + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(y).$$

Ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &\leq (1-\lambda)(f(y)-f(a)) \\ &\leq \frac{x-a}{y-a}(f(y)-f(a)). \end{aligned}$$

En divisant par $(x-a)$, on obtient,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$$
$$\tau_a(x) \leq \tau_a(y).$$

Donc τ_a est bien croissante.
Les deux autres cas se traitent de la même façon que le premier cas.
La suffisance
Supposons que pour tout $a \in I$, τ_a est une fonction croissante sur $I \backslash \{a\}$ et montrons que f est une fonction convexe sur I.

Soit $(x,y) \in I^2$, sans perte de généralité on suppose que $x < a < y$. Alors, d'après l'exercice précédent il existe $\lambda \in]0,1[$ tel que

$$a = \lambda x + (1-\lambda)y.$$

Par hypothèse τ_a est croissante alors

$$\tau_x(a) \leq \tau_x(y).$$

C'est à dire

$$\frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

Comme $x < a < y$, on a $\lambda = \frac{y-a}{y-x}$ et $1-\lambda = \frac{a-x}{y-x}$ on obtient,

$$f(a)-f(x) \leq (1-\lambda)(f(y)-f(x))$$

Ce qui est équivalent à

$$f(a) \leq (1-\lambda)f(y) + \lambda f(x) \text{ avec } a = \lambda x + (1-\lambda)y.$$

Donc f est une fonction convexe sur I.

Exercice 2.4. *Soient I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, et a, b, c trois éléments de I avec $a < c < b$. Montrer l'inégalité suivante dite inégalité des trois cordes.*

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(c)}{b-c}$$

Solution 2.4. *Ces inégalités sont une conséquence de l'exercice 2.3.*

Exercice 2.5. *Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et croissante. Montrer que la fonction ϕ définie sur $[a,b]$ par*

$$\phi(x) = \int_a^x \varphi(t)dt$$

est convexe sur $[a,b]$.

Solution 2.5. *Soient $x, y \in [a,b]$ et $\lambda \in]0,1[$, sans perdre de généralité on peut supposer que $x < y$. On doit montrer que*

$$\phi(\lambda x + (1-\lambda)y \leq \lambda\phi(x) + (1-\lambda)\phi(y).$$

On pose,

$$\Delta = \phi\left[\lambda x + (1-\lambda)y\right] - \lambda\phi(x) - (1-\lambda)\phi(y),$$

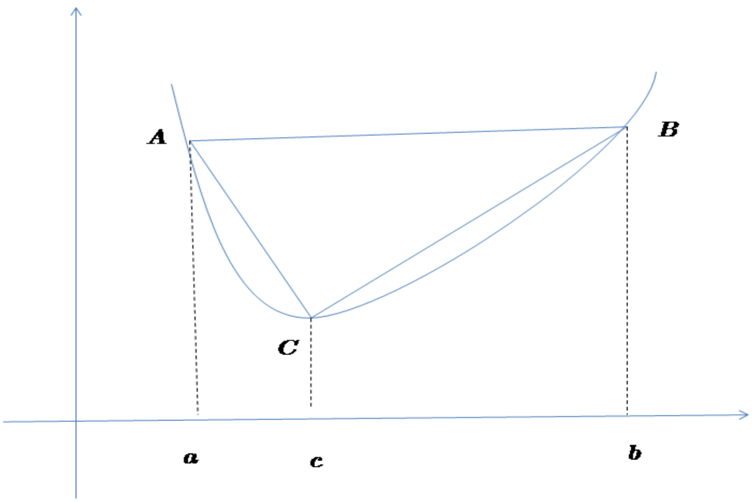


FIGURE 2.5 – Trois cordes

alors

$$\Delta = \int_a^{\lambda x+(1-\lambda)y} \varphi(t)dt - \lambda \int_a^x \varphi(t)dt - (1-\lambda)\int_a^y \varphi(t)dt.$$

D'après la relation de Chasles sur les intégrales, on aura

$$\begin{aligned}\Delta &= -(1-\lambda)\int_x^y \varphi(t)dt + \int_x^{\lambda x+(1-\lambda)y} \varphi(t)dt.\\ &= -(1-\lambda)\int_0^{y-x} \varphi(x+t)dt + (1-\lambda)\int_0^{y-x} \varphi\left[x+(1-\lambda)t\right]dt.\\ &= (1-\lambda)\int_0^{y-x} (\varphi(x+(1-\lambda)t) - \varphi(x+t))dt.\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse que φ est croissante, on obtient

$$(1-\lambda)\int_0^{y-x} (\varphi(x+(1-\lambda)t) - \varphi(x+t))dt \leq 0.$$

Exercice 2.6. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Montrer que si f' est croissante sur I alors f est convexe.*

Solution 2.6. *Raisonnons par l'absurde.*

Si f n'est pas convexe sur I alors il va exister a et b dans I tels que $a < b$ et $\lambda \in]0,1[$ avec

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) > \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b).$$

Posons $c = \lambda a + (1-\lambda)b$ alors,

$$a < c < b \text{ et } f(c) > \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b).$$

Ceci est équivalent à

$$\lambda(f(c) - f(a)) > (1-\lambda)(f(b) - f(c).$$

Or, $\lambda = \frac{b-c}{b-a}$ et $1-\lambda = \frac{c-a}{b-a}$, donc

$$\frac{b-c}{b-a}(f(c) - f(a)) > \frac{c-a}{b-a}(f(b) - f(c).$$

Ce qui donne,

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} > \frac{f(b)-f(c)}{b-c}.$$

D'après le théorème des accroissements finis, il existe $\alpha \in]a,c[$ et $\beta \in]c,b[$ tels que

$$f(c)-f(a) = f^{'}(\alpha)(c-a) \text{ et } f(b)-f(c) = f^{'}(\beta)(b-c)$$

On déduit de ce qui précède que $f^{'}(\alpha) > f^{'}(\beta)$ et $\alpha < \beta$, ce qui est contradictoire avec la croissance de $f^{'}$, donc f est nécessairement convexe sur I.

Remarque 2.6. .

En utilisant le résultat de cet exercice on obtient le critère suivant pour caractériser la convexité des fonctions deux fois dérivables :

Si f est deux fois dérivable sur un intervalle I, alors f est convexe sur I si seulement si $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in I$.

Exercice 2.7. *Montrer que toute fonction convexe ϕ sur $[a,b]$ vérifie la condition de Lipchitz sur $[a,b]$. Autrement dit, il existe $M > 0$ tel que $\forall x,y \in [a,b]$ on a*

$$|\phi(y)-\phi(x)| \leq M\,|y-x|\,.$$

Démonstration. Soit $x,y \in [a,b]$ tels que $a \leq x \leq y \leq b$. Par les inégalités des trois cordes on a :

$$\frac{\phi(x)-\phi(a)}{x-a} \leq \frac{\phi(y)-\phi(x)}{y-x} \leq \frac{\phi(b)-\phi(y)}{b-y}.$$

En faisant tendre x vers a on trouve ;

$$\phi_d^{'}(a) \leq \frac{\phi(y)-\phi(x)}{y-x} \leq \phi_g^{'}(b).$$

Donc il existe $M > 0$ tel que $\forall x,y \in [a,b]$ on a $\left|\dfrac{\phi(y)-\phi(x)}{y-x}\right| \leq M.$ □

2.3.2 Exercices sans solutions

Exercice 2.8. *Le nombre de points de non dérivabilité d'une fonction convexe sur un intervalle I est au plus dénombrable.*

Exercice 2.9. *Soit $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes*

1. *ϕ est convexe,*
2. *Il existe une fonction affine $L_n(u) = a_n x + b_n$ telle que $\phi(u) = \sup\limits_n L_n(u)$.*

Chapitre 3

Les fonctions d'Orlicz et les $N-$fonctions

3.1 Définitions et exemples

Définition 3.1. *On appelle* ***fonction d'Orlicz*** *une fonction* $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty]$ *telle que*

1. ϕ *est paire, convexe et continue à gauche sur* $[0, \infty[$
2. $\phi(0) = 0$ *et* ϕ *n'est pas identiquement nulle.*
   Si de plus,
3. $\phi(x) > 0$ *pour tout* $x > 0$,
4. $\phi(x) < +\infty$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *c'est à dire* ϕ *est à valeurs dans* $[0, \infty[$,
5. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\phi(x)}{x} = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\phi(x)}{x} = \infty$,
   la fonction ϕ *est dite* $N-$***fonction***.

Remarque 3.1. *Le vocabulaire pour ces fonctions change d'un auteur à un autre. Parfois une* $N-$*fonction est appelée fonction d'Orlicz et les fonctions d'Orlicz sont dites* $\phi-$*fonctions. Donc à chaque fois qu'on regarde un document sur les espaces d'Orlicz, il faut vérifier les conditions imposées à la fonction qui définit ces espaces. Les espaces d'Orlicz et leurs propriétés ont été initialement étudiées dans le cas d'une* $N-$*fonction (voir [**?**]).*

Exemple 3.1. *Les fonctions suivantes,*

$$\psi(x) = \exp(|x|) - 1, \phi_p(x) = \frac{|x|^p}{p}, 1 \leq p < +\infty \text{ et } \phi_{\infty,1}(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; x \in [-1, \, 1] \\ |x| - 1 & sinon. \end{cases}$$

sont des fonctions d'Orlicz. De plus, ϕ_p *est une* $N-$*fonction.*

3.2 Fonction complémentaire d'une fonction d'Orlicz

Définition 3.2. *Soit* ϕ *une fonction d'Orlicz. La fonction* $\phi^* : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty]$, *définie par :*

$$\phi^*(y) = \sup_{x \geq 0} \{x\,|y| - \phi(x)\} \quad \forall y \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

s'appelle la ***fonction complémentaire*** *ou la* ***fonction conjuguée*** *de* ϕ.

Exemple 3.2. *1. La fonction complémentaire de* $\phi_p(x) = \dfrac{|x|^p}{p}, 1 \leq p < +\infty$ *est*

$$\phi_p^*(y) = \frac{1}{q}|y|^q \ \ avec\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

En effet,

$$\phi_p^*(y) = \sup_{x\geq 0}\{x\,|y| - \phi_p(x)\} = \sup_{x\geq 0}\{x\,|y| - \frac{x^p}{p}\}, y \in \mathbb{R},$$

posons $f(x) = x\,|y| - \dfrac{x^p}{p}$, *alors,*

$$f^{'}(x) > 0 \ \ si\ x < |y|^{\frac{1}{p-1}}$$
$$et$$
$$f^{'}(x) < 0 \ \ si\ x > |y|^{\frac{1}{p-1}}.$$

Donc f *atteint son maximum au point* $x = |y|^{\frac{1}{p-1}}$.

2. La fonction complémentaire de,

$$\phi_{\infty,1}(x) = \begin{cases} 0 & si\ \ x \in [-1,\ 1] \\ |x| - 1 & sinon, \end{cases}$$

est,

$$\phi_{\infty,1}^*(y) = \phi_{1,\infty}(y) = \begin{cases} |y| & si\ \ y \in [-1,\ 1] \\ +\infty & sinon. \end{cases}$$

Autre définition d'une $N-$fonction (Représentation intégrale)

Définition 3.3. *Soit* ϕ *une fonction.*

ϕ *est une* $N-$*fonction si elle admet la représentation intégrale suivante*

$$\phi(x) = \int_0^{|x|} p(t)dt,$$

où la fonction p *définie sur* $[0, +\infty[$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *vérifie les conditions suivantes :*

1. $p(0) = 0$
2. $p(t) > 0$ *si* $t > 0$
3. $\lim_{t\to+\infty} p(t) = +\infty.$
4. p *est continue à droite pour* $t \geq 0$, *c.-à-d. si* $t \geq 0$ $\lim_{s\to t^+} p(s) = p(t)$.
5. p *est non décroissante c.-à-d. si* $t_1 > t_2$ *alors* $p(t_1) \geq p(t_2)$.

La fonction p est appelée la fonction densité de ϕ.

Exemple 3.3. *1. $\phi_1(x) = \frac{|x|^p}{p}$ avec $1 < p < \infty$ alors $p_1(t) = \phi_1^{'}(t) = t^{p-1}$.*

2. $\phi_2(x) = e^{x^2} - 1$ alors $p_2(t) = \phi_2^{'}(t) = 2te^{t^2}$.

Remarque 3.2. *La valeur de $\phi(x)$ est la surface délimitée par la courbe de p , l'axe des abscisses et les deux droites $t = 0$ et $t = x$. Ce qui donne que la fonction ϕ est strictement croissante.*

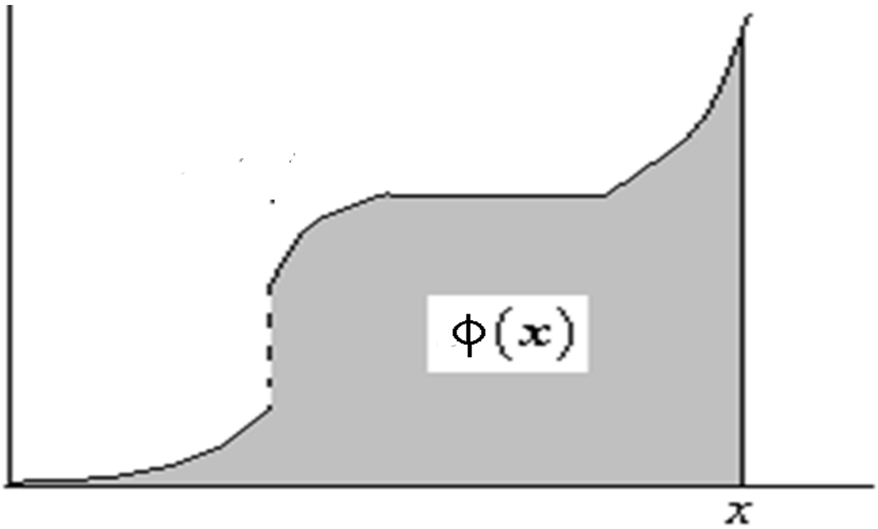


FIGURE 3.1 – $N-$fonction

Proposition 3.1. *La définition 3.1 et la définition 3.3 sont équivalentes.*

Démonstration. Soit ϕ une $N-$ fonction. Puisque ϕ est convexe continue avec $\phi(0) = 0$ alors ϕ est Lipchitzienne donc absolument continue donc elle admet la représentation intégrale $\int_0^{|x|} p(t)dt$ avec p fonction non décroissante et continue à droite. Comme ϕ est dérivable presque partout on peut prendre $p = \phi^{'} = \phi_d^{'}$

Inversement, on suppose que

$$\phi(x) = \int_0^{|x|} p(t)dt,$$

avec p qui vérifie les cinq conditions de la définition 3.3 alors par définition ϕ est paire et continue, $\phi(0) = 0$, ϕ est croissante pour $x > 0$ et $\phi(x) > 0$ si $x > 0$.

Pour montrer la convexité il suffit de montrer que

$$\phi\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left[\phi(x) + \phi(y)\right] \quad \forall x, y > 0.$$

On peut supposer que $x < y$ alors

$$\begin{aligned}
\phi\left(\frac{x+y}{2}\right) &= \int_0^{\frac{x+y}{2}} p(t)\,dt = \int_0^x p(t)\,dt + \int_x^{\frac{x+y}{2}} p(t)\,dt \\
&\leq \int_0^x p(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_x^y p(t)\,dt = \int_0^x p(t)\,dt + \frac{1}{2}\left[\int_0^y p(t)\,dt - \int_0^x p(t)\,dt\right] \\
&\leq \frac{1}{2}\left[\int_0^x p(t)\,dt + \int_0^y p(t)\,dt\right] = \frac{1}{2}\left[\phi(x) + \phi(y)\right].
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\phi(x)}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\phi(x)}{x}=+\infty$.

Si $x>0$, alors

$$\frac{\phi(x)}{x}=\frac{1}{x}\int_0^x p(t)\,dt\leq\frac{1}{x}p(x)\,x=p(x)\,.$$

D'autre part,

$$\frac{\phi(x)}{x}=\frac{1}{x}\int_0^x p(t)\,dt\geq\frac{1}{x}\int_{\frac{x}{2}}^x p(t)\,dt\geq\frac{1}{x}p\left(\frac{x}{2}\right)\frac{x}{2}\geq\frac{1}{2}p\left(\frac{x}{2}\right).$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{2}p\left(\frac{x}{2}\right)\leq\frac{\phi(x)}{x}\leq p(x)\,. \tag{3.2}$$

En faisant tendre $x\to 0$, on obtient $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\phi(x)}{x}=0$ car $p(0)=0$ et quand $x\to+\infty$ on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\phi(x)}{x}=+\infty$ □

Représentation intégrale de la fonction complémentaire

Nous allons à présent définir une relation plus pratique que celle définie en (3.1) entre une $N-$fonction et sa complémentaire ϕ^* plus précisement entre leur densités respectives.

Soit ϕ une $N-$fonction telle que $\phi(x)=\int_0^{|x|}p(t)dt$, avec p sa densité alors ϕ^* est détérminée par

$$\phi^*(y)=\int_0^{|y|}q(s)ds,$$

où

$$q(s)=\sup_{p(t)\leq s}t=\inf_{p(t)>s}t$$

q est appelée "inverse généralisée de p", elle possède les mêmes propriétés que p.

Quand la fonction p est continue et croit strictement, alors la fonction q est la fonction inverse de p, c'est pour cela qu'on utilise parfois la notation p^{-1} pour désigner q.

Exemple 3.4. $\phi_\alpha(x)=\frac{|x|^\alpha}{\alpha}$ *avec* $1<\alpha<\infty$ *alors*

$$p_\alpha(t)=\phi_\alpha^{'}(t)=t^{\alpha-1}\ et\ q_\beta(s)=s^{\beta-1},\ s\geq 0\ avec\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1,$$

et

$$\phi^*(y)=\int_0^{|y|}s^{\beta-1}ds=\frac{1}{\beta}|y|^\beta\,.$$

Remarque 3.3. *Parfois, il est impossible de trouver la formule explicite de q. On peut prendre la fonction $\phi(x)=e^{x^2}-1$ alors $p(t)=2te^{t^2}$ et on ne peut pas avoir la formule de q.*

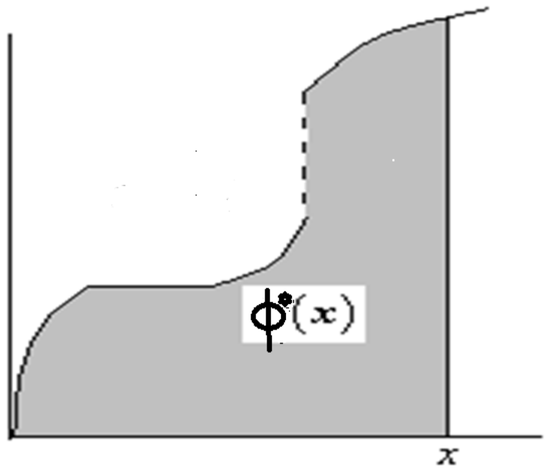


FIGURE 3.2 – La fonction conjuguée d'une $N-$fonction

Inégalité de Young

Proposition 3.2. *Le couple (ϕ, ϕ^*) satisfait à l'inégalité suivante dite* ***inégalité de Young****,*

$$xy \leq \phi(x) + \phi^*(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{3.3}$$

On a ***l'égalité dans l'inégalité de Young*** *si et seulement si $x = q(y)$ ou $y = p(x)$ c'est-à-dire*

$$xp\,(x) = \phi(x) + \phi^*(p(x)) \tag{3.4}$$

$$et$$

$$q\,(y)\,y = \phi(q\,(y)) + \phi^*(y)$$

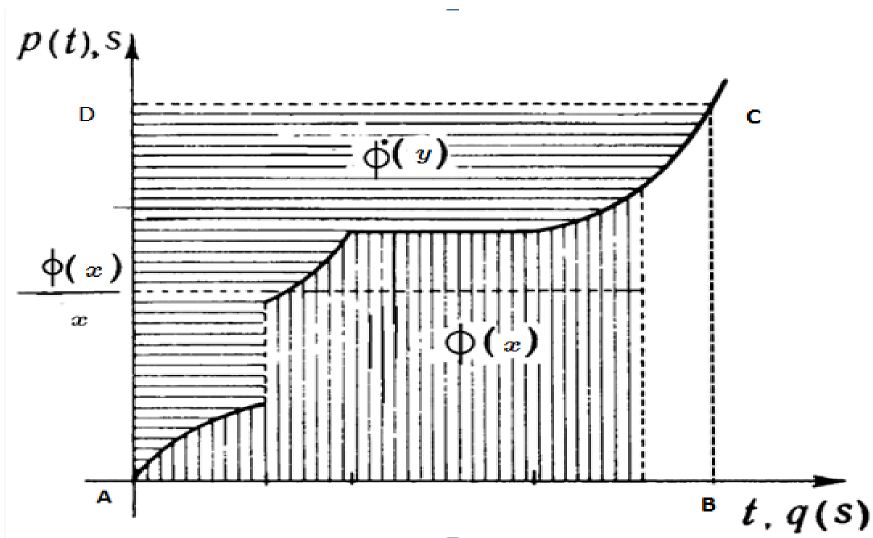


FIGURE 3.3 – Interprétation géométrique de l'inégalité de Young

Démonstration. Soit la figure ci dessus

Géométriquement, il est clair que

$$xy \leq \phi(x) + \phi^*(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}_+$$

puisque ϕ et ϕ^* sont paires alors cette inégalité est vraie $\forall x, y \in \mathbb{R}$

Montrons l'inégalité de Young analytiquement

Soit $y_0 = p(x)$, sans perte de généralité on suppose que $y \geq y_0$.

