

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane Mira de Béjaia



Faculté des Sciences Exactes
Département de Recherche Opérationnelle

Cours de Management de projets

Pour Master 1 en Sciences de Données & Aide à la Décision

Réalisé par :

Dr. Belkacem BRAHMI

Maître de conférences A, Université de Béjaia

Maître de recherche A, Unité de Recherche LaMOS, Université de Béjaia

Emails : belkacem.brahmi@univ-bejaia.dz ;

Année universitaire 2024 – 2025

Table des matières

Liste des figures	4
Liste des tables	5
Introduction Générale	6
1 Introduction au management de projets	7
1.1 Notion de Projet	7
1.1.1 Les objectifs d'un projet	8
1.1.2 Gestion de projet	8
1.1.3 Tâches	8
1.1.4 Ressources	9
1.1.5 Contraintes	9
1.2 Management de projets	10
1.2.1 Les activités du management de projet	10
1.2.2 Les grandes phases du management de projet	11
2 Outils d'ordonnement de projet	14
2.1 Formulation du problème	14
2.1.1 Les variables de décision :	15
2.1.2 Fonction objectif :	15
2.1.3 Les contraintes :	15
2.2 Méthode des potentiels MPM	16
2.2.1 Construction du réseau MPM	16
2.2.2 Calcul de l'ordonnement	17

2.3	Méthode PERT	20
2.3.1	Construction du réseau PERT	20
2.3.2	Calcul de dates	22
2.3.3	Calcul des marges et du chemin critique	23
2.4	Diagramme de Gantt	25
2.4.1	Construction du planning de Gantt	26
3	Pert probabiliste et Pert coût	28
3.1	PERT Probabiliste	28
3.1.1	Étapes de la méthode	29
3.1.2	Exemple d'application	31
3.2	Le suivi des coûts	32
3.2.1	Principe de réduction	33
3.3	Exemple d'application 1	34
3.4	Exemple d'application 2 :	36
4	Gestion des ressources	39
4.1	Types de ressources	39
4.2	Méthodes de gestion des ressources	40
4.2.1	Nivellement des ressources	40
4.2.2	Lissage des ressources	40
4.2.3	Méthodes sérielles	40
4.3	Exemple	41
5	Étude de cas	44
5.1	Présentation de Ganttproject :	44
5.2	Description du problème :	45
5.3	Ordonnancement du projet	45
5.4	Gestion des ressources	47
5.5	Réduction de la durée du projet	49
	Bibliographie	51

Table des figures

1.1	Triangle de qualité	10
1.2	Rôle de l'équipe projet d'après (Bourgeois, 1997)	11
1.3	Les grandes phases du management de projet	12
2.1	Expression d'une relation de précédence entre deux tâches	17
2.2	Réseau MPM associé au projet de l'exemple 2.1	17
2.3	Calcul des dates de début au plus tôt des tâches	18
2.4	Calcul des dates de début au plus tard des tâches	19
2.5	Représentation d'une tâche dans un réseau PERT	21
2.6	Représentation d'une tâche fictive	21
2.7	Fonction d'une tâche fictive dans PERT	21
2.8	Commencement du réseau PERT	22
2.9	Insertion des tâches B et C	22
2.10	Réseau associé à la méthode PERT	22
2.11	Les dates de début au plus tôt et au plus tard de la tâche (i, j)	24
2.12	Les dates de début au plus tôt des tâches du projet	25
2.13	Les dates de début au plus tard des tâches du projet	25
2.14	Planning Gantt au plus tôt du projet	27
2.15	Planning Gantt au plus tard du projet	27
3.1	Distribution de probabilité de la loi Bêta	29
3.2	Réseau Pert associé au projet	31
3.3	Relation entre le coût et la durée d'une tâche	33
3.4	Réseau PERT pour une durée de 34 jours	35

3.5	Réseau PERT pour une durée de 30 jours	35
3.6	Réseau PERT pour une durée de 29 jours	35
3.7	Réseau PERT pour une durée de 28 jours	36
3.8	Réseau PERT de l'itération 1	37
3.9	Réseau PERT de l'itération 2	37
3.10	Réseau PERT de l'itération 3	38
3.11	Réseau PERT de l'itération 4	38
4.1	Réseau Pert du projet.	42
4.2	Diagramme de Gantt au plus tôt avec ressources	43
4.3	Diagramme de Gantt de la solution sérielle	43
5.1	Réseau MPM du projet	45
5.2	Réseau PERT associé au projet	46
5.3	Diagramme de Gantt au plus tôt	46
5.4	Diagramme de Gantt avec ressources	47
5.5	Diagramme de Gantt de la solution sérielle	48
5.6	Réseau PERT pour une durée de 47 jours	50

Liste des tableaux

2.1	La distribution des tâches du projet	16
5.1	Durées normales et réduites des tâches, avec leurs coûts marginaux	49

Introduction Générale

Le management de projet a connu, ces dernières années, d'importantes évolutions, tant dans le champ d'application que dans les méthodes et les pratiques.

Depuis longtemps, le terme **projet** désignait surtout la façon de s'organiser pour réaliser ou atteindre un objectif ou plusieurs objectifs. Cependant, chacun à sa façon de le faire pour le même projet, ce qui les a amené à faire des plans et des préparations suivant des techniques pour assurer l'obtention de leurs objectifs, tous cela se réduit en deux mots "**Management de projet**".

Le management de projets couvre toutes les connaissances, les compétences et les méthodes appliquées aux activités d'un projet, en vue d'atteindre les attentes des parties prenantes du projet, et par conséquent trouver un équilibre entre les objectifs conflictuels, tels que : coûts, délais, qualité...etc.

Il est évident que la réalisation de tout projet comporte un risque quel que soit sa planification ; il est important d'intégrer le facteur risque à tout projet et définir la façon de l'anticiper et de le gérer, donc on a besoin de ce qu'on appelle "la gestion des risques".

La gestion des risques est aujourd'hui un des sujets les plus utilisés pour aborder le management de projet en général, alors une question est impérative "que faire pour un bon management de projet prenant en compte les divers risques?".

Ce cours sur la management et la gestion de projets a pour but d'initier et de familiariser les étudiants aux notions fondamentales sur le management de projets, ainsi que les différentes techniques de planification des projets, à savoir la méthode PERT et MPM, ainsi que le diagramme de Gantt. Le premier chapitre est introductif, où les notions de base sur la gestion de projets, tâches, les et les différentes phases d'un projets sont traités. Dans le second chapitre, on présentera les différentes méthodes de planification de projets et dans le troisième chapitre on présentera la méthode PERT probabiliste, ainsi que le problème de maîtrise des coûts. Le quatrième chapitre est consacré à la gestion des ressources. On clôturera ce cours par une étude de cas.

Introduction au management de projets

Ce chapitre introductif a pour but de se familiariser avec les différents concepts utilisés dans le domaine de management de projets. Les notions de tâches, ressources et contraintes sont primordiales pour comprendre la notion de projet. On abordera par la suite le management de projets et ces différentes activités. A la fin de ce projet, on présentera les quatre phases à suivre pour réaliser un projet.

1.1 Notion de Projet

Une première définition est donnée par l'*Organisation Mondiale de Normalisation* selon la norme ISO 10006 (version 2003) et reprise par l'AFNOR sous la norme X50-105.

Définition 1.1 (Projet). Un projet est un processus qui consiste en un **ensemble d'activités** coordonnées et maîtrisées, comportant des dates de début et de fin, entrepris dans le but **d'atteindre un objectif** conforme à des exigences spécifiques, incluant **des contraintes de délais, de coûts et de ressources**.

Définition 1.2 (Projet). On appelle projet **l'ensemble des actions** à entreprendre afin de répondre à un besoin défini dans des **délais fixés**. Un projet est ainsi une action temporaire comportant un début et une fin, mobilisant des **ressources identifiées** (humaines et matérielles) durant sa réalisation. Le projet possède également **un coût** et fait donc l'objet d'une budgétisation des moyens et d'un bilan indépendant de celui de l'entreprise.

Exemple 1.1. :

- Informatisation d'un service ;
- Construction d'une route, un barrage, un bâtiment, une école . . .etc ;
- Développement d'un nouveau produit sur le marché ;
- Conception et développement d'un logiciel
- Organisation d'une fête de mariage, des jeux, . . .etc.

1.1.1 Les objectifs d'un projet

Chaque projet admet trois principaux objectifs qui sont souvent liés :

1. Les objectifs de délai sont une composante très importante pour le client. Chaque projet a un délais de réalisation qu'il faut le respecter.
2. Les objectifs de coût sont primordiaux, notamment dans le cadre d'un contrat à prix non révisables ou dans le cas d'un projet interne.
3. Les objectifs de performance technique relatifs au respect des spécifications fonctionnelles et des caractéristiques techniques du produit. On se définit ainsi un niveau de qualité en ce qui concerne, par exemple la fiabilité du produit, la facilité d'usage, . . .etc.

1.1.2 Gestion de projet

La gestion de projet traduit l'ensemble des activités d'organisation, de gestion, de coordination et de pilotage d'un projet. Elle requiert la mise en place d'une équipe projet. Elle aura donc pour but de fournir à l'équipe projet les outils nécessaires de prise de décision afin de réaliser le projet en respectant les contraintes de coût, de qualité et de délai. La qualité traduit le degré de réponse apporté par le projet au besoin exprimé au départ, un projet doit satisfaire le ou les besoins exprimés. La qualité renvoie également à la notion de performance et de fiabilité.

1.1.3 Tâches

On appelle tâches ou activités, l'ensemble des opérations élémentaires qui doivent s'enchaîner pour atteindre un objectif donné. La non exécution d'une tâche entraîne l'arrêt du projet proprement dit ou remet en cause les objectifs fixés. Chaque tâche est caractérisée par :

- Son rôle à jouer dans l'exécution du projet.

- sa durée de réalisation, exprimée en unité de temps (heures, Jours, Semaines, Mois, semestres ou en année).
- Sa date de début et de fin d'exécution.
- Consomme des ressources qui ont un coût d'utilisation et sont disponibles en quantité limitée.
- Est souvent reliée aux autres tâches du projet par des relations d'antériorité qui impliquent qu'une tâche ne peut débuter avant qu'une ou plusieurs autres tâches ne soient préalablement terminées.

1.1.4 Ressources

L'exécution d'une tâche requiert généralement certains moyens matériels, financiers et humains. Ces moyens sont appelés *ressources*. On distingue deux types de ressources :

- ✓ **Ressources consommables** : On dira qu'une ressource est consommable si elle est consommée lors de la réalisation de la tâche (argent, matériaux, pièces de rechange, ...).
- ✓ **Ressources renouvelables** : Une ressource est dite renouvelable si peut être utilisée dans la réalisation de plusieurs tâches. Autrement dit, dès qu'une ressource, mobilisée pour réaliser une certaine activité, redevient disponible elle pourra être mobilisée pour d'autres tâches (machines, ouvriers, équipe spécialisé, outils, ... etc).

1.1.5 Contraintes

Les contraintes de gestion de projet sont engendrées par les relations de succession et de précedence entre les tâches, ainsi que la gestion des ressources. On distingue quatre types :

- a- Contraintes d'antériorité** : La contrainte d'antériorité traduit un ordre de réalisation ou d'exécution des tâches. Une tâche ne peut commencer avant la terminaison complète d'autres tâches ou bien de plusieurs tâches.
- b- Contraintes de localisation temporelle** : Elles concernent des tâches devant débuter impérativement après une date précise et aussi peuvent concerner des tâches qui doivent être achevées avant une date précise.
- c- Contraintes disjonctives** : Ce type de contraintes impose la non réalisation simultanée de deux ou plusieurs tâches à la fois. On rencontre ce type de contraintes lors de l'utilisation d'une ressource rare, présente en un seul exemplaire (une grue, une équipe spécialisée).

d- *Contraintes cumulatives* : Selon [1, 4], on parle de contraintes cumulatives lorsque les tâches demandent une partie d'une ou plusieurs ressources présentes en quantité limitée. Le problème est beaucoup plus combinatoire que pour les contraintes disjonctives.

1.2 Management de projets

Définition 1.3 (Management). Le management est un ensemble de techniques de gestion, d'organisation et d'administration d'une entité.

Définition 1.4 (Management de projets). Le management de projets est l'application des connaissances, de compétences, d'outil et de méthodes aux tâches d'un projet afin de répondre à ses besoins. Le management de projet couvre un large spectre, allant de la maîtrise des techniques de planification et de gestion, à la motivation des équipes et à la qualité des produits ou services [5].

Quand on fait du management de projet, il faut assimiler trois notions importantes, représentées par ce qu'on appelle le triangle de qualité.

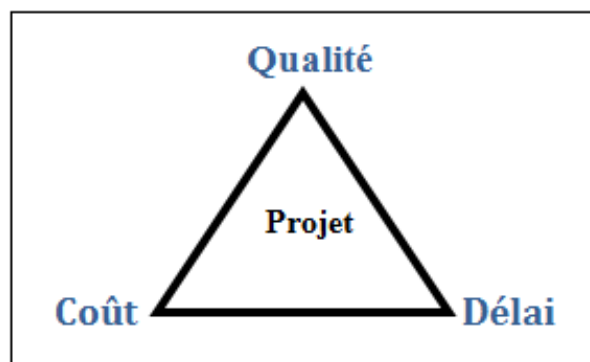


FIGURE 1.1 – Triangle de qualité

1.2.1 Les activités du management de projet

1 - Direction du projet :

La direction du projet est assurée par un "*chef de projet*" assisté parfois d'une équipe appelée "équipe projet", tel qu'illustré sur la figure 1.2. La mission de cette direction de projet est :

- Définir les moyens à mettre en oeuvre en ce qui concerne les ressources matérielles et humaines. Pour cela il faut impliquer un budget à la réalisation du projet.