Donc

$$\phi^*(y) = \int\limits_0^y q(s)ds = \int\limits_0^{y_0} q(s)ds + \int\limits_{y_0}^y q(s)ds$$

Quand $s \geq y_0 = p(x)$ alors par définition de q on obtient $q(s) \geq x$.

Par conséquent,

$$\phi^*(y) \geq \int\limits_0^{y_0} q(s)ds + \int\limits_{y_0}^y xds = \int\limits_0^{y_0} q(s)ds + x(y - y_0).$$

Donc

$$\phi(x) + \phi^*(y) \geq \int\limits_0^x p(t)dt + \int\limits_0^{y_0} q(s)ds + xy - xy_0$$

Donc pour montrer l'inégalité de Young il suffit de montrer que

$$\phi(x) + \int\limits_0^{y_0} q(s)ds = xy_0$$

xy_0 est la surface du rectangle de sommet $A(0,0), B(x,0), C(x, p(x))$ et $D(0, y_0)$. Donc

$$xy_0 = \phi(x) + \iint\limits_G dudv,$$

avec

$$G = \{(u,v) \text{ tel que } 0 \leq u \leq x \text{ et } p(u) \leq v \leq y_0\}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \iint\limits_G dudv &= \int\limits_0^x \left(\int\limits_{p(u)}^{y_0} dv \right) du = \int\limits_0^x (y_0 - p(u))\, du \\ &= \int\limits_0^x y_0 du - \int\limits_0^x p(u)\, du = xy_0 - \phi(x). \end{aligned}$$

D'autre part, on peut aussi exprimer G comme suit

$$G = \{(u,v) \text{ tel que } 0 \leq v \leq y_0 \text{ et } 0 \leq u \leq q(v)\}.$$

Par suite,

$$\iint\limits_G dudv = \int\limits_0^{y_0} \left(\int\limits_0^{q(v)} du \right) dv = \int\limits_0^{y_0} q(v)\, dv = \phi^*(y_0).$$

Finalement on a obtenu que

$$xy_0 - \phi(x) = \phi^*(y_0).$$

$\square$

3.3 Propriétés des $N-$fonctions

Soit ϕ une $N-$fonction et p sa densité. Alors

1. *d'après (3.2) on a*
$$\frac{x}{2}p(\frac{x}{2}) \leq \phi(x) \leq xp(x), \forall x \geq 0.$$

2. $\phi(\alpha x) < \alpha\phi(x)$, $\forall \alpha \in]0,1[, x \neq 0,$
En effet, *Par la convexité de ϕ on a*
$$\phi(\alpha x) \leq \alpha\phi(x) \quad \forall \alpha \in [0,1] .$$
Pour une $N-$fonction l'égalité a lieu seulement quand $\alpha = 0$ ou $x = 0$.
Supposons le contraire c.-à-d. il existe $\alpha_0 \in]0,1[$, $x \neq 0$ et $\phi(\alpha_0 x) = \alpha_0\phi(x)$, alors on a nécessairement
$$\forall \alpha \in [0,1] , \quad \phi(\alpha x) = \alpha\phi(x).$$
En effet, *soit la fonction*
$$\alpha \mapsto f(\alpha) = \phi(\alpha x) - \alpha\phi(x)$$
alors f est continue et f est convexe.
On a par hypothèse $f(\alpha_0) = 0$. Soit $\alpha_1 \in]0,1[$ tel que $\phi(\alpha_1 x) < \alpha_1\phi(x)$ alors $f(\alpha_1) < 0$. Sans perte de généralité, on prend $\alpha_1 < \alpha_0$ on peut écrire
$$\alpha_0 = \frac{1-\alpha_0}{1-\alpha_1}\alpha_1 + \frac{\alpha_0-\alpha_1}{1-\alpha_1}$$
Alors,
$$\begin{aligned} f(\alpha_0) &\leq \frac{1-\alpha_0}{1-\alpha_1}f(\alpha_1) + \frac{\alpha_0-\alpha_1}{1-\alpha_1}f(1) \\ &\leq \frac{1-\alpha_0}{1-\alpha_1}f(\alpha_1) < 0. \end{aligned}$$
Ceci constitue une contradiction avec le fait que $f(\alpha_0) = 0$.
Par conséquent,
$$\forall \alpha \in [0,1] \text{ on a } \phi(\alpha x) = \alpha\phi(x) \quad \forall x \neq 0.$$
Donc
$$\frac{\phi(\alpha x)}{\alpha x} = \frac{\phi(x)}{x} > 0 \quad \forall x \neq 0.$$
Par passage à la limite quand $\alpha \to 0$ on obtient $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\phi(\alpha x)}{\alpha x} \neq 0$, ce qui est en contradiction avec le fait que ϕ est une $N-$fonction.

3. *La fonction $x \mapsto \frac{\phi(x)}{x}$ est strictement croissante pour les valeurs positives.*
En effet, *soit x_1, x_2 tels que $0 < x_1 < x_2$ alors d'après la $1^{\text{ère}}$ propriété*
$$\phi(x_1) = \phi\left(\frac{x_1}{x_2}x_2\right) < \frac{x_1}{x_2}\phi(x_2)$$
Ce qui donne
$$\frac{\phi(x_1)}{x_1} < \frac{\phi(x_2)}{x_2}$$

4. $\phi(\alpha x) > \alpha\phi(x) \quad \forall\alpha > 1.$

En effet,

$$\frac{\phi(x_1)}{x_1} < \frac{\phi(x_2)}{x_2} \qquad \forall\ 0 < x_1 < x_2,$$

On choisit $x_2 = \alpha x_1$ *alors* $x_2 > x_1$ *car* $\alpha > 1$ *alors*

$$\frac{\phi(x_1)}{x_1} < \frac{\phi(\alpha x_1)}{\alpha x_1}$$

ce qui donne

$$\phi(\alpha x_1) > \alpha\phi(x_1)$$

3.4 Comparaison des $N-$fonctions

Les relations d'ordre partielles et la relation d'équivalence qu'on va introduire, jouent un rôle fondamental, sur les injections continues et compactes entre les espaces d'Orlicz.

Définition 3.4. *Soient* ϕ_1 *et* ϕ_2 *deux* $N-$*fonctions. On dit que :*

1. ϕ_1 ***domine*** ϕ_2 *à l'infini et on note* $\phi_2 \prec \phi_1$ *ou* $\phi_1 \succ \phi_2$ *si et seulement s'il existe* $k > 0$ *et* $x_0 > 0$ *tel que*
$$\phi_2(x) \leq \phi_1(kx), \forall x \geq x_0;$$
2. ϕ_1 *est* ***équivalente*** *à* ϕ_2 *à l'infini et on note* $\phi_1 \sim \phi_2$ *si et seulement si* $\phi_2 \prec \phi_1$ *à l'infini et* $\phi_1 \prec \phi_2$ *à l'infini.*

Autrement dit,

ϕ_1 *et* ϕ_2 *sont équivalentes si et seulement s'il existe* $a, b \in \mathbb{R}^+$ *tels que* $0 < a \leq b < \infty$ *et il existe* $x_0 > 0$ *tels que*

$$\phi_1(ax) \leq \phi_2(x) \leq \phi_1(bx), \forall x \geq x_0.$$

Proposition 3.3. *Soit* $(\phi_i, \phi_i^*)_{1,2}$ *deux paires de* $N-$*fonctions complémentaires avec*

$$\phi_1(x) \leq \phi_2(x), \forall x \geq x_0 \geq 0.$$

Alors

$$\phi_2^*(y) \leq \phi_1^*(y), \qquad \forall y \geq y_0 \geq 0,$$

où $y_0 = P_2(x_0)$ *et* p_2 *est la dérivée à droite de* ϕ_2*.*

Démonstration. Soit q_2 l'inverse généralisée de p_2. Par l'égalité dans l'inégalité de Young (3.4) on a

$$q_2(y)y = \phi_2(q_2(y)) + \phi_2^*(y), \tag{3.5}$$

ce qui implique que

$$\phi_2^*(y) = q_2(y)y - \phi_2(q_2(y)).$$

L'inégalité de Young (3.3) pour (ϕ_1, ϕ_1^*) donne,

$$q_2(y)y \leq \phi_1(q_2(y)) + \phi_1^*(y). \tag{3.6}$$

Les deux inégalités (3.5) et (3.6) donnent,

$$\begin{aligned} \phi_2^*(y) &\leq \phi_1(q_2(y)) + \phi_1^*(y) - \phi_2(q_2(y)), \\ &\leq \phi_1^*(y) + \phi_1(q_2(y)) - \phi_2(q_2(y)) \end{aligned}$$

Comme $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ alors $\phi_1(q_2(y)) - \phi_2(q_2(y)) < 0\ \forall y \geq y_0$.

Par conséquent,

$$\phi_2^*(y) \leq \phi_1^*(y).$$

□

3.5 La condition$-\triangle_2$

La condition$-\triangle_2$ est une condition de croissance sur les fonctions d'Orlicz. Elle joue un rôle très important dans l'étude de la géométrie des espaces d'Orlicz.

Définition 3.5. *Une fonction d'Orlicz ϕ satisfait :*
1) *La condition$-\triangle_2$ **globalement** ($\phi \in \triangle_2$), s'il existe $k > 2$ tel que,*

$$\phi\left(2x\right) \leq k\phi\left(x\right) \;\; \forall x > 0.$$

2) *La condition$-\triangle_2$ **à l'infini** ($\phi \in \triangle_2\left(\infty\right)$), s'il existe $k > 2$ et $x_0 > 0$ tel que,*

$$\phi\left(2x\right) \leq k\phi\left(x\right) \;\; \forall x \geq x_0.$$

3) *La condition$-\triangle_2$ **au voisinage de zéro** ($\phi \in \triangle_2\left(0\right)$), s'il existe $k > 2$ et $x_0 > 0$ tel que,*

$$\phi\left(2x\right) \leq k\phi\left(x\right) \;\; \forall x \leq x_0.$$

Évidemment, $\phi \in \triangle_2$ si et seulement si :

$$\phi \in \triangle_2\left(\infty\right) \;\; et \; \phi \in \triangle_2\left(0\right).$$

Exemple 3.5. *La fonction d'Orlicz suivante,*

$$\phi_{\infty,1}\left(x\right) = \begin{cases} 0 & si \;\; x \in [-1,\, 1] \\ |x| - 1 & sinon, \end{cases}$$

satisfait la condition$-\triangle_2$ à l'infini $\left(\phi_{\infty,1} \in \triangle_2\left(\infty\right)\right)$, car il existe $k = 3$ et $x_0 = 2$ tel que,

$$\phi_{\infty,1}(2x) \leq 3\phi_{\infty,1}(x),\, \forall x \geq 2.$$

Proposition 3.4. *Si $\phi \notin \triangle_2\left(\infty\right)$, alors il existe une suite $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels positifs croissante vers l'infini telle que :*

$$\phi\left(2x_n\right) > 2^n\phi\left(x_n\right) \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Démonstration. Voir exemple 1.9 dans [4] □

Remarque 3.4. *La condition-$\triangle_2$ à l'infini est conservée par équivalence à l'infini des $N-$fonctions.*

Proposition 3.5. *Soit ϕ une $N-$fonction, et p sa dérivée à droite. Alors, ϕ vérifie la condition $\triangle_2$ à l'infini si et seulement s'il existe $\alpha > 0$ et $t_0 > 0$ tels que*

$$\frac{tp(t)}{\phi(t)} \leq \alpha, \forall t \geq t_0.$$

Démonstration. **La suffisance.**

On suppose que $\dfrac{tp(t)}{\phi(t)} \leq \alpha$, alors $\dfrac{p(t)}{\phi(t)} \leq \dfrac{\alpha}{t}$. En intégrant sur $[u, 2u]$, on obtient,

$$\phi(2u) \leq 2^\alpha\, \phi(u).$$

Donc $\phi \in \triangle_2$.

La nécessité.

On suppose que $\phi \in \triangle_2$. Alors,

$$k\phi(t) \geq \phi(2t) = \int_0^{2t} p(u)du \geq \int_t^{2t} p(u)du \geq p(t)t, \quad \forall t \geq t_0$$

Ainsi,

$$\frac{tp(t)}{\phi(t)} \leq k, \quad \forall t \geq t_0.$$

□

Exemple 3.6. *Soit la fonction*

$$\phi(x) = |x|^{\alpha}(\ln|x| + 1), \;\; \alpha > 1.$$

Alors $\phi \in \triangle_2$.

En effet,

$$p(x) = \phi^{'}(x) = \alpha\,|x|^{\alpha-1}(\ln|x|+1) + |x|^{\alpha-1},$$

alors,

$$\frac{xp(x)}{\phi(x)} = \alpha + \frac{1}{\ln|x|+1} \leq \alpha + 1, \quad \forall x \geq 1.$$

Donc il existe $c = \alpha + 1 > 0$ *et il existe* $x_0 = 1$ *tels que* $\dfrac{xp(x)}{\phi(x)} \leq c$, $\forall x \geq x_0$.

Pour avoir le résultat il suffit d'appliquer la proposition précédente.

Lemme 3.1. *Une* $N-$*fonction* ϕ *vérifiant la condition-*$\triangle_2$ *est à croissance au plus polynômiale.*

Démonstration. Puisque $\phi \in \triangle_2$, en utilisant le résultat de la proposition précédante, on a

$$\frac{p(t)}{\phi(t)} \leq \frac{\alpha}{t}. \quad \forall t \geq t_0 \tag{3.7}$$

En intégrant les deux membres de l'inégalité sur $[x, x_0]$, on obtient,

$$\phi(x) \leq kx^{\alpha} \text{ avec } k = \frac{\phi(x_0)}{x_0^{\alpha}}.$$

$\square$

Proposition 3.6. *Soit* ϕ *une* $N-$*fonction et* ϕ^* *sa complémentaire.*

$\phi \in \triangle_2$ *si et seulement s'il existe* $l > 1$ *et* $\exists v_0 \geq 0$ *tels que*

$$\phi^*(v) \leq \frac{1}{2l}\phi^*(lv), \forall v \geq v_0. \tag{3.8}$$

Démonstration. **La suffisance.**

On suppose que (3.8) est vérifiée et on pose

$$\phi_1^*(v) = \frac{1}{2l}\phi^*(lv).$$

Alors, la fonction complémentaire de ϕ_1^* est la fonction ϕ_1 définie par

$$\phi_1(u) = \frac{1}{2l}\phi(2u).$$

L'inégalité (3.8) peut alors s'écrire $\phi^*(v) \leq \phi_1^*(v)$. Alors

$$\phi_1(u) \leq \phi(u) \text{ c-à-d } \frac{1}{2l}\phi(2u) \leq \phi(u).$$

D'où

$$\phi(2u) \leq 2l\phi(u)$$

La nécessité.

On suppose que $\phi \in \triangle_2$ alors il existe $k > 2$ tel que

$$\phi(2u) \leq 2l\phi(u), \quad \forall u \geq u_0.$$

On pose

$$\phi(2u) = \phi_1(u) \text{ et } k\phi(u) = \phi_2(u).$$

Alors,

$$\phi_1^*(v) = \phi^*(\frac{v}{2}) \text{ et } \phi_2^*(v) = k\phi^*(\frac{v}{k}),$$

alors,

$$k\phi^*(\frac{v}{k}) \leq \phi^*(\frac{v}{2}).$$

On pose $t = \dfrac{v}{k}$, et on obtient, $\phi^*(t) \leq \dfrac{1}{k}\phi^*(\dfrac{k}{2}t)$ □

Proposition 3.7. *On suppose que p et q sont continues, alors*

$$\frac{up(u)}{\phi(u)} < \alpha, \forall u \geq u_0 \text{ si et seulement si } \frac{vq(v)}{\phi^*(v)} > \frac{\alpha}{\alpha - 1}, \forall v \geq v_0.$$

Démonstration. On suppose que $\dfrac{up(u)}{\phi(u)} < \alpha,\ \forall u \geq u_0$. D'après l'égalité dans l'inégalité de Young on a :

$$up(u) = \phi(u) + \phi^*(p(u)).$$

D'où

$$\phi(u) = up(u) - \phi^*(p(u)),$$

En remplaçant $\phi\,(u)$ par sa valeur, on obtient,

$$\frac{up(u)}{\phi^*(p(u))} > \frac{\alpha}{\alpha - 1}, \quad \forall u \geq u_0$$

On pose $p(u) = v$, donc $u = q(v)$ et on aura,

$$\frac{vq(v)}{\phi^*(v)} > \frac{\alpha}{\alpha - 1}, \forall v \geq v_0.$$

□

Définition 3.6. *Soit ϕ une N–fonction, un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ est dit* ***intervalle de structure affine*** *de ϕ si ϕ est affine sur $[a, b]$ et elle ne l'est pas sur tout intervalle $[a - \varepsilon, b]$ ou $[a, b + \varepsilon]$ pour tout $\varepsilon > 0$.*
On appelle $S_\phi = \mathbb{R} \backslash \left\{ \underset{k}{\cup} [a_k, b_k] \right\}$ l'ensemble des points de stricte convexité de ϕ où $\{[a_k, b_k]\}_k$ est la famille de tous les intervalles de structure affine de ϕ
c'est-à-dire si $u, v \in \mathbb{R}$ tel que $u \neq v$ et $\alpha \in \,]0, 1[$ de telle sorte que $[\alpha u + (1 - \alpha)\, v] \in S_\phi$, alors $\phi\,(\alpha u + (1 - \alpha)\, v) < \alpha \phi\,(u) + (1 - \alpha)\, \phi\,(v)$

Lemme 3.2. *Pour toute $N-$fonction ϕ et $\varepsilon > 0$, il existe une $N-$fonction ϕ_1 strictement convexe telle que*

$$\phi\,(x) \leq \phi_1\,(x) \leq (1 + \varepsilon)\,\phi\,(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.9}$$

Démonstration. Posons $\{[a_k, b_k]\}_k$ tous les intervalles de structure affine de ϕ. Il est clair que p (la dérivé à droite de ϕ) est une constante sur chaque $[a_k, b_k[$.
• Maintenant, on définit une fonction p_1 :

$$p\left(x\right) \leq p_1\left(x\right) \leq \left(1+\varepsilon\right) p\left(x\right). \tag{1}$$

de sorte que p_1 soit la dérivée à droite d'une N–fonction ϕ_1.
• Sur l'intervalle $[a_1, b_1]$, on observe deux cas :
- si p n'est pas continue en b_1, c'est à dire que $p\left(b_1\right) > p(a_1)$, alors on pose $b_1 = b_1^{'}$.
- si p est continue en b_1, c'est à dire que $p\left(a_1\right) = p(b_1)$, alors on pose $b_1^{'} > b_1$ de sorte que

$$p_1(b_1^{'}) < \left(1+\varepsilon\right) p\left(a_1\right).$$

• Sur l'intervalle $\left[a_1, b_1^{'}\right[$, on définit $p_1\left(t\right)$ qui soit affine et

$$p_1\left(a_1\right) = p(a_1), \qquad \lim_{t \to b^-} p_1\left(t\right) = \min\left\{p(b_1^{'}), \left(1+\varepsilon\right) p\left(a_1\right)\right\},$$

ensuite, nous choisissons le premier intervalle $\left[a_{k(1)}, b_{k(1)}\right]$ dans $\{[a_k, b_k]\}_k$ tel que

$$\left[a_{k(1)}, b_{k(1)}\right] \setminus \left[a_1, b_1^{'}\right] \neq \emptyset,$$

et on définit $p_1\left(t\right)$ sur $\left[a_{k(1)}, b_{k(1)}^{'}\right[$ de la même manière, mais

$$b_{k(1)} \leq b_{k(1)}^{'} \leq a_1 \text{ si } b_k^{'} \leq a_1.$$

• Ainsi de suite, par induction $p_1(t)$ est défini sur $\underset{k}{\cup} \left[a_k, b_k^{'}\right[$, et nous posons $p_1(t) = p(t)$ ailleurs (voir les figures -1- et -2-) :

$$p_1(t) = \begin{cases} p(t) & \text{si t} \notin \underset{k}{\cup} \left[a_k, b_k^{'}\right[\\ \text{affine} & \text{si t} \in \underset{k}{\cup} \left[a_k, b_k^{'}\right[\end{cases}$$

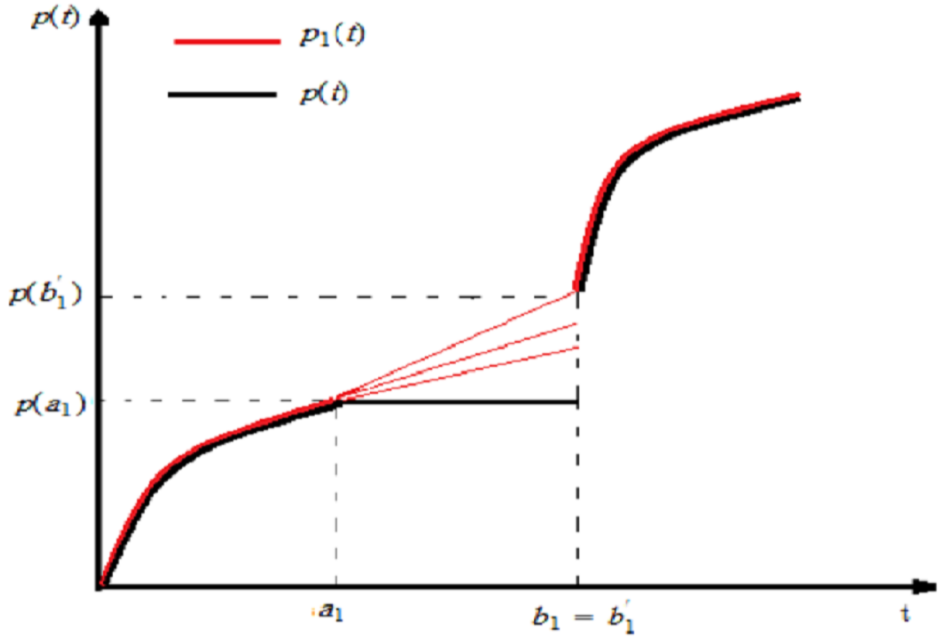


Figure-1-

• Comme : $p_1(0) = 0$, $p_1(t) > 0$ si $t > 0$ $\lim_{t \to +\infty} p_1(t) = +\infty$, et p_1 est continue à droite pour $t \geq 0$. Donc p_1 est une dérivée à droite d'une $N-$fonction

$$\phi_1(x) = \int_0^{|x|} p_1(t)\, dt$$

• De plus ϕ_1 est strictement convexe car p_1 est strictement croissante c'est à dire que ϕ_1 ne peut pas être affine sur chaque intervalles dans $\mathbb{R}$.

Finalement en intégrant 4.8 de 0 à $|x|$ on obtient le résultat recherché

$$\phi(x) \leq \phi_1(x) \leq (1+\varepsilon)\,\phi(x)\,.$$

$\square$

Remarque 3.5. *Les inégalités* (3.9) *sont aussi valables pour les normes* (*voir* [4])

$$\|f\|_\phi^o \leq \|f\|_{\phi_1}^o \leq (1+\varepsilon)\,\|f\|_\phi^o \tag{3.10}$$

3.6 La partie principale d'une $N-$fonction

Le résultat qui suit, permet de construire à partir d'une N-fonction donnée ϕ, une N-fonction équivalente à ϕ et qui soit suffisamment régulière.

Proposition 3.8. *Soit ϕ une N-fonction. On note $\widetilde{\phi}$ la fonction définie par*

$$\widetilde{\phi}(x) = \begin{cases} \int\limits_0^x \dfrac{\phi(u)}{u} du & pour \quad t > 0 \\ 0 & si \quad t = 0 \end{cases}$$

Alors $\widetilde{\phi}$ est une $N-$fonction de classe C^1, à dérivée strictement croissante et équivalente à ϕ.

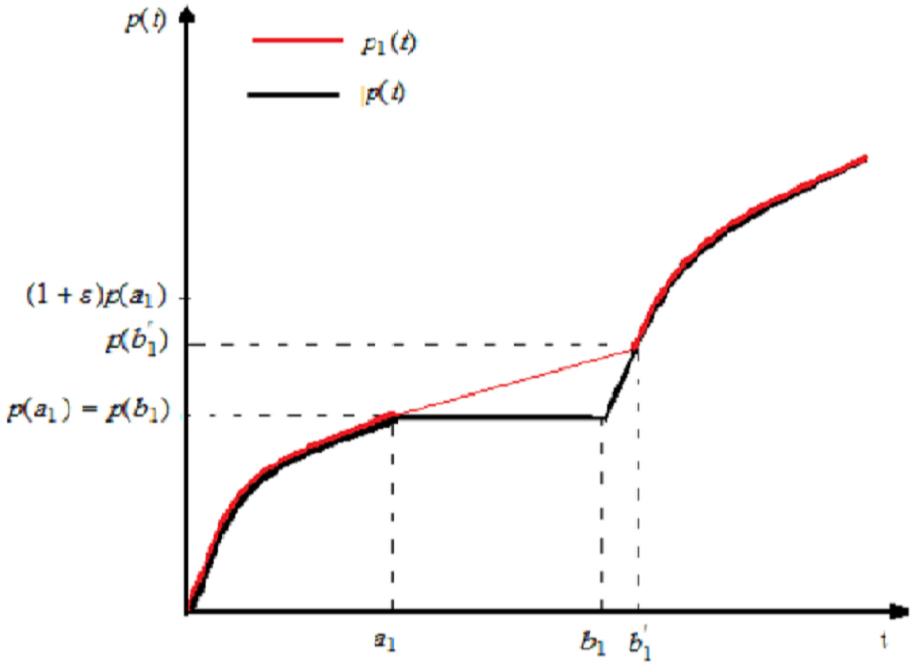


Figure -2-

Démonstration. On a

$$\widetilde{\phi}(x) = \int_0^x \frac{\phi(u)}{u} du \leq \frac{\phi(x)}{x} x = \phi(x), \tag{3.11}$$

et

$$\int_x^{2x} \frac{\phi(u)}{u} du \geq \frac{\phi(x)}{x} x = \phi(x).$$

Donc

$$\phi(x) \leq \int_x^{2x} \frac{\phi(u)}{u} du \leq \int_0^{2x} \frac{\phi(u)}{u} du = \widetilde{\phi}(2x). \tag{3.12}$$

Les inégalités (3.11) et (3.12) donnent $\widetilde{\phi}(x) \leq \phi(x) \leq \widetilde{\phi}(2x), \forall x > 0$. Ainsi ϕ et $\widetilde{\phi}$ sont équivalentes.

De la définition de $\widetilde{\phi}$ on voit qu'elle est de classe C^1, sa dérivée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. □

Remarque 3.6. *En reprenant le processus de construction de $\widetilde{\phi}$, on peut augmenter autant de fois que l'on veut la régularité d'une $N-$fonction donnée.*

$$\widetilde{\phi}(t) = \begin{cases} \int_0^t \frac{\phi(u)}{u} du & \text{pour} \quad t > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

$\widetilde{\phi}$ est une $N-$fonction de classe C^2.

3.7 Exercices

3.7.1 Exercices avec solutions

Exercice 3.1. *Montrer que toute fonction d'Orlicz ϕ est croissante sur* $[0, +\infty[$.

Solution 3.1. *Si on prend* $0 \leq x_1 < x_2$ *alors,*

$$\begin{aligned}\phi(x_1) &= \phi\left(\frac{x_{2-}x_1}{x_2}\times 0 + \frac{x_1}{x_2}x_2\right)\\ &\leq \frac{x_{2-}x_1}{x_2}\phi(0) + \frac{x_1}{x_2}\phi(x_2)\\ &\leq \phi(x_2).\end{aligned}$$

Exercice 3.2. *Trouver la fonction complémentaire de* $\phi(x) = e^{|x|} - |x| - 1$ *en utilisant l'écriture intégrale.*

Solution 3.2. *Si* $t \geq 0$, $p(t) = e^t - 1$ *donc*

$$q(s) = \sup_{p(t)\leq s} t = \sup_{e^t - 1 \leq s} t = \ln(s+1).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\phi^*(y) = \int_0^{|y|} q(s)ds = \phi^*(y) &= \int_0^{|y|} \ln(s+1)ds\\ &= (1+|y|)\ln(1+|y|) - |y|\end{aligned}$$

Exercice 3.3. *Soit* (ϕ, ϕ^*) *un couple de* $N-$*fonctions complémentaires, et* $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. *Soit la* $N-$*fonction* ϕ_1 *définie par*

$$\phi_1(x) = a\phi(bx)$$

Exprimer la fonction complémentaire de ϕ_1 *en fonction de celle de* ϕ.

Solution 3.3. *Soient* p *la dérivée à droite de* ϕ *et* p_1 *celle de* ϕ_1,*alors* $p_1(t) = abp(bt)$.

Soit q *l'inverse généralisée de* p *et* q_1 *celle de* p_1, *alors par définition, on a*

$$q_1(s) = \sup_{p_1(t)\leq s} t = \sup_{p(bt)\leq \frac{s}{ab}} t,$$

en effectuant le changement de variable $u = bt$, *on obtient,*

$$q_1(s) = \sup_{p(u)\leq \frac{s}{ab}} \frac{u}{b} = \frac{1}{b}\sup_{p(u)\leq \frac{s}{ab}} u = \frac{1}{b}q(\frac{s}{ab}).$$

D'autre part,

$$\phi_1^*(y) = \int_0^{|y|} q_1(s)ds = \frac{1}{b}\int_0^{|y|} q(\frac{s}{ab})ds,$$

en posant $u = \dfrac{s}{ab}$ *on obtient,*

$$\phi_1^*(y) = \frac{1}{b}\int_0^{\frac{|y|}{ab}} abq(u)du = a\int_0^{\frac{|y|}{ab}} q(u)du = a\phi^*(\frac{y}{ab}).$$

Finalement, on trouve

$$\phi_1^*(y) = a\phi^*(\frac{y}{ab}).$$

Exercice 3.4. *Soit la fonction définie par*

$$\phi(x) = (1 + |x|) \ln(1 + |x|)$$

1. *Est ce que ϕ est une $N-$fonction ?*
2. *Donner la fonction complémentaire de ϕ.*

Solution 3.4. *La fonction définie par*

$$\phi(x) = (1 + |x|) \ln(1 + |x|)$$

n'est pas une $N-$fonction car $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\Phi(x)}{x} \neq 0$.
La fonction complémentaire de ϕ est donnée par :
Posons

$$f(x) = x|y| - (1 + x) \ln(1 + x),$$

alors

$$f'(x) = |y| - 1 - \ln(1 + x)$$

et on obtient,

$$f'(x) \geq 0 \text{ si } x \leq e^{|y|-1} - 1 \text{ et } f'(x) \leq 0 \text{ si } x \geq e^{|y|-1} - 1.$$

Par conséquent,

$$\psi(y) = \begin{cases} 0 & si \quad |y| \leq 1 \\ \exp(|y| - 1) - |y| & si \quad |y| \geq 1 \end{cases}$$

Exercice 3.5. *Montrer que pour toute $N-$ fonction ϕ et $\varepsilon > 0$, il existe une $N-$fonction ϕ_1 telle que*

$$\phi(x) \leq \phi_1(x) \leq (1 + \varepsilon) \phi(x)$$

et que la dérivée à droite p_1 de ϕ_1 est continue. De plus, si ϕ est strictement convexe, ϕ_1 l'est aussi .

Solution 3.5. *Prenons $\varepsilon_n > 0$ tel que $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \leq \varepsilon$, et soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les points de discontinuité de p. on note $\{[a_k, b_k]\}_k$ la famille de tous les intervalles de structure affine de ϕ*

- *On pose $b_1 = b_1'$, et on choisit $a_1 \in \left]0, b_1'\right[$ tel que*

$$(b_1' - a_1)p(b_1') < \varepsilon_1 \phi(b_1'). \text{ (voir la figure -3-)}$$

- *Définissons p_1 sur $\left[a_1, b_1'\right]$ qui soit affine et*

$$p_1(a_1) = p(a_1) \qquad p_1(b_1') = p(b_1').$$

Trouvons le premier point $b_2' \in \{b_n\} \setminus \left]a_1, b_1'\right]$ et on choisit $a_2 \in \left]0, b_2'\right[\setminus \left[a_1, b_1'\right]$ tel que

$$(b_2' - a_2)p(b_2') < \varepsilon_2 \phi\left(b_2'\right).$$

On définit ensuite p_1 sur $\left[a_2, b_2'\right]$ qui soit affine et

$$p_1(a_2) = p(a_2) \qquad p_1(b_2') = p(b_2').$$

- *Et ainsi de suite, nous avons définit p_1 sur $\cup_k \left[a_k, b_k'\right]$, et nous mettons $p_1(t) = p(t)$ ailleurs. (voir la figure $-4-$) :*

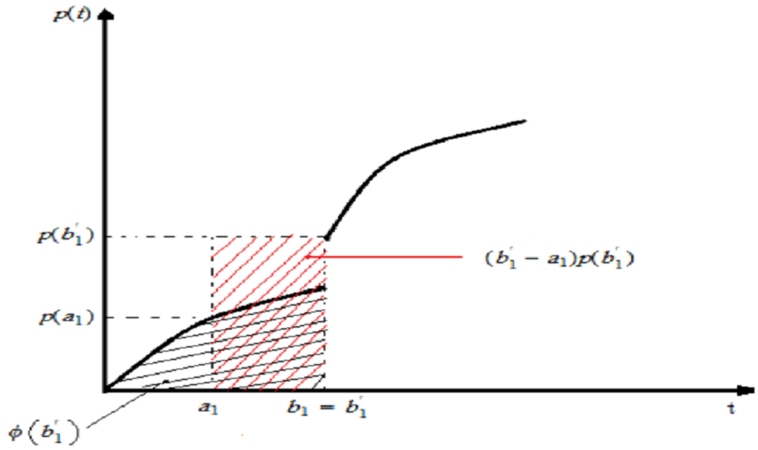


Figure-3-

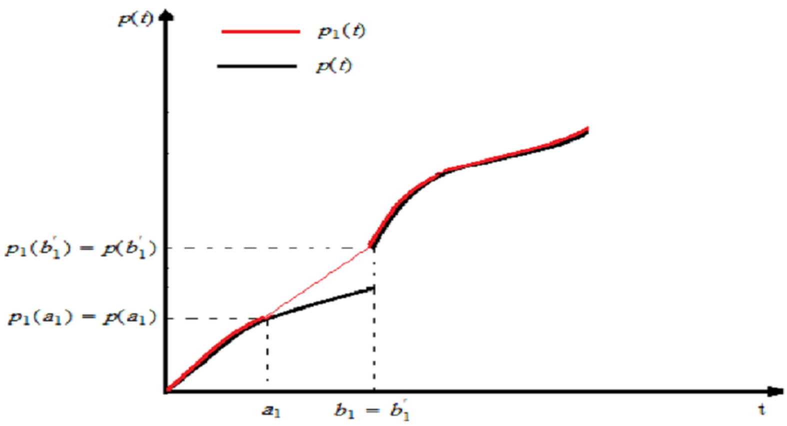


Figure-4-

$$p_1(t) = \begin{cases} p(t) & si\ t \notin \cup_k \left[a_k, b_k'\right] \\ affine & si\ t \in \cup_k \left[a_k, b_k'\right] \end{cases}$$

• *Il est clair que, p_1 est continue et si ϕ est strictement convexe (p est strictement croissante) alors, ϕ_1 est strictement convexe (p_1 est strictement croissante). De plus, $p(t) \leq p_1(t)$ implique $\phi(x) \leq \phi_1(x)$. Alors,*

$$0 \leq \phi_1(x) - \phi(x) = \int_0^{|x|} (p_1(t) - p(t))dt = \sum_{b_k' \leq |x|} \int_{a_k}^{b_k'} (p_1(t) - p(t))dt$$
$$\leq \sum_{b_k' \leq |x|} (b_k' - a_k)p_1(b_k') \leq \sum_{b_k' \leq |x|} \varepsilon_k \phi\left(b_k'\right) \leq \varepsilon\phi(x)$$

$$0 \leq \phi_1(x) - \phi(x) \leq \varepsilon\phi(x).$$

Ce qui implique,

$$\phi(x) \leq \phi_1(x) \leq (1+\varepsilon)\phi(x).$$

Exercice 3.6. *Soit (ϕ, ϕ^*) un couple complémentaire de $N-$fonctions, et ϕ^{-1} l'inverse de ϕ. Montrer que*

1. $\phi(a) + \phi(b) \leq \phi(a+b)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$
2. $\phi^{-1}(a+b) \leq \phi^{-1}(a) + \phi^{-1}(b)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$
3. $\alpha < \phi^{-1}(\alpha) + (\phi^*)^{-1}(\alpha) \leq 2\alpha$, $\alpha > 0$

Solution 3.6. .

1- *Soit p la dérivée à droite de la $N-$fonction ϕ.*

$$\phi(a) + \phi(b) = \int_0^a p(t)dt + \int_0^b p(t)dt \leq \int_0^a p(t)dt + \int_a^{a+b} p(t)dt = \int_0^{a+b} p(t)dt$$

Par conséquent,

$$\phi(a) + \phi(b) \leq \phi(a+b).$$

2- *En posant dans l'inégalité précédente $\alpha = \phi(a)$ et $\beta = \phi(b)$, On aura $\alpha + \beta \leq \phi(a+b)$, comme ϕ^{-1} est croissante, alors*

$$\phi^{-1}(\alpha+\beta) \leq a + b$$

Sachant que $\phi^{-1}(\alpha) = a$ et $\phi^{-1}(\beta) = b$ alors,

$$\phi^{-1}(\alpha+\beta) \leq \phi^{-1}(\alpha) + \phi^{-1}(\beta).$$

3- *On a $\phi(a) = \int_0^a p(t)dt$ et p est continue sur $[0, a]$. Alors par le théorème de la moyenne il existe $c \in]0, a[$ tel que*

$$\int_0^a p(t)dt = ap(c), \ \frac{\phi(a)}{a} = p(c)$$

Par définition,

$$\phi^*(\frac{\phi(a)}{a}) = \int_0^{\frac{\phi(a)}{a}} q(t)dt.$$

Donc $\exists c^* \in \left]0, \frac{\phi(a)}{a}\right[$ *tel que*

$$\phi^*(\frac{\phi(a)}{a}) = \frac{\phi(a)}{a} q(c^*) = p(c)q(c^*).$$

On a $0 < c^* < \frac{\phi(a)}{a} = p(c) < p(a)$. *D'où*

$$\phi^*(\frac{\phi(a)}{a}) < \frac{\phi(a)}{a} q(p(a)) = \frac{\phi(a)}{a} a.$$

Alors

$$\phi^*(\frac{\phi(a)}{a}) < \phi(a). \tag{3.13}$$

On pose $\alpha = \phi(a)$ *alors, l'négalté* (3.13) *devient* $\phi^*(\frac{\alpha}{a}) < \alpha$, *en appliquant* $(\phi^*)^{-1}$ *des deux côtés de cette inégalité on obtient*

$$\frac{\alpha}{a} < (\phi^*)^{-1}(\alpha).$$

Ce qui donne,

$$\alpha < (\phi^*)^{-1}(\alpha)\phi^{-1}(\alpha). \tag{3.14}$$

D'autre part, si on prend $\alpha = \phi(a)$ *et* $\beta = \phi^*(b)$ *alors* $\phi^{-1}(\alpha) = a$ *et* $(\phi^*)^{-1}(\beta) = b$.
d'après l'inégalité de Young, on obtient,

$$\phi^{-1}(\alpha)(\phi^*)^{-1}(\beta) = \alpha + \beta \tag{3.15}$$

On prend $\alpha = \beta$ *dans* (3.15) , *on aura*

$$\phi^{-1}(\alpha) + (\phi^*)^{-1}(\alpha) \leq 2\alpha \tag{3.16}$$

Les inégalités (3.14) *et* (3.16) *donnent*

$$\alpha < \phi^{-1}(\alpha) + (\phi^*)^{-1}(\alpha) \leq 2\alpha.$$

3.7.2 Exercices sans solutions

Exercice 3.7. *Soit* ϕ *une fonction d'Orlicz. Montrer que* $\forall u, v \in \mathbb{R}$ *on a :*

$$\phi(u+v) \leq \phi(u) + \frac{1}{\lambda}\phi(u+\lambda v), \quad \forall \lambda \geq 1$$

Exercice 3.8. *Est ce que les fonctions suivantes sont des fonctions d'Orlicz ? Si oui donner dans chaque cas la fonction complémetaire.*

$$\phi_1(x) = \begin{cases} 0 \ si \ |x| \leq 1 \\ |x| - 1 \ si \ |x| > 1 \end{cases}, \qquad \phi_2(x) = \begin{cases} |x| \ \ si \ |x| \leq 1 \\ x^2 \ si \ |x| > 1 \end{cases}$$

Exercice 3.9. *Trouver la fonction complémentaire de,*

$$\phi_{\infty,1}(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; x \in [-1,\, 1] \\ |x| - 1 & sinon, \end{cases}$$

Exercice 3.10. *Soient ϕ et ϕ_1 deux fonctions d'Orlicz, on note ψ et ψ_1 leurs fonctions complémentaires respéctivement. On suppose que*

$$\phi(x) \leq \phi_1(x) \leq (1+\varepsilon)\,\phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Donner les inégalités entre $\psi_1(y)$ et $\psi(y)$.