- Fixer les objectifs en terme de délais et de qualité, le plan de travail.
- Déterminer les risques encourus et de mettre en oeuvre des procédures de surveillance des délais et des coûts.
- Optimiser la répartition des ressources (en mains-d'oeuvre, matériel, . . . etc), en vue d'arriver à une solution optimale, ou de moindre coût.

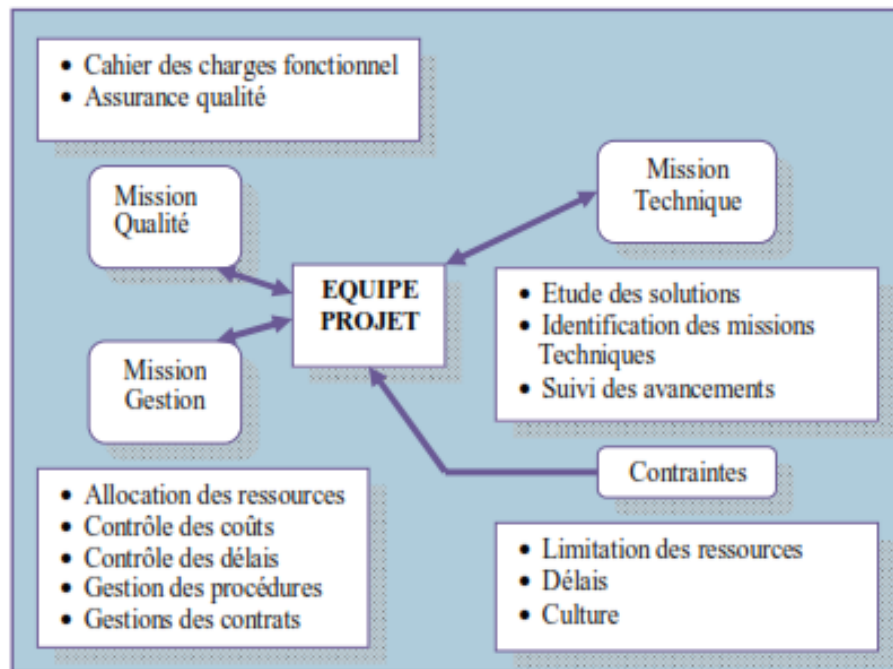


FIGURE 1.2 – Rôle de l'équipe projet d'après (Bourgeois, 1997)

2 - Gestion du projet :

La gestion de projet est assurée par un **contrôleur de projet** qui a pour objectif d'apporter à la direction de projet les informations relatives à l'avancement de l'exécution du projet. Durant la phase de préparation, la gestion de projet permet une estimation rapide de la durée des tâches et des moyens à mobiliser. Ceci permet de préparer l'ordonnancement. Durant l'exécution du projet, la gestion de projet vise la maîtrise des délais et des coûts. A la fin du projet, on fait un bilan final du projet qui permet de tirer des enseignements pour l'avenir.

1.2.2 Les grandes phases du management de projet

Il est possible de découper tout projet selon les quatre grandes phases suivantes :

Conception -> Planification -> Réalisation -> Finalisation

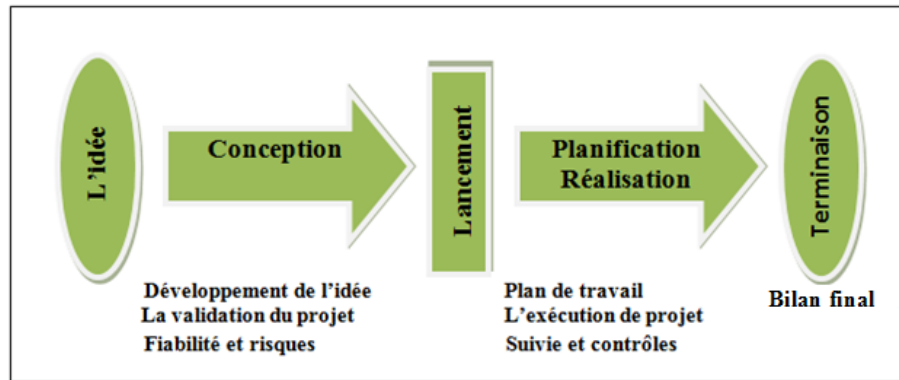


FIGURE 1.3 – Les grandes phases du management de projet

1.2.2.1 Conception (Préparation)

- Déterminer le but du projet.
- Estimer les ressources, coûts et délais.
- Définir le type d'organisation.
- Choisir le chef de projet.
- Estimation des risques.

1.2.2.2 Planification (planifier la réalisation)

- Planification globale.
- Détail des coûts et délais.
- Définition des responsabilités.
- Planifier les affectations des ressources.

1.2.2.3 Réalisation (réaliser la planification)

- Mise en place de l'organisation.
- Exécution du travail.
- Pilotage coûts-délais-spécifications.
- Résolution de problèmes.

1.2.2.4 Finalisation(évaluation & conclusions)

- Évaluation du projet.
- Analyse des écarts entre planifié et réalisé.

- Mémoire des opérations passées.
- Améliorer le déroulement des projets futurs.

Outils d'ordonnancement de projet

Pour tout projet, le problème crucial qui se pose est celui du calendrier d'exécution des tâches. Autrement dit, on cherche à déterminer dans quel ordre doivent s'enchaîner les diverses tâches de manière à minimiser la durée totale de réalisation du projet. Dans ce cours, on ne traite que le problème central d'ordonnancement, soumis à des contraintes potentielles (localisation et succession temporelle).

Dans ce chapitre, nous allons présenter comment suivre les différentes étapes pour réaliser un projet en utilisant des techniques d'ordonnancement, à savoir les méthodes PERT, MPM et diagramme de Gantt.

Pour les méthodes PERT et MPM, nous allons voir comment modéliser un problème d'ordonnancement de tâches à l'aide d'un graphe, comment calculer ses dates de début au plus tôt et au plus tard des tâches, ainsi que la manière de détermination du chemin critique.

Pour Gantt, nous verrons comment représenter le problème sous forme d'un diagramme en exploitant la méthode PERT.

2.1 Formulation du problème

Lors de tout projet de grande taille un problème crucial qui se pose est celui du calendrier d'exécution des tâches. Le problème consiste à déterminer dans quel ordre doivent s'enchaîner les diverses tâches de manière à minimiser la durée totale de réalisation du projet.

Considérons un projet constitué de n tâches à réaliser, chacune étant indexée par i , avec $i = 1, 2, \dots, n$. La durée d'exécution de la tâche i est notée d_i et est connue.

2.1.1 Les variables de décision :

- t_i : la date de début d'exécution de la tâche i .
- t_d : la date de début du projet.
- t_f : la date de fin de projet.