Exercice 3.11. *On suppose que $\phi_1$et ϕ_2 sont deux $N-$fonctions. Montrer que la fonction*

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{\phi_1(x)\phi_2(x)}{|x|} & si \; x \neq 0 \\ 0 & si \; x = 0 \end{cases}$$

est une $N-$fonction.

Exercice 3.12. *Montrer si ϕ est une $N-$fonction alors ϕ^* est aussi une N-fonction et $(\phi^*)^* = \phi$.*

Exercice 3.13. *Soient ϕ_1 et ϕ_2 deux $N-$fonctions. Alors,*

1. $\phi_2 \prec \phi_1 \Longleftrightarrow \phi_1^* \succ \phi_2^*$,
2. $\phi_1 \sim \phi_2 \Longleftrightarrow \phi_1^* \sim \phi_2^*$.

Exercice 3.14. *Est ce que les fonctions suivantes vérifient la condition-Δ_2.*

$$\begin{aligned} &\phi_1(x) = (1+|x|)\ln(1+|x|) - |x|\,, \quad \phi_1^*(y) = \exp(|y|) - |y| - 1 \\ &\qquad et \\ &\phi_2(x) = \exp(|x|) - 1 \end{aligned}$$

Exercice 3.15. *Est-ce que la fonction ϕ définie par $\phi(x) = |x|^\alpha (\ln|x|+1)$, $\alpha > 1$ vérifie la condition-$\triangle_2$?*

Exercice 3.16. *Soit la fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ définie par*

$$\phi(x) = \frac{x^2}{\ln(e+|x|)}$$

1. *Montrer que la fonction ϕ est une $N-$fonction.*
2. *Est ce que $\phi \in \Delta_2$?*

Exercice 3.17. *Soit la fonction*

$$\begin{array}{rccl} \phi : & \mathbb{R} & \to & [0,+\infty[\\ & x & \mapsto & \phi(x) = \begin{cases} 0 \;\; si \;\; |x| \leq 1 \\ |x| - 1 \;\; sinon \end{cases} \end{array}$$

1. *Est ce que ϕ est une $N-$fonction ?*
2. *Donner la fonction complémentaire de ϕ.*

Exercice 3.18. *Soient ϕ une $N-$fonction dont la dérivée P est donnée par*

$$p(t) = \begin{cases} t \quad si\ t \in [0,1[\\ k! \ si\ t \in [(k-1)!, k![\quad k = 2, 3, ... \end{cases}$$

1. *Déssiner le graphe de P .*
2. *Donner la fonction inverse généralisée q de P.*
3. *On note ϕ^* la fonction complémentaire de ϕ. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = n!$. Montrer que*
$$\phi(2u_n) > n\phi(u_n)\, et \phi^*(2u_n) > n\phi^*(u_n).$$
Conclure.

Exercice 3.19. *Soit la fonction définie par*

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{1-x^2} \quad si\ |x| \leq 1 \\ +\infty \qquad si \quad |x| > 1 \end{cases}$$

1. *Donner la fonction complémentaire ϕ^* de ϕ en utilisant l'écriture intégrale.*
2. *On prend $x = 1$, existe t-il un y vérifiant l'égalité de Young ?*

Exercice 3.20. *Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}_+$ par*

$$\phi(x) = \begin{cases} |x|\, e^{-\frac{1}{|x|}} \quad si\ x \neq 0 \\ 0 \ si\ x = o \end{cases}$$

1. *Est ce que ϕ est une $N-$fonction?*
2. *Est ce que $\phi \in \Delta_2(0)$ et $\phi \in \Delta_2(+\infty)$?*
3. *Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} \phi^*\left(\phi'(t)\right)$, où ϕ^* est la fonction complémentaire de ϕ.*

Chapitre 4

Les espaces d'Orlicz $L_{\phi}(\Omega)$

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Les espaces de Lebesgue $L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ sont définis en considérant la fonction puissance $|x|^p$ avec $1 \leq p < \infty$. Ces espaces sont des espaces de Banach et l'essentiel de leurs propriétés topologiques et métriques reposent sur la nature de la fonction puissance $x \mapsto |x|^p$ qui apparaît dans leurs définitions.

Les espaces d'Orlicz L_{ϕ}, extension naturelle des espaces de Lebesgue L^p, sont générés par une fonction ϕ dite fonction d'Orlicz ou $N-$fonction généralisant les fonctions puissances.

La théorie des espaces d'Orlicz est apparue en 1930 dans les travaux d'Orlicz, elle connaît actuellement un développement considérable du fait de ses applications imposées dans de différents domaines de l'analyse mathématiques notamment l'analyse non linéaire.

L'objectif de ce chapitre est de présenter ces espaces et leurs propriétés fondamentales.

Dans tout ce chapitre Ω désignera un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue μ et $M(\Omega)$ l'ensemble des fonctions μ-mesurables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ modulo la relation d'équivalence $= \mu - p.p.$

4.1 Espaces modulaires

Soit X un espace vectoriel réel ou complexe. Une fonctionnelle $\rho : X \to \overline{\mathbb{R}}^+$ est dite modulaire lorsque pour tout $x, y \in X$ on a

1. $\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\rho(-x) = \rho(x)$
3. $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \rho(x) + \rho(y)$, *si* $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$

Lorsque la fonctionnelle ρ est convexe, c'est-à-dire :

$$\rho(\alpha x + \beta y) \leq \alpha\rho(x) + \beta\rho(y), \ \alpha, \beta \geq 0, \ \alpha + \beta = 1,$$

elle est dite modulaire convexe .

Le couple (X, ρ) est appelé espace modulaire.

A la modulaire ρ convexe, on associe l'espace modulaire suivant :

$$\begin{aligned} X_{\rho} &= \left\{ x \in X, \ \lim_{\lambda \to 0} \rho(\lambda x) = 0 \right\} \\ &= \{ x \in X, \ \rho(\lambda x) < \infty \text{ pour un certain } \lambda > 0 \} \end{aligned}$$

4.1.1 Normes sur les espaces modulaires

Norme de Luxemburg

Théorème 4.1. *Soit ρ une modulaire convexe sur X. Alors la fonction définie par*

$$\|f\|_{\rho} = \inf\left\{\lambda > 0,\ \rho\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1\right\}$$

*est une norme sur X_{ρ} appelée norme de **Luxemburg.***

Démonstration. Si $f = 0$ alors $\rho(f) = 0$ donc $\|f\|_{\rho} = 0$.
Si $\|f\|_{\rho} = 0$ alors $\rho(\alpha f) \leq 1, \forall \alpha > 0$. Soit $0 < u \leq 1$, alors

$$\rho(f) = \rho\left(\frac{u}{u} f\right) \leq u\rho\left(\frac{1}{u} f\right) \leq u$$

En faisant tendre $u \to 0^{+}$ on obtient, $\rho(f) = 0$. Ceci implique que $f = 0$.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in X_{\rho}$, alors

$$\begin{aligned}\|\alpha f\|_{\rho} &= \inf\left\{\lambda > 0,\ \rho\left(\frac{\alpha f}{\lambda}\right) \leq 1\right\} \\ &= |\alpha| \inf\left\{\frac{\lambda}{|\alpha|} > 0,\ \rho\left(\frac{f}{\frac{\lambda}{|\alpha|}}\right) \leq 1\right\} = |\alpha|\, \|f\|_{\rho}\end{aligned}$$

Soit $f,\, g \in X_{\rho}$ et soit $u, v \in \mathbb{R}$ tels que $u > \|f\|_{\rho}$ et $v > \|g\|_{\rho}$. Alors

$$\rho\left(\frac{f}{u}\right) \leq 1 \text{ et } \rho\left(\frac{f}{v}\right) \leq 1.$$

Par la convexité de ρ on obtient

$$\begin{aligned}\rho\left(\frac{f+g}{u+v}\right) &= \rho\left(\frac{u}{u+v}\frac{f}{u} + \frac{v}{u+v}\frac{g}{v}\right) \\ &\leq \frac{u}{u+v}\rho\left(\frac{f}{u}\right) + \frac{v}{u+v}\rho\left(\frac{g}{v}\right) \leq 1.\end{aligned}$$

D'où $\|f+g\|_{\rho} \leq u + v$
Finalement,

$$\|f+g\|_{\rho} \leq \|f\|_{\rho} + \|g\|_{\rho}$$

□

Remarque 4.1. *Si ρ n'est pas convexe, $\|.\|_{\rho}$ n'est pas une norme.*

Exemple 4.1. .

1. *Soit $(X, \|.\|)$ un espace normé alors la fonction $\rho(.) = \|.\|$ est une modulaire convexe sur X et $X_{\rho} = X$. De plus,*

$$\|f\|_{\rho} = \inf\left\{u > 0,\ \left\|\frac{f}{u}\right\| \leq 1\right\} = \|f\|,\ \forall f \in X$$

2. *Les espaces de Lebesgue L^p, $p \geq 1$, sont des espaces modulaires avec*

$$\rho(f) = \int_{\Omega} |f|^p \, d\mu, \ \forall f \in L^p(\Omega)$$

La norme usuelle de $L^p(\Omega)$ coincide avec la norme $\|.\|_\rho$.
En effet,

$$\|f\|_\rho = \inf \left\{ k > 0, \ \int_{\Omega} \left| \frac{f}{k} \right|^p d\mu \leq 1 \right\}$$

Donc

$$\rho\left(\frac{f}{\|f\|_\rho} \right) = \int_{\Omega} \left| \frac{f}{\|f\|_\rho} \right|^p d\mu \leq 1$$

Par conséquent,

$$\int_{\Omega} |f|^p \, d\mu \leq \|f\|_\rho^p \ \text{ c.-à-d.}, \ \|f\|_{L^p} \leq \|f\|_\rho \tag{4.1}$$

D'autre part, on a

$$\rho\left(\frac{f}{\|f\|_{L^p}} \right) = \int_{\Omega} \left| \frac{f}{\|f\|_{L^p}} \right|^p d\mu = \frac{1}{\|f\|_{L^p}^p} \int_{\Omega} |f|^p \, d\mu = 1$$

Alors $\|f\|_{L^p}$ appartient à l'ensemble $\left\{ k > 0, \ \int_{\Omega} \left| \frac{f}{k} \right|^p \leq 1 \right\}$ donc

$$\|f\|_\rho \leq \|f\|_{L^p} \tag{4.2}$$

D'après (4.1) et (4.2) on obtient $\|f\|_{L^p} = \|f\|_\rho$.

Norme d'Amemiya

Théorème 4.2. *Soit ρ une modulaire convexe sur X. Alors la fonction définie par*

$$\|f\|_\rho^A = \inf_{\lambda > 0} \lambda \left[1 + \rho\left(\frac{f}{\lambda} \right) \right]$$

*est une norme sur X_ρ appelée norme **d'Amemiya.***

Démonstration. Si $f = 0$ alors $\|f\|_\rho^A = 0$

Si $\|f\|_\rho^A = 0$ alors $\inf\limits_{\lambda > 0} \lambda \left[1 + \rho\left(\frac{f}{\lambda} \right) \right] = 0$ d'où $f = 0$.

Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in X_\rho$

$$\|\alpha f\|_\rho^A = \inf_{\lambda > 0} \lambda \left[1 + \rho\left(\frac{\alpha f}{\lambda} \right) \right] = \alpha \inf_{\frac{\lambda}{\alpha} > 0} \frac{\lambda}{\alpha} \left[1 + \rho\left(\frac{f}{\frac{\lambda}{\alpha}} \right) \right] = \alpha \|f\|_\rho^A$$

Soient $f, g \in X_\rho$, et $u, v \in \mathbb{R}_+^*$. En utilisant la définition de la borne inférieure on obtient pour tout $\varepsilon > 0$

$$u\left(1 + \rho\left(\frac{f}{u} \right) \right) < \|f\|_\rho^A + \varepsilon,$$

ce qui donne

$$\rho\left(\frac{f}{u}\right) < \frac{\|f\|_\rho^A + \varepsilon}{u} - 1$$

De même

$$\rho\left(\frac{g}{v}\right) < \frac{\|g\|_\rho^A + \varepsilon}{v} - 1$$

Par la convexité de ρ on a

$$\begin{aligned}\rho\left(\frac{f+g}{u+v}\right) &= \rho\left(\frac{u}{u+v}\frac{f}{u} + \frac{v}{u+v}\frac{g}{v}\right) \\ &\leq \frac{u}{u+v}\rho\left(\frac{f}{u}\right) + \frac{v}{u+v}\rho\left(\frac{g}{v}\right) \\ &\leq \frac{\|f\|_\rho^A + \|g\|_\rho^A + 2\varepsilon}{u+v} - 1\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\|f+g\|_\rho^A &\leq (u+v)\left(1 + \rho\left(\frac{f+g}{u+v}\right)\right) \\ &\leq \|f\|_\rho^A + \|g\|_\rho^A + 2\varepsilon.\end{aligned}$$

En faisant tendre ε vers zéro on obtient,

$$\|f+g\|_\rho^A \leq \|f\|_\rho^A + \|g\|_\rho^A$$

□

4.1.2 Topologie et convergence dans les espaces modulaires

On peut munir l'espace modulaire X_ρ de la topologie induite par la norme en considérant, comme ouverts élémentaires, les ensembles

$$B(x_0, \varepsilon) = \left\{x \in X_\rho, \|x - x_0\|_\rho < \varepsilon\right\}, \ x_0 \in X_\rho, \ \varepsilon > 0.$$

i *La convergence dans les espaces modulaires peut être introduite de la manière suivante :*

Une suite $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset (X, \rho)$ sera dite modulaire convergente vers un élément $x \in X$, lorsqu'il existe un nombre réel $k > 0$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \rho(k(x_n - x)) = 0.$$

ii *Le lien entre la convergence modulaire et la convergence au sens de la norme $\|.\|_\rho$ est donné par :*

$$\|x_n - x\|_\rho \to 0 \text{ si et seulement si } \rho(k(x_n - x)) \to 0, \ \forall k > 0.$$

4.2 Espaces d'Orlicz

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et ϕ une $N-$fonction.

4.2.1 Modulaire d'Orlicz

Définition 4.1. *La fonctionnelle,*

$$\begin{array}{rcl}\rho_\phi : M(\Omega) & \to & [0,\,\infty] \\ f & \longmapsto & \rho_\phi\left(f\right) = \int\limits_\Omega \phi\left(f\left(x\right)\right)d\mu\end{array}$$

*est une modulaire convexe sur $M(\Omega)$ dite **modulaire d'Orlicz***

4.2.2 Classe d'Orlicz

On appelle classe d'Orlicz l'ensemble des fonctions $f \in M(\Omega)$ vérifiant

$$\int\limits_\Omega \phi(f(x))d\mu < \infty.$$

On note $L^0_\phi(\Omega)$ la classe d'Orlicz. c'est-à-dire :

$$L^0_\phi(\Omega) = \left\{ f \in M(\Omega) \text{ telle que} \int\limits_\Omega \phi(f(x))d\mu < \infty \right\}.$$

Remarque 4.2. *$L^0_\phi(\Omega)$ n'est pas un espace vectoriel. Voir l'exercice 4.1*

4.2.3 Espace d'Orlicz

Définition 4.2. *On définit l'espace d'Orlicz $L_\phi(\Omega)$ par :*

$$\begin{aligned} L_\phi(\Omega) &= \left\{ f \in M(\Omega) \text{ telle que } \exists\lambda > 0 : \lambda f \in L^0_\phi(\Omega) \right\} \\ &= \left\{ f \in M(\Omega) \text{ telle que } \int\limits_\Omega \phi(\lambda f(x))d\mu < \infty \text{ pour un certain } \lambda > 0 \right\}. \end{aligned}$$

Remarque 4.3. *$L^0_\phi\left(\Omega\right) \subset L_\phi\left(\Omega\right)$ et $\mathcal{L}^\infty\left(\Omega\right) \subset L_\phi\left(\Omega\right)$.*

Proposition 4.1. *$L_\phi(\Omega)$ est un espace vectoriel réel.*

Démonstration. 1) Soient $f_1, f_2 \in L_\phi(\Omega)$. Alors il existe $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ tels que $\rho_\phi(\lambda_1 f_1) < \infty$ et $\rho_\phi(\lambda_2 f_2) < \infty$.

Soit $\lambda = \min(\lambda_1, \lambda_2)$. En utilisant la convexité et la croissance de ϕ on obtient,

$$\begin{aligned} \int\limits_\Omega \phi(\frac{\lambda}{2}(f_1 + f_2))d\mu &\leq \int\limits_\Omega \frac{1}{2}(\phi(\lambda f_1) + \phi(\lambda f_2))d\mu \\ &\leq \int\limits_\Omega \frac{1}{2}(\phi(\lambda_1 f_1) + \phi(\lambda_2 f_2))d\mu < \infty. \end{aligned}$$

Donc $f_1 + f_2 \in L_\phi(\Omega)$.

2) Soit $\beta \in \mathbb{R}$ et $f \in L_\phi(\Omega)$, montrons que $\beta f \in L_\phi(\Omega)$. D'après ce qui précède on a $nf \in L_\phi(\Omega), \forall n \geq 1$.

Comme $\mathbb{R}$ est archimédien alors $\forall\beta \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\beta \leq n$ et ainsi on obtient $\beta f \in L_\phi(\Omega)$.

Par conséquent, $L_\phi(\Omega)$ est un espace vectoriel réel. $\square$

Définition 4.3. *On définit l'espace d'Orlicz $E_\phi(\Omega)$ comme suit :*

$$E_\phi(\Omega) = \{f \in M(\Omega) : \rho_\phi(\lambda f) < \infty \text{ pour chaque } \lambda > 0\}.$$

1. *Comme pour les espaces $L^p(\Omega)$ les espaces $L_\phi(\Omega)$ et $E_\phi(\Omega)$ correspondent aux espaces $L_\phi(\Omega)$ et $\mathcal{E}_\phi(\Omega)$ quand les fonctions égales $\mu-$presque partout sont identifiées.*
2. *Dans la définition des espaces d'Orlicz on a considéré une N-fonction, en fait on peut prendre une fonction d'Orlicz. On s'est restreint aux N-fonctions pour l'étude des propriétés de ces espaces.*
3. *L'espace $E_\phi(\Omega)$ est un sous espace de $L_\phi(\Omega)$ il est parfois appelé "petit espace d'Orlicz" et $L_\phi(\Omega)$.le "grand espace d'Orlicz.*

Proposition 4.2. *On a $E_\phi(\Omega) = L_\phi(\Omega)$ si et seulement si $\phi \in \triangle_2(\infty)$.*

Démonstration. Si $\phi \notin \triangle_2$, alors il existe une suite $(\alpha_k)_k$ croissante vers l'infini telle que $\phi(\alpha_1) \geq \frac{\varepsilon}{\mu(F)}$ et

$$\phi\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)\alpha_k\right) > 2^k\phi(\alpha_k), \forall k \in \mathbb{N}$$

avec $\varepsilon > 0$, $F \in \Sigma$ et $\mu(F) > 0$.
Soit $(F_k)_k$ une suite de sous-ensembles disjoints de F tel que $\phi(\alpha_k)\mu(F_k) = \frac{\varepsilon}{2^k}$
Soit $f_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k \chi_{F_k}$, alors

$$\begin{aligned}\rho_\phi(f_n) &= \int_\Omega \phi\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k \chi_{F_k}\right) d\mu \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \phi(\alpha_k)\mu(F_k) \\ &= \frac{\varepsilon}{2^n} \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow \infty\end{aligned}$$

Donc $f_n \in L_\phi(\Omega)$.

D'autre part, $\forall l > 1$, pour $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $l \geq 1 + \frac{1}{n_0}$ on a pour tout $n \geq n_0$,

$$\rho_\phi(lf_n) > \sum_{k=n+1}^{\infty} \phi\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)\alpha_k\right)\mu(F_k) > \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^k\phi(\alpha_k)\mu(F_k) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \varepsilon = \infty$$

D'où $f_n \notin E_\phi(\Omega), \forall n \in \mathbb{N}$. □

4.2.4 Inégalité de Jensen

Soit $f \in L_\phi(\Omega)$. Alors,

$$\phi\left(\left(\frac{1}{\mu(\Omega)}\right)\int_\Omega f(t)d\mu\right) \leq \frac{1}{\mu(\Omega)}\rho_\phi(\Omega).$$

Démonstration. ϕ est une N-fonction, donc convexe alors elle peut s'écrire comme enveloppe supérieure de fonctions affines

$$\phi(x) = \sup_{n\geq 0}(a_n x + b_n)$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}
\phi\left[\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_{\Omega} f(t)d\mu\right]) &= \sup_{n\geq 0}\left[\frac{a_n}{\mu(\Omega)}\int_{\Omega} f(t)d\mu + b_n\right] = \sup_{n\geq 0}\left[\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_{\Omega} a_n f(t)d\mu + \mu(\Omega)b_n\right] \\
&= \sup_{n\geq 0}\left[\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_{\Omega} a_n f(t)d\mu + \int_{\Omega} b_n d\mu\right] = \sup_{n\geq 0}\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_{\Omega}[a_n f(t)d\mu + b_n]d\mu \\
&\leq \frac{1}{\mu(\Omega)}\int_{\Omega}\sup_{n\geq 0}[a_n f(t)d\mu + b_n]d\mu = \frac{1}{\mu(\Omega)}\int_{\Omega}\phi(f(t))d\mu \\
&= \frac{1}{\mu(\Omega)}\rho_{\phi}(\Omega).
\end{aligned}$$

□

4.2.5 Comparaison des espaces d'Orlicz $L_{\phi}(\Omega)$

Proposition 4.3. *Soient ϕ_1 et ϕ_2 deux N-fonctions.*
$L_{\phi_1}(\Omega) \subset L_{\phi_2}(\Omega)$ si et seulement s'il existe $u_0 > 0$ et $\alpha > 0$ tels que

$$\phi_2(u) \leq \phi_1(\alpha u), \forall u \geq u_0.$$

Démonstration. **La suffisance.**
On suppose que

$$\phi_2(u) \leq \alpha\phi_1(u), \forall u \geq u_0. \tag{4.3}$$

Soit $f \in L_{\phi_1}(\Omega)$. alors il existe $\lambda > 0$ tel que $\int_{\Omega}\phi_1(\lambda f(x))d\mu < \infty$.
En utilisant l'inégalité 4.3 on obtient,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega}\phi_2(\frac{\lambda}{\alpha}f(x))d\mu &= \int_{\{x,\ \frac{\lambda}{\alpha}f(x)<u_0\}}\phi_2(\frac{\lambda}{\alpha}f(x))d\mu + \int_{\{x,\ \frac{\lambda}{\alpha}f(x)\geq u_0\}}\phi_2(\frac{\lambda}{\alpha}f(x))d\mu \\
&\leq \phi_2(u_0)\mu(\Omega) + \int_{\Omega}\phi_1(f(x))d\mu < \infty.
\end{aligned}$$

Donc $f \in L_{\phi_2}(\Omega)$.Par conséquent $L_{\phi_1}(\Omega) \subset L_{\phi_2}(\Omega)$.
La nécessité.
Par l'absurde, on suppose que

$$\forall u_0 > 0 \text{ et } \forall\alpha > 0 \ \text{ on a } \phi_2(u) > \alpha\phi_1(u), \forall u \geq u_0.$$

Alors,d'après la proposition 3.4 on peut trouver une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante telle que

$$\phi_2(u_n) > \phi_1(2^n n u_n).$$

On sait que la fonction $x \mapsto \frac{\phi(x)}{x}$ est croissante alors

$$\frac{\phi_1(nu_n)}{nu_n} \leq \frac{\phi_1(2^n nu_n)}{2^n nu_n)}.$$

Ce qui donne

$$\phi_1(2^n nu_n) \geq 2^n\phi_1(nu_n)$$

On subdivise Ω en sous intervalles disjoints Ω_n, tels que :

$$\mu(\Omega_n) = \frac{\phi_1(u_1)\mu(\Omega)}{2^n \phi_1(nu_n)}.$$

On pose

$$f(x) = \begin{cases} nu_n & \text{si} \quad x \in \Omega_n \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \bigcup\limits_n \Omega_n \end{cases}.$$

On a

$$\begin{aligned} \rho_{\phi_1}(f) &= \int\limits_\Omega \phi_1(f(x))d\mu = \sum_{n\geq 1} \int\limits_{\Omega_n} \phi_1(f(x))d\mu = \sum_{n\geq 1} \int\limits_{\Omega_n} \phi_1(nu_n)d\mu \\ &= \sum_{n\geq 1} \phi_1(nu_n)\mu(\Omega_n) = \mu(\Omega)\phi_1(u_1) \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

La série $\sum \frac{1}{2^n}{}_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente donc sa somme est finie alors $\rho_{\phi_1}(f) < \infty$
D'où $f \in L_{\phi_1}(\Omega)$.
D'autre part,

$$\rho_{\phi_2}(\lambda f) = \int\limits_\Omega \phi_2(\lambda f(x))d\mu = \sum_{n\geq 1} \phi_2(\lambda n u_n)\mu(\Omega_n)$$

Si $\lambda \geq 1$ alors

$$\rho_{\phi_2}(\lambda f) \geq \sum_{n\geq 1} \phi_2(nu_n)\mu(\Omega_n) \geq \sum_{n\geq 1} 2^n \phi_2(nu_n) \frac{\phi_1(u_1)\mu(\Omega)}{2^n \phi_1(nu_n)} = \infty$$

Si $\lambda \leq 1$ alors $\frac{1}{\lambda} \geq 1$ soit m un entier tel que $m \geq \frac{1}{\lambda}$ ce qui donne $\frac{1}{m} \leq \lambda$

$$\begin{aligned} \rho_{\phi_2}(\lambda f) &= \int\limits_\Omega \phi_2(\lambda f(x))d\mu = \sum_{n\geq 1} \phi_2(\lambda n u_n)\mu(\Omega_n) \\ &\geq \sum_{n\geq 1} \phi_2(\frac{n}{m} u_n)\mu(\Omega_n) \\ &\geq \sum_{n\geq m} \phi_2(u_n)\mu(\Omega_n) \geq \sum_{n\geq m} 2^n \phi_1(u_n)\mu(\Omega_n) \\ &\geq \sum_{n\geq m} \phi_1(u_1)\mu(\Omega = \infty \end{aligned}$$

Donc $\forall \lambda > 0$ $\rho_{\phi_2}(\lambda f) = \infty$. Ce qui donne que $f \notin L_{\phi_2}(\Omega)$ □

4.3 Normes sur les espaces d'Orlicz

Dans la théorie des espaces d'Orlicz, trois normes sont apparues. Dans les années trente Orlicz a introduit la norme,

$$\|f\|_\phi^o = \sup \left\{ \int\limits_\Omega |f(t)\, g(t)|\, d\mu : g \in L_{\phi^*}(\Omega)\,,\ \rho_{\phi*}(g)) \leq 1 \right\}$$

dite ***norme d'Orlicz****, puis Nakano* (1950), *Morse-Transue* (1950) *et Luxemburg* (1955) *ont considéré une autre norme, qui est parfois appelée* ***la norme de Luxemburg-Nakano*** *mais généralement dans la littérature, elle est appelée* ***la norme de Luxemburg****. Cette norme est la fonction de Minkowski* (*la jauge*) *de la boule unité pour la modulaire d'Orlicz* ρ_ϕ*. C'est-à-dire,*

$$\|f\|_\phi = \inf\{\lambda > 0 : \rho_\phi \left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1\}.$$

Approximativement à la même époque, I. Amemiya a considéré la norme,

$$\|f\|_{\phi}^{A} = \inf_{k>0} \frac{1}{k}[1 + \rho_{\phi}(kf)]$$

*dite **norme d'Amemiya**.*

Norme d'Orlicz

Proposition 4.4. *Soit $f \in L_{\phi}(\Omega)$ alors,*

$$\|f\|_{\phi}^{o} = \sup \left\{ \int_{\Omega} |f(t)\, g(t)|\, d\mu : g \in L_{\phi^*}(\Omega)\, ,\ \rho_{\phi*}(g)) \leq 1 \right\}, \tag{4.4}$$

*est une norme sur l'espace $L_{\phi}(\Omega)$ dite **norme d'Orlicz**.*

Démonstration. voir l'exercice 4.2 □

Norme de Luxemburg

Proposition 4.5. *Soit $f \in L_{\phi}(\Omega)$ alors,*

$$\|f\|_{\phi} = \inf\{\lambda > 0 : \rho_{\phi}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1\}, \tag{4.5}$$

*est une norme sur l'espace $L_{\phi}(\Omega)$ dite **norme de Luxemburg**.*

Démonstration. Voir l'exercice 4.3 □

Norme d'Amemiya

Soit $f \in L_{\phi}(\Omega)$ alors

$$\|f\|_{\phi}^{A} = \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left[1 + \rho_{\phi}(kf)\right]$$

*est une norme sur l'espace $L_{\phi}(\Omega)$ dite **norme d'Amemiya** [4]*

4.3.1 Inégalités auxiliaires entre la modulaire d'Orlicz et les normes sur $L_{\phi}(\Omega)$

Proposition 4.6. *Soient $f \in L_{\phi}(\Omega)$ et $g \in L_{\phi^*}(\Omega)$, alors*

1. $\|f\|_{\phi}^{0} \leq \rho_{\phi}(f) + 1$,
2. $\|f\|_{\phi}^{0} \leq 1 \Longrightarrow \rho_{\phi^*}(p(|f|)) \leq 1$ *où p est la fonction densité de ϕ,*
3. $\|f\|_{\phi}^{0} \leq 1 \Longrightarrow \rho_{\phi}(f) \leq \|f\|_{\phi}^{0}$.

Démonstration. 1) Par l'inégalité de Young on a $|fg| \leq \phi(f) + \phi^*(g)$, en intégrant on aura

$$\int_{\Omega} |fg|\, d\mu \leq \rho_{\phi}(f) + \rho_{\phi^*}(g)\,.$$

Par conséquent,

$$\|f\|_{\phi}^{0} = \sup_{\rho_{\phi^*}(g) \leq 1} \int_{\Omega} |fg|\, d\mu \leq \rho_{\phi}(f) + 1.$$

2) Montrons que $\|f\|_{\phi}^{0} \leq 1 \Longrightarrow \rho_{\phi^*}(p(|f|)) \leq 1$.
Par définition de la norme d'Orlicz on a :

$$\int_{\Omega} |fg|\, d\mu \leq \begin{cases} \|f\|_{\phi}^{0} & \text{si} \quad \rho_{\phi^*}(g) \leq 1 \\ \rho_{\phi^*}(g)\, \|f\|_{\phi}^{0} & \text{si} \quad \rho_{\phi^*}(g) > 1 \end{cases},$$

C'est-à-dire,

$$\int_{\Omega} |fg|\, d\mu \leq \max\left(1, \rho_{\phi^*}(g)\right) \|f\|_{\phi}^{0}. \tag{4.6}$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ on pose,

$$\Omega_n = \{t \in \Omega : |f(t)| \leq n\} \quad \text{et} \quad f_n = |f|\, \chi_{\Omega_n},$$

Alors la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est croissante et $\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(t) = |f(t)|$, ainsi la suite $\left(\|f_n\|_{\phi}^{0}\right)_{n\geq 1}$ est croissante et d'après le théorème de la convergence monotone on obtient

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|f_n\|_{\phi}^{0} = \|f\|_{\phi}^{0}.$$

Montrer que $\rho_{\phi^*}(p(|f|)) \leq 1$ revient à montrer que $\lim_{n\longrightarrow\infty} \rho_{\phi^*}(p(|f_n|)) \leq 1$.
Pour cela on suppose le contraire, c'est-à-dire

$$\forall n \geq n_0 \text{ on a } 1 < \rho_{\phi^*}(p(|f_n|)) < +\infty,$$

D'après l'égalité dans l'inégalité de Young , on a $\forall n \geq n_0$

$$|f_n|\, p(|f_n|) = \phi(|f_n|) + \phi^*(p(|f_n|)) > \phi^*(p(|f_n|))$$

En intégrant les deux membres de l'inégalité et en utilisant 4.6 et le fait que $\rho_{\phi^*}(p(|f_n|)) > 1$ on obtient,

$$\rho_{\phi^*}(p(|f_n|)) < \int_{\Omega} |f_n|\, p(|f_n|)\, d\mu \leq \|f_n\|_{\phi}^{0} \rho_{\phi^*}(p(|f_n|)).$$

Donc $\|f_n\|_{\phi}^{0} > 1$. Ce qui implique que $\|f\|_{\phi}^{0} > 1$. Contradiction avec le fait que $\|f\|_{\phi}^{0} \leq 1$.
Alors $\rho_{\phi^*}(p(|f|)) \leq 1$.
3) Montrons que

$$\|f\|_{\phi}^{0} \leq 1 \Longrightarrow \rho_{\phi}(f) \leq \|f\|_{\phi}^{0}.$$

Par l'égalité dans l'inégalité de Young on a

$$|f(t)|\, p(|f(t)|) = \phi(f(t)) + \phi^*(p(|f(t)|)),$$

d'où

$$\int_{\Omega} |f(t)|\, p(|f(t)|) d\mu = \rho_{\phi}(f) + \rho_{\phi^*}(p(|f(t)|)) \geq \rho_{\phi}(f),$$

Comme $\|f\|_{\phi}^{0} \leq 1$ alors d'après la propriété précédente $\rho_{\phi^*}(p(|f(t)|)) \leq 1$

$$\rho_{\phi}(f) \leq \|f\|_{\phi}^{0}$$

□

Proposition 4.7. *Soient* $f \in L_{\phi}(\Omega)$ *et* $g \in L_{\phi^*}(\Omega)$.

1. Si $\|f\|_\phi > 0$ *alors* $\rho_\phi\left(\frac{f}{\|f\|_\phi}\right) \leq 1$,

2. $\|f\|_\phi \leq 1 \Longleftrightarrow \rho_\phi(f) \leq 1$,

3. $\|f\|_\phi \leq 1 \Longrightarrow \rho_\phi(f) \leq \|f\|_\phi \leq 1$.

Démonstration. 1) Si $\|f\|_\phi > 0$ alors $\rho_\phi\left(\frac{f}{\|f\|_\phi}\right) \leq 1$ c'est à dire le minimum est atteint dans la définition de la norme de Luxemburg. Ceci est une conséquence du théorème de la convergence monotone appliqué à une suite $(k)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}^+$ croissante convergent vers $\|f\|_\phi$.

3) Montrons $\|f\|_\phi \leq 1 \Longleftrightarrow \rho_\phi(f) \leq 1$;

Si $\rho_\phi(f) \leq 1$ alors par définition $\|f\|_\phi \leq 1$.donc $\frac{1}{\|f\|_\phi} \geq 1$, ce qui donne

$$\rho_\phi(f) \leq \rho_\phi\left(\frac{f}{\|f\|_\phi}\right) \leq 1.$$

4) Montrons que $\|f\|_\phi \leq 1 \Longrightarrow \rho_\phi(f) \leq \|f\|_\phi \leq 1$.

Soit $f \in L_\phi(\Omega)$, $f \neq 0$, alors $\rho_\phi\left(\frac{f}{\|f\|_\phi}\right) \leq 1$. Comme $\|f\|_\phi \leq 1$ c.-à-d. $\frac{1}{\|f\|_\phi} \geq 1$ alors

$$\phi\left(\frac{f}{\|f\|_\phi}\right) \geq \frac{1}{\|f\|_\phi}\phi(f).$$

En intégrant sur Ω on obtient,

$$\frac{1}{\|f\|_\phi}\rho_\phi(f) \leq \rho_\phi\left(\frac{f}{\|f\|_\phi}\right) \leq 1.$$

D'où $\rho_\phi(f) \leq \|f\|_\phi \leq 1$. □

Proposition 4.8. *Inégalité de Hölder*

Soient $f \in L_\phi(\Omega)$ *et* $g \in L_{\phi^*}(\Omega)$. *Alors*

$$\int_\Omega |f(t)g(t)| \leq 2\|f\|_\phi \|g\|_{\phi^*} \tag{4.7}$$

Démonstration. On pose $x = \frac{f(t)}{\|f\|_\phi}$ et $y = \frac{g(t)}{\|g\|_{\phi^*}}$. D'après l'inégalité de Young, on obtient,

$$\frac{|f(t)|}{\|f\|_\phi}\frac{|g(t)|}{\|g\|_{\phi^*}} \leq \phi\left(\frac{f(t)}{\|f\|_\phi}\right) + \phi^*\left(\frac{g(t)}{\|g\|_{\phi^*}}\right).$$

En intégrant sur E, on obtient,

$$\int_\Omega \frac{f(t)}{\|f\|_\phi}\frac{g(t)}{\|g\|_{\phi^*}}d\mu \leq \rho_\phi\left(\frac{f}{\|f\|_\phi}\right) + \rho_\phi\left(\frac{g}{\|g\|_{\phi^*}}\right) \leq 2$$

Ce qui donne

$$\int_\Omega |f(t)|\,|g(t)|\,d\mu \leq 2\|f\|_\phi \|g\|_{\phi^*}.$$

□

4.3.2 Équivalence des deux normes

Proposition 4.9. *La norme d'Orlicz est équivalente à la norme de Luxemburg. Plus précisément,*

$$\|f\|_{\phi} \leq \|f\|_{\phi}^{0} \leq 2\|f\|_{\phi}.$$

Démonstration. Montrons que $\|f\|_{\phi}^{0} \leq 2\|f\|_{\phi}$.

Soit $f \in L_{\phi}(\Omega)$ et $g \in L_{\phi^*}(\Omega)$. D'après l'inégalité de Hölder 4.7 on a

$$\int_{\Omega} f(t)g(t)d\mu \leq 2\|f\|_{\phi}\|g\|_{\phi^*}.$$

Alors

$$\sup_{\substack{g\in L_{\phi^*}(\Omega),\\ \rho_{\phi*}(g))\leq 1}} \int_{\Omega} f(t)g(t)d\mu \leq 2\|f\|_{\phi}$$

Donc $\|f\|_{\phi}^{0} \leq 2\|f\|_{\phi}$.