2.1.2 Fonction objectif :

L'objectif principal en gestion de projet est de minimiser la durée totale de réalisation du projet qui représente l'écart entre la date de fin du projet et sa date de début :

$$\min Z = t_f - t_d = t_f,$$

où t_d est la date de début de projet que l'on fixe à zéro ($t_d = 0$).

2.1.3 Les contraintes :

► **Les contraintes de localisation temporelle :**

Aucune tâche ne peut commencer avant la date de début de projet :

$$t_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

► **Les contraintes de succession temporelle :** Expriment que toute tâche i ne peut pas débiter avant que toutes ses tâches antérieures $j \in \Gamma^-(i)$ soient complètement achevées :

$$t_j + d_j \leq t_i, \quad \forall j \in \Gamma^-(i).$$

► **Les contraintes de fin de projet :** Toutes les tâches du projet doivent être achevées avant la date de fin du projet t_f :

$$t_i + d_i \leq t_f, \quad i = 1, \dots, n.$$

Par conséquent, le modèle mathématique formulant le problème central d'ordonnement est le programme linéaire (PL) suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min Z = t_f \\ t_j + d_j \leq t_i, \quad \forall j \in \Gamma^-(i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ t_i + d_i \leq t_f, \quad i = 1, \dots, n, \\ t_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Le PL (2.1) peut être résolu par toute méthode classique de programmation linéaire (simplexe, points intérieurs, ...). Vu la structure particulière du modèle, il existe une autre variante, appelée simplexe réseau, qui est mieux adaptée et plus efficace pour la résolution de ce type de PL.

Exemple 2.1. Considérons un projet composé de 05 tâches dont leurs durées d'exécution sont en jours et sont dans le tableau (2.1)

Tâches	Durée	Préalables
A	3	/
B	3	A
C	2	A
D	2	C-B
E	6	D

TABLE 2.1 – La distribution des tâches du projet

Un exemple de relations de précédence entre les tâches du projet pour cet exemple est la relation entre D et $B - -C$, où le début de la tâche D nécessite à la fois la fin d'exécution des tâches B et C .

2.2 Méthode des potentiels MPM

La méthode des potentiels Metra (MPM) est développée en France par *Bernard Roy* en 1958 pour la construction du Paquebot France et d'une centrale nucléaire. C'est une méthode d'ordonnancement basée sur la théorie des graphes, et vise à optimiser la planification des tâches d'un projet.

2.2.1 Construction du réseau MPM

Pour chaque projet, on lui associe un réseau MPM que l'on note $G = (V, U, d)$, où :

- V : ensemble des sommets de G représentant les tâches du projet ;
- U : L'ensemble des arcs de G représentant les relations d'antériorité et de localisation temporelles entre les tâches. On définira un arc (i, j) reliant les sommets i et j de durée d_i si la tâche i précède la tâche j : autrement dit, la tâche j peut être commencée une fois que la tâche i est complètement achevée, comme l'illustre la figure suivante :
- $d = (d_i, i \in V)$: les durées d'exécution des tâches du projet ;

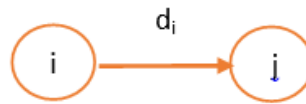


FIGURE 2.1 – Expression d'une relation de précédence entre deux tâches

- On rajoute deux tâches fictives "d" et "f", symbolisant respectivement "*début du projet*" et "*fin du projet*" de durée zéro.

A la fin de construction du réseau MPM, on obtient un graphe simple valué et connexe ayant la source d et le puits f .

Exemple 2.2. Considérons de nouveau l'exemple . Le réseau MPM associé est le suivant :

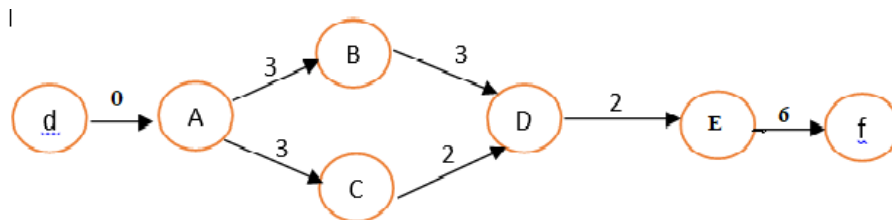


FIGURE 2.2 – Réseau MPM associé au projet de l'exemple 2.1

2.2.2 Calcul de l'ordonnement

Il consiste à calculer deux dates de début pour chaque tâche du projet, à savoir la "*date de début au plus tôt*" et la "*date de début au plus tard*".

2.2.2.1 Date de début au plus tôt :

La date de début au plus tôt de la tâche i , notée t_i , est le moment où l'exécution de cette tâche peut commencer. Elle correspond à l'instant où toutes les tâches antérieures à i ont été complètement terminées.

Elles sont calculées par la procédure itérative suivante :

$$\begin{cases} t_d = 0, & \text{Instant de début de projet,} \\ t_j = \max_{i \in \Gamma^-(j)} \{t_i + d_i\}, \end{cases} \quad (2.2)$$

d_i : la durée de réalisation de la tâche i ;

$\Gamma^-(j)$: l'ensemble des prédécesseurs du sommet j dans le réseau MPM (les tâches antérieures à la $j^{\text{ème}}$ activité);

t_f : représente le plus long chemin, au sens des délais, reliant le sommet source d et le sommet puits f : il correspond à la durée totale de réalisation du projet.

2.2.2.2 Date de début au plus tard :

La date de début au plus tard de la tâche i , notée T_i , est l'ultime date pour son exécution (la commencer) sans retarder le projet. Ces dates sont calculées par la procédure itérative suivante, où on commence les calculs à partir du sommet puits f , i.e., de gauche à droite :

$$\begin{cases} T_f = t_f, & \text{Instant de fin de projet;} \\ T_j = \min_{i \in \Gamma^+(j)} \{T_i - d_j\}, \end{cases} \quad (2.3)$$

$\Gamma^+(j)$: l'ensemble des successeurs du sommet j (les tâches ultérieures à j);

T_j : Date de début au plus tard de la tâche j ;

$T_f = t_f$: la durée minimale de réalisation du projet.

Exemple 2.3. Considérons le projet de l'exemple précédent.

1. Calcul des dates de début au plus tôt des tâches :

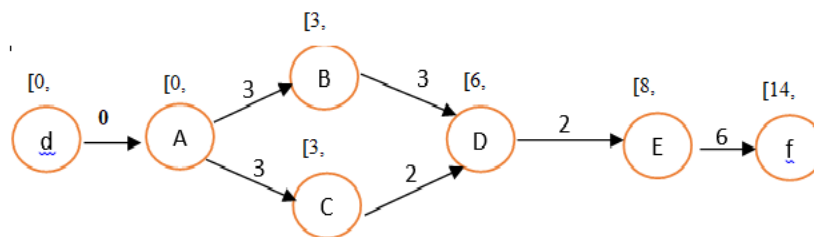


FIGURE 2.3 – Calcul des dates de début au plus tôt des tâches

A partir du planning au plus tôt (figure 2.3), on déduit que la durée minimale de réalisation du projet est de 14 jours.