Pour montrer que $\|f\|_{\phi} \leq \|f\|_{\phi}^{0}$, il suffit de montrer que pour tout $f \in L_{\phi}(\Omega)$, $f \neq 0$ on a $\rho_{\phi}\left(\frac{f}{\|f\|_{\phi}^{0}}\right) \leq 1$.

D'après l'égalité dans l'inégalité de Young, on a :

$$\int_{\Omega} \frac{|f|}{\|f\|_{\phi}^{0}} p\left(\frac{|f|}{\|f\|_{\phi}^{0}}\right) d\mu = \rho_{\phi}\left(\frac{|f|}{\|f\|_{\phi}^{0}}\right) + \rho_{\phi^*}\left(p\left(\frac{|f|}{\|f\|_{\phi}^{0}}\right)\right).$$

D'autre part, par l'inégalité (4.6)

$$\int_{\Omega} \frac{|f|}{\|f\|_{\phi}^{0}} p\left(\frac{|f|}{\|f\|_{\phi}^{0}}\right) d\mu \leq \max\left(1, \rho_{\phi^*}\left(p\left(\frac{|f|}{\|f\|_{\phi}^{0}}\right)\right)\right),$$

par suite,

$$\rho_{\phi}\left(\frac{|f|}{\|f\|_{\phi}^{0}}\right) + \rho_{\phi^*}\left(p\left(\frac{|f|}{\|f\|_{\phi}^{0}}\right)\right) \leq \max\left(1, \rho_{\phi^*}\left(p\left(\frac{|f|}{\|f\|_{\phi}^{0}}\right)\right)\right).$$

On distingue deux cas :

Si $\rho_{\phi^*}\left(p\left(\frac{|f|}{\|f\|_{\phi}^{0}}\right)\right) > 1$ alors

$$\rho_{\phi}\left(\frac{f}{\|f\|_{\phi}^{0}}\right) \leq 1.$$

Donc

$$\rho_{\phi}\left(\frac{f}{\|f\|_{\phi}^{0}}\right) = 0 < 1$$

Si $\rho_{\phi^*}\left(p\left(\frac{|f|}{\|f\|_{\phi}^{0}}\right)\right) \leq 1$ alors

$$\rho_{\phi}\left(\frac{f}{\|f\|_{\phi}^{0}}\right) \leq 1 - \rho_{\phi^*}\left(p\left(\frac{f}{\|f\|_{\phi}^{0}}\right)\right) \leq 1$$

Finalement, on a

$$\rho_\phi\left(\frac{f}{\|f\|_\phi^0}\right)\leq 1.$$

□

Remarque 4.4. *Les deux normes sont équivalentes alors* $\left(L_\phi(\Omega),\|f\|_\phi\right)$ *et* $\left(L_\phi(\Omega),\|f\|_\phi^o\right)$ *ont les mêmes propriétés topologiques mais pas nécessairement les mêmes propriétés géométriques.*

4.3.3 Égalité de la norme d'Orlicz et la norme d'Amemiya

Les inégalités suivantes $\|.\|_\phi\leq\|.\|_\phi^A\leq 2\|.\|_\phi$ *et l'équivalence de la norme de Luxemburg et la norme d'Orlicz* $\|.\|_\phi\leq\|.\|_\phi^o\leq 2\|.\|_\phi$ *ont suggéré que peut-être la norme Orlicz et la norme d'Amemiya sont égales. Effectivement l'égalité* $\|f\|_\phi^A=\|f\|_\phi^o$ *a lieu pour tout* $f\in L_\phi(\Omega)$ *quand* ϕ *est une N-fonction. Mais le problème d'égalité de ces deux normes dans le cas général d'une fonction d'Orlicz est resté longtemps ouvert jusqu'à l'an* 2000*. Cette égalité est très importante, car il est plus facile de manipuler la formule d'Amemiya qui utilise seulement la fonction d'Orlicz, que la norme d'Orlicz qui fait appel à la fonction d'Orlicz* ϕ *et à sa complémentaire* ϕ^**.*

Avant d'énoncer et de démontrer le résultat sur l'égalité des deux normes on va commencer par le résultat suivant

Théorème 4.3. *Soit* $f\in L_\phi(\Omega)$*, s'il existe* $k>0$ *tel que* $\rho_{\phi^*}(p(k|f|))=1$ *alors*

$$\|f\|_\phi^o=\int_\Omega|f(t)|\,p(k|f(t)|)\,d\mu=\frac{1}{k}\left[1+\rho_\phi(kf)\right]$$

Démonstration. Par définition de la norme d'Orlicz

$$\|f\|_\phi^0=\sup_{\substack{\rho_{\phi^*}(g)\leq 1\\ g\in L_\phi^*(\Omega)}}\int_\Omega|f(t)\,g(t)|\,d\mu\geq\int_\Omega|f(t)\,p(kf(t))|\,d\mu \tag{4.8}$$

D'après l'égalité dans l'inégalité de Young

$$\int_\Omega k\,|f(t)\,p(kf(t))|\,d\mu=\rho_\phi(kf)+\rho_{\phi^*}(p(kf))=\rho_\phi(kf) \tag{4.9}$$

Les inégalités(4.8) et (4.9) donnent

$$\|f\|_\phi^0\geq\frac{1}{k}\left[1+\rho_\phi(kf)\right].$$

D'autre part, on a

$$\|f\|_\phi^0=\frac{1}{k}\sup_{\substack{\rho_{\phi^*}(g)\leq 1\\ g\in L_\phi^*(\Omega)}}\int_\Omega k\,|f(t)\,g(t)|\,d\mu$$

Soit $g\in L_{\phi^*}(\Omega)$ tel que $\rho_{\phi^*}(g)\leq 1$ alors par l'inégalité de Young, on obtient,

$$\int_\Omega k\,|f(t)\,g(t)|\,d\mu\leq\rho_\phi(kf)+\rho_{\phi^*}(g))\leq\rho_\phi(kf)+1.$$

Ce qui donne

$$\sup_{\substack{\rho_{\phi^*}(g)\leq 1\\ g\in L_\phi^*(\Omega)}}\int_\Omega k\,|f(t)\,g(t)|\,d\mu\leq\rho_\phi(kf)+1$$

C'est à dire
$$\|f\|_{\phi}^{0} \leq \frac{1}{k}\left[1+\rho_{\phi}(kf)\right].$$
Par conséquent,
$$\|f\|_{\phi}^{0} = \frac{1}{k}\left[1+\rho_{\phi}(kf)\right].$$
Montrons maintenant que $\|f\|_{\phi}^{o} = \int\limits_{\Omega} |f(t)|\, p(k\,|f(t)|)\, d\mu$

On a
$$\begin{aligned}\|f\|_{\phi}^{0} \leq \frac{1}{k}\left[1+\rho_{\phi}(kf)\right] = \|f\|_{\phi}^{0} &\leq \frac{1}{k}\left[\rho_{\phi^{*}}(p(k\,|f|)) + \rho_{\phi}(kf)\right] \\ &\leq \frac{1}{k}\int\limits_{\Omega} |kf(t)\, p(kf(t))|\, d\mu = \int\limits_{\Omega} |f(t)\, p(kf(t))|\, d\mu\end{aligned}$$

En combinant cette inégalité et l'inégalité (4.8) on obtient $\|f\|_{\phi}^{o} = \int\limits_{\Omega} |f(t)|\, p(k\,|f(t)|)\, d\mu$ □

Théorème 4.4. *Soit $f \in L_{\phi}(\Omega)$ alors*
$$\|f\|_{\phi}^{o} = \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left[1+\rho_{\phi}(kf)\right] \tag{4.10}$$

Démonstration. D'après la démonstration précédente on a $\forall k>0$ $\|f\|_{\phi}^{0} \leq \frac{1}{k}\left[1+\rho_{\phi}(kf)\right].$

Par conséquent, $\|f\|_{\phi}^{o} \leq \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left[1+\rho_{\phi}(kf)\right].$

Inversement, soit $\varepsilon > 0$ comme ϕ est une $N-$fonction alors d'après le lemme 3.2 il existe une N-fonction ϕ_1 tel que
$$\phi(x) \leq \phi_1(x) \leq (1+\varepsilon)\,\phi(x)$$
$$\text{et}$$
$$\|f\|_{\phi}^{o} \leq \|f\|_{\phi_1}^{o} \leq (1+\varepsilon)\,\|f\|_{\phi}^{o}$$

avec ϕ_1 et ϕ_1^{*} sont strictement convexes

ϕ_1 est strictement convexe alors sa fonction densité p_1 est continue

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^{*}$ on pose,
$$\Omega_n = \{t \in \Omega : |f(t)| \leq n\} \quad \text{et} \quad f_n = |f|\,\chi_{\Omega_n},$$
Alors la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est croissante et $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f_n(t) = |f(t)|.$

Soit
$$\begin{array}{rcccl} F & : & \mathbb{R}_{+} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & k & \mapsto & \rho_{\phi^{*}}(p_1(k\,|f_n|)) \end{array}$$

Comme p_1 est continue alors F est continue et croissante et $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} F(k) = +\infty$. Donc il existe k_1 tel que $\rho_{\phi^{*}}(p_1(k\,|f_n|)) = 1$

ainsi la suite $\left(\|f_n\|_{\phi}^{0}\right)_{n\geq 1}$ est croissante et d'après le théorème de la convergence monotone on obtient
$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|f_n\|_{\phi}^{0} = \|f\|_{\phi}^{0}.$$

Montrer que $\rho_{\phi^{*}}(p(|f|)) \leq 1$ revient à montrer que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \rho_{\phi^{*}}(p(|f_n|)) \leq 1.$ □

Proposition 4.10. *$\forall f \in L_\phi(\Omega) \setminus \{0\}$ on a l'inf est atteint dans (4.10), plus précisément,*

$$k \in K(f) = [k^*, k^{**}] \text{ si et seulement si } \|f\|^\circ = \frac{1}{k}[1 + \rho_\phi(kf)]$$

où

$$k^* = \inf\{k > 0, \rho_{\phi^*}(p(k|f|)) \geq 1\}$$
$$k^{**} = \sup\{k > 0, \rho_{\phi^*}(p(k|f|)) \leq 1\}$$

p est la dérivée à droite de ϕ
Évidemment, on a $k^* \leq k^{**} \quad \forall f \in L_\phi^o(\Omega) \setminus \{0\}$.

Remarque 4.5. *Si ϕ est une $N-$fonction l'inf dans (??) est toujours atteint c'est-à-dire : est-ce que $K(f)$ est toujours non vide, mais dans le cas d'une fonction d'Orlicz, ce n'est pas toujours vrai.*

4.4 Exemples d'espaces d'Orlicz

Dans cette section, on s'intéresse à des exemples d'espaces d'Orlicz munis de la norme d'Orlicz. Des résultats du même type sont obtenus dans le cas de la norme de Luxemburg voir [8].

Exemple 4.2.
Les espaces L^p $(1 \leq p < \infty)$ sont les espaces d'Orlicz L_{ϕ_p} avec,

$$\phi_p(x) = |x|^p.$$

De plus,

$$\|f\|^o_{\phi_p} = \begin{cases} \omega_p \|f\|_{L^p} & \text{avec } \omega_p = p(p-1)^{\left(\frac{1-p}{p}\right)}, \text{ si } 1 < p < \infty \\ \|f\|_{L^1} & \text{si } p = 1 \end{cases}$$

En effet,
Montrons que $L_{\phi_p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

$$\begin{aligned} L_{\phi_p}(\Omega) &= \left\{ f \in M(\Omega) : \exists \lambda > 0, \int_\Omega \phi_p(\lambda f(t))\, d\mu < \infty \right\} \\ &= \left\{ f \in M(\Omega) : \exists \lambda > 0, \lambda^p \int_\Omega |f(t)|^p\, d\mu < \infty \right\} \\ &= \left\{ f \in M(\Omega) : \int_\Omega |f(t)|^p\, d\mu < \infty \right\} \\ &= L^p(\Omega). \end{aligned}$$

Calculons maintenant la norme d'Orlicz de f,

$$\begin{aligned} \|f\|^o_{\phi_p} &= \inf_{k>0} \frac{1}{k}[1 + \rho_{\phi_P}(kf)] \\ &= \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left[1 + \int_\Omega |kf(t)|^p\, d\mu\right] = \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left[1 + k^p \|f\|^p_{L^p(\Omega)}\right]. \end{aligned}$$

Soit $1 < p < \infty$, *considérons la fonction* g *de variable* $k > 0$ *définie par,*

$$g(k) = \frac{1}{k}\left[1 + k^p \|f\|^p_{L^p(\Omega)}\right].$$

La fonction g *est dérivable sur* $]0,\infty[$ *et sa dérivée est de la forme,*

$$g'(k) = \frac{-1}{k^2} + (p-1)k^{p-2}\|f\|^p_{L^p(\Omega)},$$

de plus,

$$\begin{cases} g'(k) < 0 & si \;\; k < \frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p(\Omega)}} \\ g'(k) = 0 & si \;\; k = \frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p(\Omega)}} \\ g'(k) > 0 & si \;\; k > \frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p(\Omega)}}. \end{cases}$$

Cela signifie que, g *est décroissante sur* $]0,\frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p(\Omega)}}[$, *et croissante sur* $]\frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p(\Omega)}},\infty[$. *Alors,*

$$\begin{aligned} \|f\|^o_{\phi_p} &= \inf_{k>0} g(k) \\ &= g\left(\frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p(\Omega)}}\right) \\ &= p\,(p-1)^{\left(\frac{1-p}{p}\right)}\|f\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Considérons maintenant le cas $p = 1$

$$\begin{aligned} \|f\|^o_{\phi_1} &= \inf_{k>0}\frac{1}{k}\left[1 + \int_\Omega \phi_1(kf(t))\,d\mu\right] \\ &= \inf_{k>0}\frac{1}{k}\left[1 + \int_\Omega |kf(t)|\,d\mu\right] = \inf_{k>0}\frac{1}{k}\left[1 + k\int_\Omega |f(t)|\,d\mu\right] \\ &= \inf_{k>0}\frac{1}{k} + \|f\|_{L^1} = \|f\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Exemple 4.3. *L'espace* L^∞ *est l'espace d'Orlicz* L_{ϕ_∞} *avec,* $\phi_\infty : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *définie par :*

$$\phi_\infty(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; x \in [-1, 1] \\ +\infty & sinon, \end{cases}$$

De plus,

$$\|f\|^o_{\phi_\infty} = \|f\|_{L^\infty}.$$

En effet,
On sait que,

$$L^\infty(\Omega) = \{f \in M(\Omega) : \exists\alpha > 0,\ |f(t)| \le \alpha \ \mu - p.p.\ t \in \Omega\}.$$

Il est muni de la norme,

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{\alpha > 0 : |f(t)| \le \alpha\ \mu - p.p.\ t \in \Omega\} = \sup_{t\in\Omega} ess\ |f(t)|.$$

Par définition,

$$
\begin{aligned}
L_{\phi_\infty}(\Omega) &= \left\{ f \in M(\Omega) : \exists \lambda > 0, \int_\Omega \phi_\infty(\lambda f(t))\, d\mu < \infty \right\} \\
&= \left\{ f \in M(\Omega) : \exists \lambda > 0, \int_{\{t\in\Omega : |\lambda f(t)| \le 1\}} \phi_\infty(\lambda f(t))\, d\mu + \int_{\{t\in\Omega : |\lambda f(t)| > 1\}} \phi_\infty(\lambda f(t))\, d\mu < \infty \right\}.
\end{aligned}
$$

Comme,

$$
\exists \lambda > 0, \int_{\{t\in\Omega : |\lambda f(t)| \le 1\}} \phi_\infty(\lambda f(t))\, d\mu + \int_{\{t\in\Omega : |\lambda f(t)| > 1\}} \phi_\infty(\lambda f(t))\, d\mu < \infty,
$$

alors, on a nécessairement

$$
\mu(\{t \in \Omega : |\lambda f(t)| > 1\}) = 0.
$$

Ce qui donne,

$$
\begin{aligned}
L_{\phi_\infty}(\Omega) &= \{ f \in M(\Omega) : \exists \lambda > 0,\ |\lambda f(t)| \le 1\ \mu - p.p.\ t \in \Omega \} \\
&= \left\{ f \in M(\Omega) : \exists \lambda > 0,\ |f(t)| \le \frac{1}{\lambda}\ \mu - p.p.\ t \in \Omega \right\} \\
&= L^\infty(\Omega).
\end{aligned}
$$

Montrons l'égalité $\|f\|^o_{\phi_\infty} = \|f\|_{L^\infty}$.
On sait que,

$$
\|f\|^o_{\phi_\infty} = \inf_{k>0} \frac{1}{k}[1 + \rho_{\phi_\infty}(kf)].
$$

Comme,

$$
|kf(t)| \le 1\ \mu - p.p.\ t \in \Omega,
$$

alors,

$$
|f(t)| \le \frac{1}{k}\ \mu - p.p.\ t \in \Omega \implies \|f\|_{L^\infty} \le \frac{1}{k} \implies 0 < k \le \frac{1}{\|f\|_{L^\infty}} = \theta(f).
$$

Où

$$
\theta(f) = \sup\{\lambda > 0 : \rho_\phi(\lambda f) < \infty\}
$$

Par suite,

$$
\begin{aligned}
\|f\|^o_{\phi_\infty} &= \inf_{0<k\le \frac{1}{\|f\|_{L^\infty}}} \frac{1}{k} \left[1 + \int_{\{t\in\Omega : |\lambda f(t)| \le 1\}} \phi_\infty(kf(t))\, d\mu \right] \\
&= \inf_{0<k\le \frac{1}{\|f\|_{L^\infty}}} \frac{1}{k} \\
&= \|f\|_{L^\infty}.
\end{aligned}
$$

Exemple 4.4. *Les espaces* $L^p \cap L^\infty$ $(1 \le p < \infty)$ *sont les espaces d'Orlicz* $L_{\phi_{p,\infty}}$ *avec,*

$$
\phi_{p,\infty}(x) = \begin{cases} |x|^p & si\ \ x \in [-1, 1] \\ +\infty & sinon. \end{cases}
$$

De plus,

$$
\|f\|^o_{\phi_{p,\infty}} = \|f\|_{L^p \cap L^\infty} = \begin{cases} \beta(f)^{p-1} \|f\|_{L^p} + \|f\|_{L^\infty} & si\ \beta(f) \le (\frac{q}{p})^{\frac{1}{p}} \\ (p)^{\frac{1}{p}} (q)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{L^p} & si\ \beta(f) > (\frac{q}{p})^{\frac{1}{p}}, \end{cases}
$$

où,

$$\beta(f) = \frac{\|f\|_{L^p}}{\|f\|_{L^\infty}} \ \forall f \neq 0 \quad et \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

En particulier, si $p = 1$

$$\|f\|^o_{\phi_{1,\infty}} = \|f\|_{L^1 \cap L^\infty} = \|f\|_{L^1} + \|f\|_{L^\infty}.$$

En effet*,*
Premièrement, montrons que $L^p(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) = L_{\phi_{p,\infty}}(\Omega)$.

$$L_{\phi_{p,\infty}}(\Omega) = \left\{ f \in M(\Omega) : \exists \lambda > 0, \int_\Omega \phi_{p,\infty}(\lambda f)\, d\mu < \infty \right\}.$$

Comme,

$$\exists \lambda > 0, \int_\Omega \phi_{p,\infty}(\lambda f)\, d\mu = \int_{\{t \in \Omega : |\lambda f(t)| \leq 1\}} \phi_\infty(\lambda f(t))\, d\mu + \int_{\{t \in \Omega : |\lambda f(t)| > 1\}} \phi_\infty(\lambda f(t))\, d\mu < \infty,$$

alors, on a nécessairement

$$\mu(\{t \in \Omega : |\lambda f(t)| > 1\}) = 0.$$

Ce qui donne,

$$\begin{aligned}
&= \left\{ f \in M(\Omega) : \exists \lambda > 0, \ \lambda^p \int_\Omega |f(t)|^p\, d\mu < \infty \ et \ |\lambda f(t)| \leq 1 \ \mu - p.p. \ t \in \Omega \right\} \\
&= \left\{ f \in M(\Omega) : \exists \lambda > 0, \ \int_\Omega |f(t)|^p\, d\mu < \infty \ et \ |f(t)| \leq \frac{1}{\lambda} \ \mu - p.p. \ t \in \Omega \right\} \\
&= L^p(\Omega) \cap L^\infty(\Omega).
\end{aligned}$$