2. Calcul des dates de début au plus tard des tâches :

2.2.2.3 Chemin critique

Avant de définir un chemin critique, on définit tout d'abord une tâche critique.

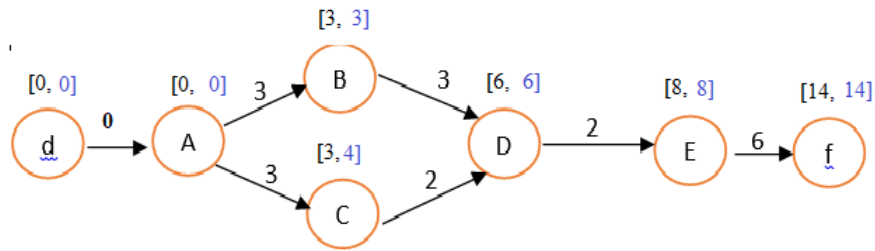


FIGURE 2.4 – Calcul des dates de début au plus tard des tâches

- **Tâche critique** : Une tâche i est dite critique si sa date de début au plus tôt coïncide avec sa date de début au plus tard ($t_i = T_i$).
- **Chemin critique** : Un chemin critique du réseau MPM, noté \mathcal{C} , est le plus long chemin joignant le sommet source d au sommet puits f du graphe G . Un chemin critique est constitué de tâches critiques et sa durée est celle du projet :

$$D_P = d_C = \sum_{i \in \mathcal{C}} d_i = t_f = T_f.$$

2.2.2.4 Calcul des marges :

- **Marge** : C'est le délais (retard) qui peut être accordé à une tâche pour son commencement sans qu'il y ait un retard dans la réalisation du projet.
- **Marge libre** : La marge libre d'une tâche i , notée ML_i , est le retard maximal sur cette tâche sans affecter les dates de début au plus tôt des tâches qui la succèdent directement. Elle est calculée comme suit :

$$ML_i = \min_{j \in \Gamma^+(i)} \{t_j - (d_i + t_i)\}. \quad (2.4)$$

- **Marge totale** : La marge totale d'une tâche i , notée MT_i , est le retard maximal sur cette tâche sans conséquence sur le délai d'achèvement du projet.

$$MT_i = T_i - t_i. \quad (2.5)$$

Exemple 2.4. Considérons de projet précédent.

- ✓ A partir du graphe de la figure 2.4, on déduit que le chemin critique est $\mathcal{C} = \{A - B - D - E\}$.
- ✓ Calcul des marges libres et totales des tâches :

Remarque 2.1.

tâches	A	B	C	D	E
MT_i	0	0	1	0	0
ML_i	0	0	1	0	0

1. Les tâches critiques ont une marge totale nulle et les tâches non critiques ont des marges totales strictement positives.
2. Pour toutes les tâches du projet, nous avons toujours :

$$MT_i \geq ML_i, \quad \forall i \in V.$$

3. Un projet peut avoir un (ou plusieurs) chemin(s) critique(s) de même durée de réalisation.
4. Si l'une des tâches critiques subit un retard, cela retardera la date d'achèvement du projet et par conséquent, le manager doit accorder une attention particulière aux tâches critiques.

2.3 Méthode PERT

La technique américaine PERT est l'acronyme de "Program Evaluation and Review Technique" et sa traduction française serait : "Technique d'évaluation et d'examen de programmes". Elle a été conçue en 1958 à la demande de la marine américaine pour son projet de conception et de lancement des missiles balistiques nucléaires Polaris.

Le diagramme PERT est avant tout un outil d'analyse et d'organisation utilisé pour élaborer d'autres types de plannings. Bien qu'il permette de structurer et de comprendre l'enchaînement des tâches, il est moins pratique pour visualiser l'évolution quotidienne des opérations, car il ne comporte ni échelle de temps ni calendrier d'exécution. La méthode PERT repose sur une analyse systématique et critique des différentes opérations d'un projet, ainsi que de leur enchaînement.

2.3.1 Construction du réseau PERT

Les tâches à réaliser sont représentées par un graphe valué mettant en évidence toutes les relations existant entre elles, tels que :

- Chaque tâche est associée à un arc du graphe.
- La valeur de l'arc correspond à la durée de la tâche en question.

- Les sommets représentent les étapes (ou les événements) du projet. Par exemple, la tâche A est représentée par l'arc (i, j) où i et j représentent respectivement les événements "début de A " et "fin de A ", comme l'illustre la figure suivante :

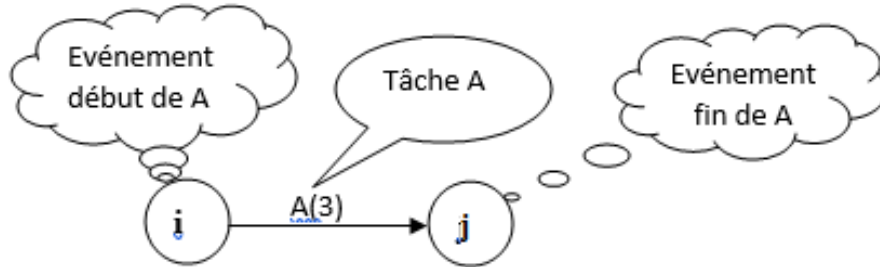


FIGURE 2.5 – Représentation d'une tâche dans un réseau PERT

- On rajoute au réseau PERT deux sommets d et f représentant respectivement les événements "début du projet" et "fin du projet". Ainsi, à la fin de construction du PERT, on obtient un graphe valué, simple et connexe ayant une source d et un puits f .

2.3.1.1 Tâches fictives

Pour la méthode PERT, on utilise des tâches fictives de durée zéro pour exprimer certaines relations potentielles (précédences et successions temporelles). Une tâche fictive est représentée par une flèche dessinée en pointillés (Voir la Figure 2.6).

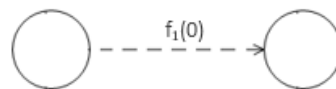
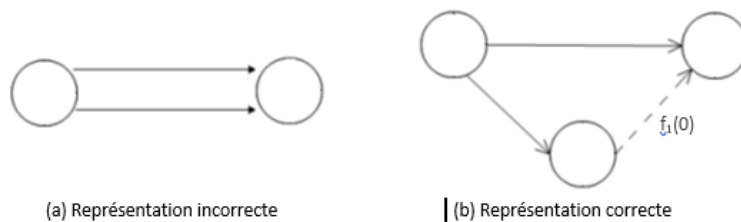


FIGURE 2.6 – Représentation d'une tâche fictive

Lorsqu'il y a deux (ou plusieurs) tâches débutant et finissant en même temps, une tâche fictive est insérée comme le montre la figure 2.7.



(a) Représentation incorrecte

(b) Représentation correcte

FIGURE 2.7 – Fonction d'une tâche fictive dans PERT

Exemple 2.5. A titre d'illustration, considérons le projet de l'exemple 2.1 dont les tâches sont données dans le tableau 2.1. Les étapes de construction du réseau PERT sont les suivantes :

- Le projet débute par l'exécution de la tâche *A*, comme l'indique la figure 2.8.

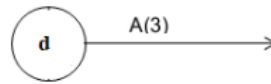


FIGURE 2.8 – Commencement du réseau PERT

- Les tâches *B* et *C* suivent la tâche *A* d'après la liste des tâches du Tab. 2.1.

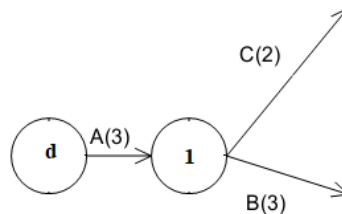


FIGURE 2.9 – Insertion des tâches *B* et *C*

- Le commencement de la tâche *D* nécessite à la fois la fin d'exécution des tâches *B* et *C*. Pour exprimer cette relation, on insère la tâche fictive $f_1(0)$ de durée nulle, et qui peut-être dérivé à partir de *B* ou *C* comme le montre la figure 2.10. Enfin, on rajoute la tâche *E* succédant la tâche *D* et sera la dernière tâche du projet. Le réseau PERT final est donné par la figure 2.10.

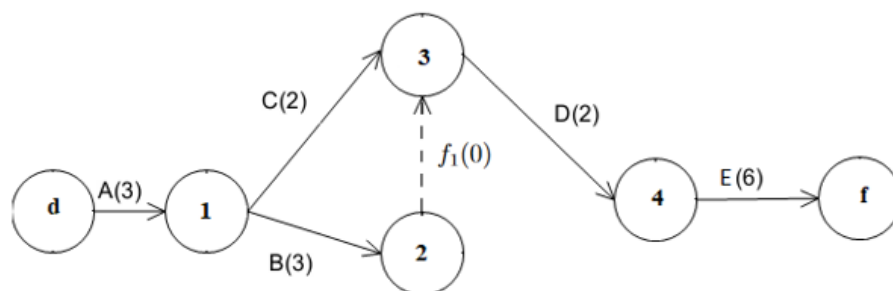


FIGURE 2.10 – Réseau associé à la méthode PERT

2.3.2 Calcul de dates

Après avoir tracé le réseau PERT, on peut calculer les dates de début au plus tôt et au plus tard des tâches. Pour la méthode PERT, on calcule les dates de début au plus tôt et plus tard des événements

comme on le fait avec la méthode MPM. Considérons un projet représenté par un réseau PERT, où chaque tâche (i, j) a une durée de réalisation d_{ij} .

Date de début au plus tôt : Ces dates de début au plus tôt des différents événements (étapes) sont calculées par la procédure itérative suivante :

$$\begin{cases} t_d = 0, & \text{Instant de début de projet,} \\ t_j = \max_{i \in \Gamma^-(j)} \{t_i + d_{ij}\}, \end{cases} \quad (2.6)$$

- d_{ij} : la durée d'exécution de la tâche (i, j) ;
- $\Gamma^-(j)$: l'ensemble des prédécesseurs du sommet j (événements antérieurs à j) ;
- t_i : La date de début au plus tôt de l'événement i et qui correspond aussi à la date de début au plus tôt de la tâche (i, j) .

Date de début au plus tard : Pour les sommets du graphe PERT, ces dates de début au plus tard sont calculées par la procédure itérative suivante, où on commence d'abord à partir du sommet puits f :

$$\begin{cases} T_f = t_f, & \text{date d'achèvement du projet,} \\ T_i = \min_{j \in \Gamma^+(i)} \{T_j - d_{ij}\}, \end{cases} \quad (2.7)$$

- d_{ij} : la durée d'exécution de la tâche (i, j) ;
- $\Gamma^+(i)$: l'ensemble des successeurs du sommet i (toutes les tâches antérieures à j) ;
- T_i : La date de début au plus tard de l'événement i .
- $T_f = t_f$: Date de fin du projet représentant la durée minimale de réalisation de projet.

Date de fin au plus tôt ($t_i + d_i$) : Est celle correspondant au commencement d'une tâche au plus tôt. Ce qui signifie que si une tâche a commencé au plus tôt, elle finira aussi au plus tôt.

Date de fin au plus tard ($d_i + T_i$) : Est celle correspondant au commencement d'une tâche au plus tard. Autrement dit, si une tâche a commencé au dernier moment, pour ne pas retarder la tâche suivante, elle finira aussi au plus tard.

2.3.3 Calcul des marges et du chemin critique

Considérons une tâche (i, j) de durée d_{ij} dans un réseau PERT $R = (V, U, d)$. Le calcul des dates de début au plus tôt et au plus tard permet de déterminer les différentes marges.

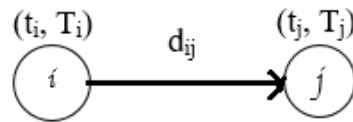


FIGURE 2.11 – Les dates de début au plus tôt et au plus tard de la tâche (i, j)

La marge totale (MT_{ij}) : La marge totale est la période de temps que l'on peut allouer à une tâche sans influencer sur la durée globale du projet. Lors de l'exécution du projet, si la marge totale de la tâche (i, j) est consommée, elle deviendra critique.

$$MT_{ij} = T_j - (t_i + d_{ij}).$$

La marge libre (ML_i) : Est la réserve de temps dont dispose une tâche (i, j) pour ne pas retarder les dates de début au plus tôt des tâches lui succédant immédiatement.

$$ML_{ij} = t_j - (t_i + d_{ij})$$

- La branche du graphe comportant uniquement des tâches sans aucune marge totale est dite chemin critique. Autrement dit, un chemin critique est le plus long chemin dans le réseau PERT joignant les sommets d et f .
- La durée totale du projet est égale à la somme des durées des tâches se trouvant sur le chemin critique.
- Tout retard intervenant dans la réalisation de l'une de ces tâches se répercutera sur la date de fin du projet.
- Une tâche située sur le chemin critique est dite critique, car elle ne dispose d'aucune marge de manœuvre.
- Les tâches critiques devront être particulièrement surveillées pour respecter le délai total d'achèvement du projet.
- Lorsque l'on cherche à réduire la durée totale d'un projet, il faut donc réduire la durée d'une ou de plusieurs tâches critiques.

Exemple 2.6. Considérons de nouveau le projet décrit par le tableau 2.1 dont son réseau PERT associé est déjà donné par la figure 2.10

1. Les dates de début au plus tôt des événements sont données en couleur rouge, comme illustré sur le graphe de la figure 2.12. La durée minimale de réalisation du projet est de 14 jours. Le chemin critique est $\mathcal{C} = \{A - B - D - E\}$.