Deuxièmement, montrons maintenant l'égalité $\|f\|^o_{\phi_{p,\infty}} = \|f\|_{L^p \cap L^\infty}$.

$$\begin{aligned}
\|f\|^o_{\phi_{p,\infty}} &= \inf_{k>0} \frac{1}{k} \left[1 + \int_\Omega \phi_{p,\infty}(kf(t))\, d\mu \right] \\
&= \inf_{0<k\leq \frac{1}{\|f\|_{L^\infty}}} \frac{1}{k} \left[1 + k^p \int_\Omega |f(t)|^p\, d\mu \right] \\
&= \inf_{0<k\leq \frac{1}{\|f\|_{L^\infty}}} \frac{1}{k} \left[1 + k^p \|f\|^p_{L^p} \right].
\end{aligned}$$

Considérons maintenant la fonction g *de variable* $k > 0$ *définie par,*

$$g(k) = \frac{1}{k} [1 + ak^p] \ \ avec \ a > 0.$$

La fonction g *est dérivable sur* $]0, \infty[$ *et sa dérivée est de la forme,*

$$g'(k) = \frac{-1}{k^2} + a(p-1)k^{p-2},$$

de plus,

$$\begin{cases} g'(k) < 0 & si \ \ k < (\frac{q}{ap})^{\frac{1}{p}} \\ g'(k) = 0 & si \ \ k = (\frac{q}{ap})^{\frac{1}{p}} \\ g'(k) > 0 & si \ \ k > (\frac{q}{ap})^{\frac{1}{p}}. \end{cases}$$

Ceci signifie que $g(k)$ est décroissante sur $]0, (\frac{q}{ap})^{\frac{1}{p}}[$ et croissante sur $](\frac{q}{ap})^{\frac{1}{p}}, \infty[$.
En prenant $a = \|f\|_{L^p}^p$, on obtient :
Si,

$$\frac{1}{\|f\|_{L^\infty}} \leq \frac{1}{\|f\|_{L^p}}(\frac{q}{p})^{\frac{1}{p}} \implies \beta(f) \leq (\frac{q}{p})^{\frac{1}{p}} \quad avec \quad \beta(f) = \frac{\|f\|_{L^p}}{\|f\|_{L^\infty}},$$

alors le seul nombre pour lequel l'inf est atteint est :

$$k_0 = \frac{1}{\|f\|_{L^\infty}} = \theta(f),$$

et,

$$g\left(k_0\right) = \beta(f)^{p-1} \|f\|_{L^p} + \|f\|_{L^\infty}.$$

Si,

$$\frac{1}{\|f\|_{L^\infty}} > \frac{1}{\|f\|_{L^p}}(\frac{q}{p})^{\frac{1}{p}} \implies \beta(f) > (\frac{q}{p})^{\frac{1}{p}},$$

alors le seul nombre pour lequel l'inf est atteint est :

$$k_0 = \frac{1}{\|f\|_{L^p}}(\frac{q}{p})^{\frac{1}{p}},$$

et,

$$g\left(k_0\right) = (p)^{\frac{1}{p}}(q)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{L^p}.$$

Par conséquent,

$$\|f\|_{\phi_{p,\infty}}^o = \|f\|_{L^p \cap L^\infty} = \begin{cases} \beta(f)^{p-1} \|f\|_{L^p} + \|f\|_{L^\infty} & si\ \beta(f) \leq (\frac{q}{p})^{\frac{1}{p}} \\ (p)^{\frac{1}{p}}(q)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{L^p} & si\ \beta(f) > (\frac{q}{p})^{\frac{1}{p}}. \end{cases}$$

4.5 La convergence modulaire dans $L_\phi(\Omega)$

Définition 4.4. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments dans $L_\phi(\Omega)$.*

On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ρ_ϕ convergente (ou modulaire convergente) vers $f \in L_\phi(\Omega)$, si et seulement s'il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\rho_\phi\left(\frac{f_n - f}{\lambda}\right) \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$$

et on note $f_n \xrightarrow{\rho_\phi} f$.

La proposition suivante présente une comparaison entre la convergence modulaire et la convergence en norme sur un espace d'Orlicz.

Proposition 4.11. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $L_\phi(\Omega)$ et $f \in L_\phi(\Omega)$. Alors*

1. *La convergence en norme implique la convergence modulaire.*
2. *La convergence en norme et la convergence modulaire sont équivalentes si et seulement si $\phi \in \triangle_2$.*

Démonstration. Les deux normes (Orlicz et Luxemburg) sont équivalentes il suffit de montrer la proposition pour l'une d'elles

1) Montrons que la convergence en norme implique la convergence modulaire.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $L_\phi(\Omega)$ telle que $f_n \overset{\|\cdot\|_\phi^o}{\longrightarrow} f$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que $\forall n \geq \eta$ on a $\|f_n - f\|_\phi^o < \varepsilon$.

D'après la proposition 4.6 on obtient,

$$\rho_\phi((f_n - f)) \leq \|f_n - f\|_\phi^o < \varepsilon.$$

Ce qui donne la convergence modulaire de (f_n) vers f.

2-1) La suffisance

Supposons que $\phi \in \triangle_2$ et $f_n \overset{\rho_\phi}{\longrightarrow} f$, alors il existe $\lambda > 0, \forall\varepsilon > 0, \exists\eta \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq \eta$. on a

$$\rho_\phi(\lambda(f_n - f)) < \varepsilon,$$

puisque $\phi \in \triangle_2$ alors on a

$$\rho_\phi(2(\lambda(f_n - f))) \leq k\rho_\phi(\lambda(f_n - f)) < k\varepsilon, \quad \forall n \geq \eta.$$

D'autre part,

$$\|2^p\lambda(f_n - f)\|_\phi^0 \leq \rho_\phi(2^p(\lambda(f_n - f))) + 1 \leq k^p\varepsilon + 1,$$

pour $\varepsilon = \dfrac{1}{k^p}$ on a

$$\|2^p(\lambda(f_n - f))\|_\phi^0 \leq 2.$$

D'où,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|f_n - f\|_\phi^0 \leq \frac{1}{\lambda 2^{p-1}} = \varepsilon.$$

C'est-à-dire $f_n \overset{\|\cdot\|_\phi^o}{\longrightarrow} f$.

2-2) La nécessité.

Supposons que $\phi \notin \triangle_2$, alors il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels, positive, croissante, telle que

$$\phi\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)a_n\right) \geq 2^n\phi(a_n), \forall n \geq 1.$$

Alors il est possible de construire une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L_\phi(\Omega)$ telle que $\rho_\phi(f_n) \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\forall$ $l > 1$, on a $\rho_\phi(lf_n) > \infty$.

Ce qui donnera $\|lf_n\|_\phi^o > 1$ et par conséquent $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne convergera pas au sens de la norme.

$\square$

4.6 Quelques propriétés des espaces d'Orlicz

4.6.1 La complétude

Théorème 4.5. *L'espace d'Orlicz $L_\phi(\Omega)$ muni de l'une de ces normes est un espace de Banach.*

Démonstration. On va donné la démonstration dans le cas de la norme d'Orlicz (voir [**?**])

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy dans $L_\phi(\Omega)$. Donc,

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_0 \text{ on a } \|f_n - f_m\|_\phi^o < \varepsilon. \tag{4.11}$$

Ceci signifie que pour toute fonction $g \in L_{\phi^*}(\Omega)$ avec $\rho_{\phi^*}(g) \leq 1$, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_0 \int\limits_{\Omega} |f_n(x) - f_m(x)| |g(x)| d\mu < \varepsilon,$$

Il en résulte que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure. Donc elle contient une sous suite $(f_{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge presque partout vers une limite notée $f(x)$.

Soit $\varepsilon > 0$, en vertu de (4.11) on peut trouvé un k_ε telle que pour tout $k, k+p > k_\varepsilon$, on a

$$\int\limits_{\Omega} \left| f_{n_{k+p}}(x) - f_{n_k}(x) \right| |g(x)| d\mu < \varepsilon, \tag{4.12}$$

pour toute fonction $g \in L_{\phi^*}(\Omega)$ qui satisfait $\rho_{\phi^*}(g) \leq 1$.

Par passage à la limite quand $p \longrightarrow \infty$ dans (4.12), on obtient

$$\int\limits_{\Omega} |f(x) - f_{n_k}(x)| |g(x)| d\mu < \varepsilon, \tag{4.13}$$

Il résulte de l'inégalité(4.13) que $f_0 - f_{n_k} \in L_\phi(\Omega)$, $f \in L_\phi(\Omega)$ et $\left\| f - f_{n_k} \right\|_\phi < \varepsilon$. C'est-à-dire la sous suite, $\left(f_{n_k}\right)_k$ converge en norme vers f. Alors, la suite de Cauchy $(f_n)_{n\geq 1}$ possède une sous suite convergente donc elle converge aussi vers la même limite f.

D'où $L_\phi(\Omega)$ est complet. Par conséquent $L_\phi(\Omega)$ est un Banach □

4.6.2 La dualité dans les espaces d'Orlicz

Soit (ϕ,ϕ^*) un couple complémentaire de N-fonctions.

Lemme 4.1. *Soit $g \in L_{\phi^*}(\Omega)$, la fonction*

$$\begin{array}{llll} T_g : & L_\phi(\Omega) & \to \mathbb{R} \\ & f & \to \displaystyle\int_\Omega f(t) g(t) d\mu \end{array} \tag{4.14}$$

est linéaire continue $(T_g \in (L_\phi(\Omega))^*)$ et

$$\|g\|_{\phi^*} \leq \|T_g\| \leq 2 \|g\|_{\phi^*}$$

Démonstration. La linéairité de T_g découle de la linéarité de l'intégrale.

Pour montrer que T_g est continue il suffit de montrer qu'elle est bornée

On ad'après l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} |T(f)| &= \left| \int_\Omega f(t) g(t) d\mu \right| \\ &\leq \int_\Omega |f(t) g(t)| d\mu \\ &\leq 2\|f\|_\phi \|g\|_{\phi^*} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|T_g\| \leq 2\|g\|_{\phi^*}$$

Donc T_g est bornée et donc continue.

Montrons que $\|g\|_{\phi^*} \leq \|T_g\|$. Pour cela Il suffit de montrer que

$$\rho_{\phi^*}\left(\frac{g}{\| T_g \|}\right) \leq 1$$

Posons
$$F_n=\{t\in\Omega \text{ tel que } |g(t)|\leq n\} \text{ et } g_n=g\chi_{F_n}$$
D'après l'égalité dans l'inégalité de young on a :
$$q\left(\frac{g_n}{\parallel T_g\parallel}\right)\frac{g_n}{\parallel T_g\parallel}=\phi\left(q\left(\frac{g_n}{\parallel T_g\parallel}\right)\right)+\phi^*\left(\frac{g_n}{\parallel T_g\parallel}\right) \tag{4.15}$$
En intégrant on obtient,
$$\begin{aligned}\int q\left(\frac{g_n}{\parallel T_g\parallel}\right)\frac{g_n}{\parallel T_g\parallel}d\mu &= \int\phi\left(q\left(\frac{g_n}{\parallel T_g\parallel}\right)\right)d\mu+\int\phi^*\left(\frac{g_n}{\parallel T_g\parallel}\right)d\mu\\ &=\rho_\phi\left(q\left(\frac{g_n}{\parallel T_g\parallel}\right)\right)+\rho_{\phi^*}\left(\frac{g_n}{\parallel T_g\parallel}\right)\end{aligned}$$
Comme $\rho_{\phi^*}\left(\frac{g_n}{\parallel T_g\parallel}\right)\leq 1$ alors on aura
$$\parallel q\left(\frac{g_n}{\parallel T_g\parallel}\right)\parallel_\phi^\circ\geq\int_\Omega q\left(\frac{g_n}{\parallel T_g\parallel}\right)\frac{g_n}{\parallel T_g\parallel}d\mu$$
Par l'égalité (4.15) et la proposition 4.6 on aura,
$$\begin{aligned}\parallel q\left(\frac{g_n}{\parallel T_g\parallel}\right)\parallel_\phi^\circ &\geq \rho_\phi\left(\frac{g_n}{\parallel T_g\parallel}\right)+1+\rho_{\phi^*}\left(\frac{g_n}{\parallel T_g\parallel}\right)-1\\ &\geq\parallel q\left(\frac{g_n}{\parallel T_g\parallel}\right)\parallel_\phi^\circ+\rho_{\phi^*}\left(\frac{g_n}{\parallel T_g\parallel}\right)-1\end{aligned}$$
D'où
$$\rho_{\phi^*}\left(\frac{g_n}{\parallel T_g\parallel}\right)\leq 1$$
La suite $(g_n)_n$ est croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}g_n=g$, par passage à la limite quand $n\to+\infty$ on obtient :
$$\rho_{\phi^*}\left(\frac{g}{\parallel T_g\parallel}\right)\leq 1$$
Ainsi,
$$\parallel\frac{g}{\parallel T_g\parallel}\parallel_{\phi^*}\leq 1$$
D'où
$$\parallel T_g\parallel\geq\parallel g\parallel_{\phi^*}$$
□

Théorème 4.6. *Théorème de Riesz Fréchet*

Le dual de $\left(E_\phi(\Omega),\|.\|_\phi^o\right)$ *est isométriquement isomorphe à* $(L_{\phi^*}(\Omega),\|.\|_{\phi^*})$, *dans le sens que* $\forall T\in\left(E_\phi(\Omega),\|.\|_\phi^o\right)^*$ *il existe un unique* $g\in(L_{\phi^*}(\Omega),\|.\|_{\phi^*})$ *tel que*
$$T(f)=\int_\Omega f(t)\,g(t)\,d\mu,\qquad\forall\ f\in E_\phi(\Omega)$$
De plus l'application
$$\begin{aligned}H\ :\quad &\left(E_\phi(\Omega),\|.\|_\phi^o\right)^* &&\to(L_{\phi^*}(\Omega),\|.\|_{\phi^*})\\ &T &&\to g\end{aligned}$$
est une isométrie.

Démonstration. D'après le lemme précédent on sait que tout élément g de $L_{\phi^*}(\Omega)$ détermine une fonctionnelle linéaire T_g donnée dans la formule 4.14 sur $L_\phi(\Omega)$ donc aussi sur $E_\phi(\Omega)$.

Soit T un élément donné de $\left(E_\phi(\Omega), \|.\|_\phi^o\right)^*$. Alors,

i) l'application γ définie sur les parties mesurables E de Ω de mesure finies par

$$\gamma(E) = T(\chi_E)$$

est une mesure.absolument continue par rapport à μ.Où χ_E désigne la fonction indicatrice de E

En effet,

On a $\gamma(\emptyset) = T(\chi_\emptyset) = 0$

Soit E_1, $E_2 \subset \nleq$ avec $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ alors,

$$\begin{aligned}\gamma(E_1 \cup E_2) &= T(\chi_{E_1 \cup E_2}) = T(\chi_{E_1} + \chi_{E_2}) \\ &= T(\chi_{E_1}) + T(\chi_{E_2}) = \gamma(E_1) + \gamma(E_2)\end{aligned}$$

Donc γ est additive, par les mêmes arguments on peut en déduire la $\sigma-$additivité de γ.

ii) Montrons la continuité absolue de γ par rapport à μ c.-à-d.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \mu(E) < \delta \Longrightarrow \gamma(E) < \varepsilon$$

On a

$$\begin{aligned}|\gamma(E)| &= |T(\chi_E)| \\ &\leq \| T \| \| \chi_E \|_\phi^o \\ &\leq c \| \chi_E \|_\phi^o \leq c\mu(E)(\phi^*)^{-1}(1/\mu(E))\end{aligned}$$

Posons

$$\delta < \frac{\varepsilon}{c(\phi^*)^{-1}(1/\mu(E))},$$

Alors on aura

$$\mu(E) \leq \frac{\varepsilon}{c(\phi^*)^{-1}(1/\mu(E))},$$

ce qui donne

$$c\mu(E)(\phi^*)^{-1}(1/\mu(E)) \leq \varepsilon.$$

Donc $\gamma(E) < \varepsilon$, d'où la continuité absolue de γ par rapport à μ.

D'après le théorème de Randon-Nicodym, il existe une fonction mesurable positive unique $g \neq 0$ telle que

$$\gamma(E) = \int_\Omega g(t)\, d\mu$$

Ainsi,

$$T(\chi_E) = \int_E g(t)\, d\mu = \int_\Omega \chi_E g(t)\, d\mu$$

Donc pour chaque fonction étagée f on a :

$$T(f) = \int_\Omega f(t)\, g(t)\, d\mu$$

D'après la densité des fonctions étagées dans $E_\phi(\Omega)$ on obtient :

$$T(f) = \int_\Omega f(t)\, g(t)\, d\mu, \quad \forall f \in E_\phi(\Omega)$$

D'où le résultat.

iii) Pour montrons que l'application :

$$\begin{array}{lll} (E_\phi(\Omega))^* & \to & L_{\phi^*}(\Omega) \\ T & \to & g \end{array}$$

est une isométrie il suffit d'utiliser l'inégalité de Hölder et le lemme précédent

□

4.6.3 La réflexivité des espaces d'Orlicz

Théorème 4.7. *Les espaces $L_\phi(\Omega)$ sont réflexifs si et seulement si ϕ et ϕ^* vérifient la condition de croissance Δ_2.*

Démonstration. Elle découle directement du théorème précédent. □

4.6.4 Les injections dans les espaces d'Orlicz

Proposition 4.12. *$L_{\phi_1}(\Omega) \hookrightarrow L_{\phi_2}(\Omega)$ si et seulement si $\phi_2 \prec \phi_1$ à l'infini,*

Démonstration. **La suffisance**

Supposons que $\phi_2 \prec \phi_1$ à l'infini.alors $L_{\phi_1}(\Omega) \subset L_{\phi_2}(\Omega)$, il reste à montrer qu'il existe $c > 0$ tel que

$$\|f\|_{\phi_2} \leq c\,\|f\|_{\phi_1}, \forall f \in L_{\phi_1}(\Omega).$$

On a pour $f \in L_{\phi_2}(\Omega)$

$$\|f\|^0_{\phi_2} = \sup\left\{\int_\Omega |f(t)g(t)|\,d\mu : \rho_{\phi_{2^*}}(g) \leq 1\right\}.$$

Par hypothèse on a $\phi_1^*\left(\dfrac{y}{k}\right) \leq \phi_2^*(y)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\|f\|^0_{\phi_2} &\leq \sup\left\{\int_\Omega |f(t)g(t)|\,d\mu : \rho_{\phi_1^*}\left(\frac{g}{k}\right) \leq 1\right\} \\ &\leq k\sup\left\{\int_\Omega |f(t)v(t)|\,d\mu : \rho_{\phi_1^*}(v) \leq 1\right\} \\ &\leq k\,\|f\|^0_{\phi_1}.\end{aligned}$$

Donc il existe $k > 0$ tel que $\|f\|^0_{\phi_2} \leq k\,\|f\|^0_{\phi_1}, \forall f \in L_{\phi_2}(\Omega)$.

La nécessité.

On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que $\|f\|^0_{\phi_2} \leq k\,\|f\|^0_{\phi_1}, \forall f \in L_{\phi_2}(\Omega)$, donc,

$$\begin{aligned}\sup\left\{\int_\Omega |f(t)g(t)|\,d\mu : \rho_{\phi_{2^*}}(g) \leq 1\right\} &\leq k\sup\left\{\int_\Omega |f(t)v(t)|\,d\mu : \rho_{\phi_1^*}(v) \leq 1\right\} \\ &\leq \sup\left\{\int_\Omega |f(t)g(t)|\,d\mu : \rho_{\phi_1^*}\left(\frac{g}{k}\right) \leq 1\right\}.\end{aligned}$$

Par conséquent, $\rho_{\phi_1^*}\left(\dfrac{g}{k}\right) \leq \rho_{\phi_2^*}(g) \leq 1$. Alors, $\phi_1^*\left(\dfrac{g}{k}\right) \leq \phi_2^*(g)$.

Finalement, $\phi_2(x) \leq \phi_1(kx)$, c.à .d $\phi_2 \prec \phi_1$ à l'infini. □

4.6.5 La séparabilité

Théorème 4.8. .