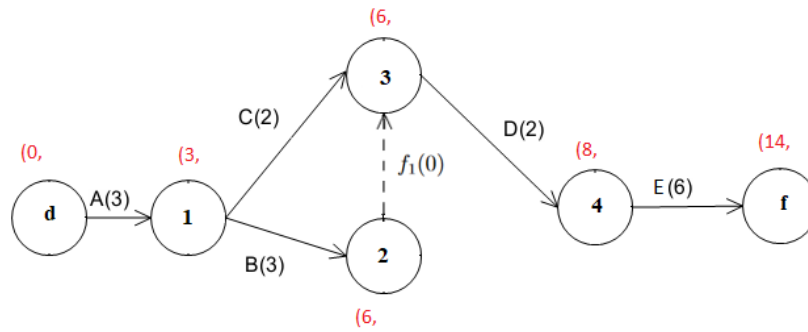


FIGURE 2.12 – Les dates de début au plus tôt des tâches du projet

2. Les dates de début au plus tard des différentes tâches sont en couleur bleu (voir la figure 2.13).

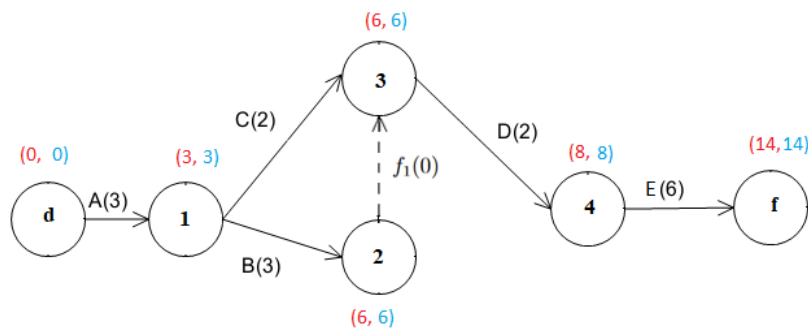


FIGURE 2.13 – Les dates de début au plus tard des tâches du projet

3. Les marges des tâches sont données dans le tableau suivant :

Tâches i	A	B	C	D	E
MT_i	0	0	1	0	0
ML_i	0	0	1	0	0

Remarque 2.2. Un réseau PERT peut avoir plusieurs chemins critiques.

2.4 Diagramme de Gantt

C'est un outil de planification en ordonnancement et en gestion de projet qui a été développé en 1917 par **Henry Gantt** pour répondre aux problèmes d'ordonnancement en ateliers spécialisés. Cet outil est actuellement très utilisé par les chefs de projets et aussi intégré dans les logiciels de planification de projets.

Définition 2.1. C'est une représentation graphique permettant de visualiser dans le temps les diverses tâches du projet, où sur l'axe des abscisses on représente le temps et l'axe des ordonnées est utilisé pour les tâches. Chaque tâche est représentée par une barre (segment de droite) horizontale dont la longueur est proportionnelle à la durée de la tâche.

Le diagramme de Gantt permet de :

- Déterminer les dates de réalisation d'un projet ;
- Identifier les marges existantes sur certaines tâches ;
- Représenter et de visualiser graphiquement l'avancement des travaux d'un projet ;
- Inclure aussi la gestion des ressources.

2.4.1 Construction du planning de Gantt

On utilise les données du projet, tableau de distribution des tâches, pour servir à dessiner le réseau PERT ou MPM, et puis construire le diagramme de Gantt. Dans le diagramme de Gantt, chaque tâche est représentée par un segment de droite dont la longueur est proportionnelle à sa durée. Principalement, on utilise les dates de début au plus tôt et au plus tard pour avoir les deux plannings (ordonnancements) suivants :

a) Ordonnement au plus tôt :

Dans ce cas, l'origine du segment de chaque tâche est la date de début au plus tôt et l'extrémité du segment représente la fin au plus tôt. Le planning GANTT au plus tôt consiste à programmer les dates de début de toutes les tâches à leurs dates de début au plus tôt.

b) Ordonnement au plus tard : Pour ce cas, l'origine du segment de chaque tâche représente la date de début au plus tard et l'extrémité du segment représente la date de fin au plus tard. Cet ordonnancement nous donne un planning Gantt au plus tard, où toutes les tâches du projet débutent à leurs dates de début au plus tard.

Exemple 2.7. Considérons le projet de l'exemple 2.1, où la durée des tâches est en jours.

1. Le diagramme de GANTT au plus tôt associé au projet :
2. Le diagramme de GANTT au plus tard associé au projet :

Remarque 2.3. :

- Le diagramme de Gantt est aussi utilisé pour le suivi de projet.

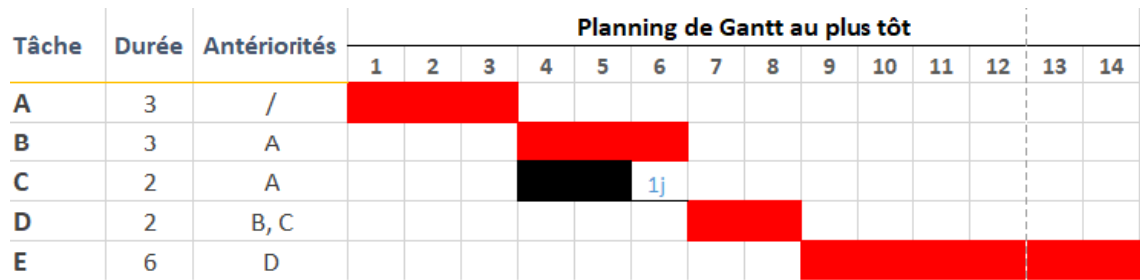


FIGURE 2.14 – Planning Gantt au plus tôt du projet

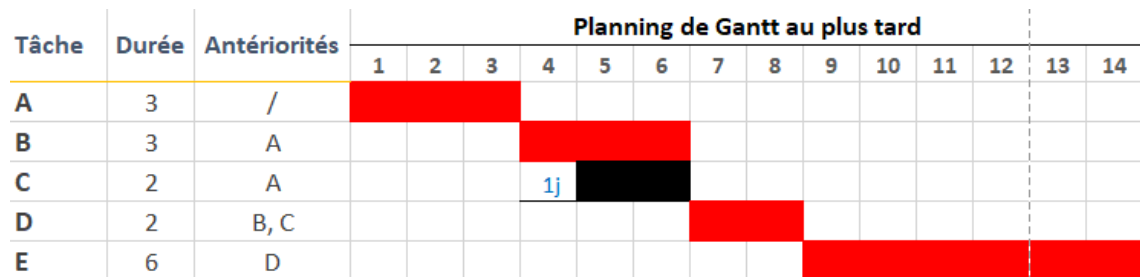


FIGURE 2.15 – Planning Gantt au plus tard du projet

- On l'utilise uniquement pour de petits projets.
- Pour un projet de grande envergure, les responsables créent des diagrammes de GANTT pour chacune de ses phases.

Pert probabiliste et Pert coût

3.1 PERT Probabiliste

La méthode PERT probabiliste est une extension de la méthode PERT classique, qui prend en compte l'incertitude et la variabilité des durées des tâches dans la planification de projets. Contrairement à la version déterministe, où chaque tâche a une durée fixe, le PERT probabiliste utilise des estimations de durée basées sur des probabilités, ce qui permet d'évaluer plus précisément le temps total du projet et les risques associés.