1. *$E_\phi(\Omega)$ est séparable.*
2. *$L_\phi(\Omega)$ est un espace séparable si et seulement si ϕ vérifie la condition $\triangle_2$.*

4.7 Exercices

4.7.1 Exercices avec solutions

Exercice 4.1. *Montrer que la classe d'Orlicz $L^0_\phi(\Omega)$ n'est pas un espace vectoriel.*

Solution 4.1. *Il suffit de montrer que si $f \in L^0_\phi(\Omega)$ alors $2f \notin L^0_\phi(\Omega)$.*
On prend par exemple $\Omega = [0,1]$,

$$\phi(x) = e^{|x|} - 1 \quad et \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & si \quad \dfrac{1}{2^n} \leq x \leq \dfrac{1}{2^{n-1}} \\ 0 & \quad sinon \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned}\rho_\phi(f) &= \int_\Omega \phi(f(x))d\mu = \int_\Omega [e^{|f(x)|} - 1]d\mu = \int_\Omega \left(e^{\frac{n}{2}} - 1\right)\chi_{\left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right]} d\mu \\ &= \sum_{n\geq 1} \left(e^{\frac{n}{2}} - 1\right)\mu\left(\left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right]\right) \\ &= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}\left(e^{\frac{n}{2}} - 1\right) = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)^n - \sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n}.\end{aligned}$$

On a la série $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{2^n}$ converge et $\frac{\sqrt{e}}{2} < 1$ donc $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)^n$ est aussi convergente.
Donc, $\rho_\phi(f) < \infty$ alors $f \in L^0_\phi(\Omega)$.
D'autre part,

$$\begin{aligned}\rho_\phi(2f) &= \int_\Omega \phi(2f(x))d\mu = \int_\Omega [e^{2|f(x)|} - 1]d\mu = \int_\Omega (e^n - 1)\chi_{\left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right]} d\mu \\ &= \sum_{n\geq 1}(e^n - 1)\mu\left(\left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right]\right) = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n}(e^n - 1) = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{e}{2}\right)^n - \sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n}\end{aligned}$$

On a $\dfrac{e}{2} > 1$ donc la série $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{e}{2}\right)^n$ diverge.
D'où $2f \notin L^0_\phi(\Omega)$.

Exercice 4.2. *Soit $f \in L_\phi(\Omega)$. Montrer que l'application*

$$f \mapsto \|f\|^o_\phi = \sup\left\{\int_\Omega |f(t)\, g(t)|\, d\mu : g \in L_{\phi^*}(\Omega),\ \rho_{\phi*}(g)) \leq 1\right\}, \tag{4.16}$$

est une norme sur $L_\phi(\Omega)$

Solution 4.2. .
Montrons que $\|f\|^0_\phi < \infty$.

Pour $f \in L_\phi(\Omega)$ *et* $g \in L_{\phi^*}(\Omega)$ *on a* $\int\limits_\Omega |fg|\, d\mu = \int\limits_\Omega \lambda \frac{|f|}{\lambda} |g|\, d\mu$, *où* λ *est tel que* $\rho_\phi(\frac{f}{\lambda}) < \infty$ *(Ce* λ *existe toujours car* $f \in L_\phi(\Omega)$*).*

En appliquant l'inégalité de Young on obtient,

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega |fg|\, d\mu &\leq \lambda \int\limits_\Omega [\phi(\frac{|f|}{\lambda}) + \phi^*(|g|)] d\mu \\ &\leq \lambda \int\limits_\Omega \phi(\frac{f}{\lambda}) d\mu + \lambda \int\limits_\Omega \phi^*(g) d\mu \\ &\leq \lambda \rho_\phi(\frac{f}{\lambda}) + \lambda \rho_{\phi^*}(g).\end{aligned}$$

Par conséquent $\|f\|_\phi^0 < \infty$.

Montrons que

$$\|f\|_\phi^0 = 0 \textit{ si et seulement si } f = 0.$$

Si $f = 0$ *alors on a évidemment que* $\|f\|_\phi^0 = 0$.

Pour montrer que si $\|f\|_\phi^0 = 0$ *alors* $f = 0$ *nous supposons que* f *n'est pas nulle. On pose*

$$A = \{x \in \Omega, |f(x)| > 0\},$$

alors $\mu(A) > 0$.

Comme μ *possède la propriété du sous-espace fini, alors il existe* $F \subset A$ *tel que* $0 < \mu(F) < \infty$. *Soit* $k > 0$ *tel que* $\phi^*(k) \leq \frac{1}{\mu(F)}$.

On pose $g = k\chi_F$, *alors*

$$\rho_{\phi^*}(g) = \int\limits_\Omega \phi^*(k\chi_F)\, d\mu = \int\limits_F \phi^*(k)\, d\mu \leq \frac{1}{\mu(F)} \mu(F) = 1.$$

D'autre part,

$$\|f\|_\phi^0 = \sup_{g \in B_{\phi^*}} (\int\limits_\Omega |fg|\, d\mu) \geq \int\limits_\Omega |fg|\, d\mu = \int\limits_\Omega |fk\chi_F|\, d\mu = k \int\limits_F |f|\, d\mu.$$

Alors $\int\limits_F |f|\, d\mu = 0$. *Contradiction avec le fait que* f *est supposée non nulle.*

Pour l'homogénéité *on a* $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\|\alpha f\|_\phi^0 &= \sup_{\rho_{\phi*}(g)) \leq 1} (\int\limits_\Omega |\alpha f(t) g(t)|\, d\mu) \\ &= |\alpha| \sup_{\rho_{\phi*}(g)) \leq 1} (\int\limits_\Omega |f(t) g(t)|\, d\mu) = |\alpha|\, \|f\|_\phi^0.\end{aligned}$$

L'inégalité triangulaire*. Pour* $f, h \in L_\phi(\Omega)$ *on a*

$$\begin{aligned}\|f + h\|_\phi^0 &= \sup_{\rho_{\phi*}(g)) \leq 1} (\int\limits_\Omega |(f+h)g|\, d\mu) = \sup_{\rho_{\phi*}(g)) \leq 1} (\int\limits_\Omega |fg + hg|\, d\mu) \\ &\leq \sup_{\rho_{\phi*}(g)) \leq 1} (\int\limits_\Omega (|fg| + |hg|) d\mu) \leq \sup_{\rho_{\phi*}(g)) \leq 1} \int\limits_\Omega (|fg|\, d\mu + \sup_{\rho_{\phi*}(g)) \leq 1} \int\limits_\Omega |hg|\, d\mu \\ &\leq \|f\|_\phi^0 + \|g\|_\phi^0.\end{aligned}$$

Alors $\|.\|_\phi^0$ *est une norme sur* $L_\phi(\Omega)$.

Exercice 4.3. *Soit $f \in L_\phi(\Omega)$, montrer que l'application*

$$f \mapsto \|f\|_\phi = \inf\{\lambda > 0 : \rho_\phi\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1\}, \tag{4.17}$$

est une norme sur l'espace $L_\phi(\Omega)$.

Solution 4.3. .

1) *On a par définition que $\|f\|_\phi < \infty$.*

2) *Montrons que $\|f\|_\phi = 0 \Leftrightarrow f = 0$*

Si $f = 0$ alors $\|f\|_\phi = 0$.

Inversement, on suppose que $|f| > 0$ sur un ensemble de mesure positive, c'est-à-dire il existe $\delta > 0$ tel que

$$A = \{x \in \Omega, |f(x)| > \delta\} \text{ avec } \mu(A) > 0.$$

Par hypothèse on a $\|f\|_\phi = 0$, alors $\rho_\phi(\frac{f}{k}) \leq 1, \forall k > 0$. Donc $\rho_\phi(nf) \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, alors,

$$\begin{aligned} 1 \geq \rho_\phi(nf) &\geq \int_\Omega \phi(n|f(t)|)\, d\mu \geq \int_A \phi(n|f(t)|) \\ &\geq \int_A \phi(n\delta)\, d\mu = \phi(n\delta)\,\mu(A). \end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $n \longrightarrow \infty$ on obtient, $\phi(n\delta)\,\mu(A) \longrightarrow \infty$. Contradiction.

3) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *et* $\forall f \in L_\phi(\Omega)$ *on a*

$$\begin{aligned} \|\alpha f\|_\phi &= \inf\left\{k > 0 : \rho_\phi(\frac{\alpha f}{k}) \leq 1\right\} \\ &= |\alpha| \inf\left\{\frac{k}{|\alpha|} > 0 : \rho_\phi(\frac{f}{\frac{k}{|\alpha|}}) \leq 1\right\} \\ &= |\alpha| \inf\left\{\beta > 0 : \rho_\phi(\frac{f}{\beta}) \leq 1\right\} \\ &= |\alpha|\,\|f\|_\phi. \end{aligned}$$

4) $\forall f, h \in L_\phi(\Omega) : \|f + h\|_\phi = \inf\left\{k > 0 : \rho_\phi(\frac{f+h}{k}) \leq 1\right\}$.

On pose $k = \lambda_1 + \lambda_2$ avec $\lambda_1 > \|f\|_\phi$ et $\lambda_2 > \|h\|_\phi$ et on obtient,

$$\begin{aligned} \rho_\phi(\frac{f+g}{k}) &= \rho_\phi(\frac{f}{k} + \frac{h}{k}) \\ &= \rho_\phi(\frac{f}{\lambda_1}\frac{\lambda_1}{k} + \frac{h}{\lambda_2}\frac{\lambda_2}{k}) \\ &\leq \frac{\lambda_1}{k}\rho_\phi(\frac{f}{\lambda_1}) + \frac{\lambda_2}{k}\rho_\phi(\frac{h}{\lambda_2}) \\ &\leq \frac{\lambda_1}{k} + \frac{\lambda_2}{k} = 1. \end{aligned}$$

Par suite, $\rho_\phi(\frac{f+h}{k}) \leq 1$, alors $\|f + h\|_\phi \leq k = \lambda_1 + \lambda_2$. En faisant tendre $\lambda_1 \longrightarrow \|f\|_\phi$ et $\lambda_2 \longrightarrow \|h\|_\phi$, on obtient

$$\|f + h\|_\phi \leq \|f\|_\phi + \|h\|_\phi.$$

Exercice 4.4. *Le but de cet exercice est de calculer la norme d'Orlicz d'une fonction caractéristique*

Soit $A \subset \Omega$, A mesurable et χ_A la fonction caractéristique de A. Montrer que

$$\|\chi_A\|_\phi^0 = \mu(A)(\phi^*)^{-1}\left(\frac{1}{\mu(A)}\right).$$

Solution 4.4. *Soit $g \in L_{\phi^*}(\Omega)$ et $\rho_{\phi^*}(g) \leq 1$, par l'inégalité de Jensen on obtient ,*

$$\phi^*\left(\frac{1}{\mu(A)}\int_A g d\mu\right) \leq \frac{1}{\mu(A)}\int_A \phi^*(g)\, d\mu \leq \frac{1}{\mu(A)}\int_\Omega \phi^*(g)\, d\mu \leq \frac{1}{\mu(A)},$$

En appliquant $(\phi^*)^{-1}$ on obtient,

$$\int_A g d\mu \leq \mu(A)(\phi^*)^{-1}\left(\frac{1}{\mu(A)}\right).$$

Par définition de la norme d'Orlicz on a ,

$$\|\chi_A\|_\phi^0 = \sup_{\substack{g\in L_{\phi^*}(\Omega),\\ \rho_{\phi*}(g))\leq 1}} \left(\int_\Omega |\chi_A g(t)|\, d\mu\right) \tag{4.18}$$

$$= \sup_{\substack{g\in L_{\phi^*}(\Omega),\\ \rho_{\phi*}(g))\leq 1}} \left(\int_A |g(t)|\, d\mu\right) \leq \mu(A)(\phi^*)^{-1}\left(\frac{1}{\mu(A)}\right). \tag{4.19}$$

D'autre part,

$$\rho_{\phi^*}\left((\phi^*)^{-1}\left(\frac{1}{\mu(A)}\right)\chi_A\right) = \frac{1}{\mu(A)}\int_\Omega \phi\left[(\phi^*)^{-1}\left(\frac{1}{\mu(A)}\right)\chi_A\right] d\mu$$
$$= \frac{1}{\mu(A)}\int_A d\mu = 1,$$

par conséquent,

$$\|\chi_A\|_\phi^0 = \sup_{\substack{g\in L_{\phi^*}(\Omega),\\ \rho_{\phi*}(g))\leq 1}} \left(\int_\Omega |\chi_A g|\, d\mu\right) \geq \int_\Omega \left|\chi_A (\phi^*)^{-1}\left(\frac{1}{\mu(A)}\right)\right| d\mu$$

$$= \int_A (\phi^*)^{-1}\left(\frac{1}{\mu(A)}\right) d\mu = \mu(A)(\phi^*)^{-1}\left(\frac{1}{\mu(A)}\right). \tag{4.20}$$

En combinant les inégalités (4.18) et (4.20) on obtient

$$\|\chi_A\|_\phi^0 = \mu(A)(\phi^*)^{-1}\left(\frac{1}{\mu(A)}\right).$$

4.7.2 Exercices sans solutions

Exercice 4.5. *Montrer que*
$L_{\phi_1}(\Omega) = L_{\phi_2}(\Omega)$ *si et seulement si* $\phi_2 \sim \phi_1$

Exercice 4.6. *Montrer que l'espace d'interpolation* $L^1 + L^\infty$ *est l'espace d'Orlicz* $L^o_{\phi_{\infty,1}}$ *avec,*

$$\phi_{\infty,1}(x) = \begin{cases} 0 & si \ \ x \in [-1,\, 1] \\ |x| - 1 & sinon. \end{cases}$$

De plus,

$$\|f\|^o_{\phi_{\infty,1}} = \|f\|_{L^1+L^p} = \inf\{\|g\|_{L^1} + \|h\|_{L^\infty} : g + h = f,\ g \in L^1,\ h \in L^\infty\}.$$

Exercice 4.7. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L_\phi(\Omega)$. *On suppose que* $\phi \in \Delta_2$. *Montrer que si* $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_\phi = +\infty$.

Exercice 4.8. *Soit*

$$\phi^*(y) = e^{y^2} - 1$$

1. *Montrer que la fonction* $t \mapsto \psi(t) = e^{4t} - 4e^t + 3$ *est positive sur* $[0, +\infty[$.
2. *En utilisant la question précédente, montrer que la fonction complémentaire* ϕ *de* ϕ^* *vérifie la condition* Δ_2.

Exercice 4.9. 1. *Montrer que la fonction* ϕ_0 *définie par* $\phi_0(x) = e^{x^2} - 1$ *est une fonction d'Orlicz.*

2. *Soit la fonction définie par*

$$\phi(x) = \left[\begin{array}{ll} 1 - \sqrt{1 - x^2} & si\ 0 \le x \le 1 \\ +\infty & si \quad x > 1 \end{array} \right.$$

   (a) *Donner la fonction complémentaire de* ϕ.
   (b) *On prend* $x = 1$, *existe t-il un* y *vérifiant l'égalité de Young ?*

Exercice 4.10. *Soient* ϕ *et* ϕ_1 *deux fonctions d'Orlicz, on note* ψ *et* ψ_1 *leurs fonctions complémentaires respectivement.On suppose que*

$$\phi(x) \le \phi_1(x) \le (1 + \varepsilon)\,\phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

1. *Donner les inégalités entre* $\psi_1(y)$ *et* $\psi(y)$.
2. *Montrer que* $\|f\|^o_{\phi_1} \le (1 + \varepsilon)\,\|f\|^o_\phi$

Exercice 4.11. *Soit* ϕ *une* $N-$*fonction*

1. *Soit* f *un élément de la sphère unité de* $\left(L_\phi([0,1]), \|.\|^o_\phi\right)$. *On suppose qu'il existe* k, $1 < A < k < B$ *tel que*

$$\|f\|^o_\phi = \frac{1}{k}\,[1 + \rho_\phi(kf)]$$

   Soit

$$E = \{t \in [0,1] \ : \ |f(t)| \ge u_0\} \ \ avec\ u_0 = \frac{1}{B}\phi^{-1}[\frac{B}{2}(1 - \frac{1}{A})]$$

   Montrer que

$$\frac{1}{k}\rho_{B\phi}(kf\chi_E) \ge \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{A}\right)$$

2. *Soit* g *un autre élément de la sphère unité de* $\left(L_\phi([0,1]), \|.\|^o_\phi\right)$. *Calculer* $\|f\|^o_\phi + \|g\|^o_\phi$, *puis en déduire* $\|f + g\|^o_\phi$.

Exercice 4.12. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* $L_\phi(\Omega)$ *muni de la norme de Luxemburg. Montrer que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en norme vers zéro si et seulement si*

$$\lim_{n\to+\infty}\rho_\phi(\lambda f_n)=0 \quad \forall\lambda>0$$

Exercice 4.13. *Soient* (ϕ,ϕ^*) *un couple complémentaire de* $N-$*fonctions et* $0\neq f\in L_\phi(\Omega)$, $0\neq g\in L_{\phi^*}(\Omega)$. *Montrer que*

$$\int\limits_\Omega |fg|\,d\mu=\|f\|_\phi\,\|g\|^o_{\phi^*}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} \displaystyle\int\limits_\Omega \phi\left(\frac{f}{\|f\|_\phi}\right)d\mu=1 \\ \text{et} \\ \text{Il existe } 0<k^*<\infty \text{ tel que } \left(\frac{|f|}{\|f\|_\phi}\right)\left(\frac{k^*|g|}{\|g\|^o_{\phi^*}}\right)=\phi\left(\frac{|f|}{\|f\|_\phi}\right)+\phi^*\left(\frac{k^*|g|}{\|g\|^o_{\phi^*}}\right)\end{cases}$$

Indication : Calculer $\left\|\frac{g}{\|g\|^o_{\phi^*}}\right\|^o_{\phi^*}$.

Exercice 4.14. *Soit la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *à valeur dans* $\mathbb{R}_+$ *par*

$$\phi(x)=|x|-\arctan(|x|)$$

1. *Est ce que* ϕ *est une* $N-$*fonction?*
2. *Montrer que* $\phi\in\Delta_2(0)$ *et* $\phi\in\Delta_2(+\infty)$.
3. *Calculer* $\lim_{t\to+\infty}\phi^*\left(\phi'(t)\right)$, *où* ϕ^* *est la fonction complémentaire de* ϕ.
4. *Soit c un nombre réel positif et E un ensemble mesurable de* $\mathbb{R}^n$ *tel que* $\mu(E)\leq\frac{2}{\pi}$. *On pose* $f=c\chi_E$.
   Montrer que $\rho_{\phi^*}\left(\phi'(kf)\right)<1$ *pour tout* $k>0$. ρ_{ϕ^*} *est la modulaire d'Orlicz définie sur* $M(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 4.15. *Soient* ϕ *une* $N-$*fonction et* Ω *un borné de* $\mathbb{R}^n$.
Soient $f_1,f_2\in S(L_\phi(\Omega))$ *et* $k_1\in K(f_1)$, $k_2\in K(f_2)$. *Montrer que*

$$2=\|f_1\|^A_\phi+\|f_2\|^A_\phi\geq\frac{1}{k}\left[1+\rho_\phi(k(f_1+f_2))\right] \quad \text{où } k=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$$

Bibliographie

[1] R.A. Adams, Sobolev spaces, the university of British Columbia, 1975.

[2] N. Boccara, Analyse fonctionelle. Ellipses, (1984) .

[3] H. Brezis, Analyse fonctionelle. Masson, (1987).

[4] S. Chen, Geometry of Orlicz spaces. Dissertationes Math. 356 (1996) $1 - 204$.

[5] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö et M. Ruzicka, . Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents. Lecture Notes in Mathematics, . Heidelberg : Springer (2011) .

[6] El Haj Laamri, Mesures, intégration, convolution transformee de Fourier des fonctions. Dunod, (2007) .

[7] H. Hudzik et L. Maligranda, Amemiya norm equals Orlicz norm in general. Indag. Mathem., N.S., 11(4), (2000) .

[8] P. Kosmol et D. Müller-Wichards, Optimization in Function Spaces, with Stability Considerations in Orlicz Spaces. De Gruyter, (2011.)

[9] M. A. Krasnosel'skiĭ et Ya. B. Rutickiĭ, Convex function and Orlicz spaces. Philadelphia 26, *Pennsylvania,* (1961) .

[10] M. M. Rao et Z.D. Ren, Theory of Orlicz Spaces. Marcel Dekker Inc., New York, (1991) .