En pratique, il est souvent difficile de déterminer avec exactitude la durée d'exécution des tâches. Ainsi, les responsables de projet préfèrent généralement fournir trois estimations pour la durée de chaque activité i , $i = 1, 2, \dots, n$, où n est le nombre de tâches du projet.

La durée optimiste a_i : le temps minimum pour accomplir une tâche dans des conditions de travail idéales (sans obstacles).

La durée pessimiste b_i : le temps maximum nécessaire pour accomplir une tâche dans les pires conditions de travail (mauvaises conditions météorologiques, manque de motivation des ouvriers, grèves, pénurie de matières premières, etc.).

La durée la plus probable p_i : le temps moyen estimé pour accomplir une tâche (travail dans les conditions normales).

Dans ce cas, la durée de chaque tâche i , notée d_i , est une variable aléatoire et la loi Beta est la plus adéquate pour modéliser ce genre de situation. Alors, chaque durée d_i suit une loi Beta de paramètres a_i , p_i et b_i . On écrit $d_i \rightsquigarrow \beta(a_i, p_i, b_i)$ dont sa distribution de probabilité est représentée sur la figure

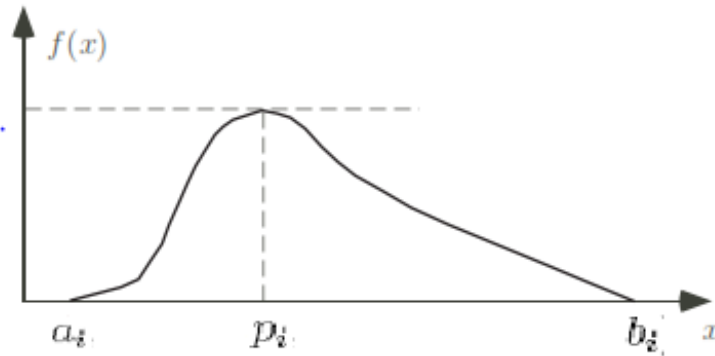


FIGURE 3.1 – Distribution de probabilité de la loi Bêta

suivante :

La durée moyenne attendue de réalisation de la tâche i , ainsi que son écart-type sont respectivement calculés par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \bar{d}_i = \frac{a_i + 4p_i + b_i}{6}, \\ \sigma_i = \frac{b_i - a_i}{6}. \end{cases} \quad (3.1)$$

La durée du projet $D_P = \sum_{i \in \mathcal{C}} d_i$ est aussi aléatoire, où \mathcal{C} est un chemin critique. Si on suppose que toutes les durées des tâches d_i , $i = 1, 2, \dots, n$ sont indépendantes et identiquement distribuées, alors en utilisant le théorème central limite (TCL) la v.a D_P suit la loi normale de moyenne $\mu_{\mathcal{C}}$ et de variance $\sigma_{\mathcal{C}}$, tels que :

$$\begin{cases} \mu_{\mathcal{C}} = \mathbb{E}(D_P) = \mathbb{E}\left(\sum_{i \in \mathcal{C}} d_i\right) = \sum_{i \in \mathcal{C}} \mathbb{E}(d_i) = \sum_{i \in \mathcal{C}} \bar{d}_i, \\ \sigma_{\mathcal{C}}^2 = \text{Var}(D_P) = \text{Var}\left(\sum_{i \in \mathcal{C}} d_i\right) = \sum_{i \in \mathcal{C}} \text{Var}(d_i) = \sum_{i \in \mathcal{C}} \sigma_i^2. \end{cases} \quad (3.2)$$

3.1.1 Étapes de la méthode

Le calcul des paramètres du PERT probabiliste se fait en trois étapes :

Étape 1 :

- Déterminer la loi de probabilité attachée à chaque tâche. Dans notre cours on utilise la loi Bêta ;
- Pour chaque tâche i , calculez sa durée moyenne \bar{d}_i et son écart-type σ_i par les relations (3.1).

Étape 2 :

- Élaborer un ordonnancement de projet en appliquant la méthode **PERT**, en prenant les durées moyennes des tâches \bar{d}_i , $i = 1, \dots, n$, comme leurs durées de réalisation ;
- Déterminer le(s) chemin(s) critique(s) du projet.
- Calculer pour chaque chemin critique \mathcal{C} sa durée de réalisation moyenne $\mu_{\mathcal{C}}$ et sa variance $\sigma_{\mathcal{C}}^2$.

Étape 3 : Faire des calculs de probabilité.

- Déterminer la probabilité pour qu'un projet se réalise en un temps donné t .

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D_P \leq t) &= \mathbb{P}\left(\frac{D_P - \mu_{\mathcal{C}}}{\sigma_{\mathcal{C}}} \leq \frac{t - \mu_{\mathcal{C}}}{\sigma_{\mathcal{C}}}\right), \\ &= \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{t - \mu_{\mathcal{C}}}{\sigma_{\mathcal{C}}}\right), \\ &= \phi(x),\end{aligned}$$

où $x = \frac{t - \mu_{\mathcal{C}}}{\sigma_{\mathcal{C}}}$ est un nombre réel et $Z = \frac{D_P - \mu_{\mathcal{C}}}{\sigma_{\mathcal{C}}}$ est une variable aléatoire suivant la **loi normale centrée et réduite** $N(0, 1)$ dont ϕ est sa fonction de répartition.

La valeur $\phi(x)$ est lue à partir de la table de la loi de normale centrée et réduite (Gauss).

- Déterminer la durée de temps x afin d'achever le projet avec une certaine probabilité α :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D_P \leq x) = \alpha &\implies \mathbb{P}\left(\frac{D_P - \mu_{\mathcal{C}}}{\sigma_{\mathcal{C}}} \leq \frac{x - \mu_{\mathcal{C}}}{\sigma_{\mathcal{C}}}\right) = \alpha, \\ &\implies \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{x - \mu_{\mathcal{C}}}{\sigma_{\mathcal{C}}}\right) = \alpha, \\ &\implies \phi\left(\frac{x - \mu_{\mathcal{C}}}{\sigma_{\mathcal{C}}}\right) = \alpha, \\ &\implies \frac{x - \mu_{\mathcal{C}}}{\sigma_{\mathcal{C}}} = \phi^{-1}(\alpha),\end{aligned}$$

d'où

$$x = \mu_{\mathcal{C}} + z_{\alpha}\sigma_{\mathcal{C}}. \quad (3.3)$$

Le nombre $z_{\alpha} = \phi^{-1}(\alpha)$ représente le quartile associé à la probabilité α de la loi normale centrée et réduite. Les quartiles associés de certaines probabilités sont résumés dans le tableau ci-après :

α	90%	95%	97.5%	99%
z_{α}	1.28	1.65	1.96	2.33

Remarque 3.1. Pour la vérifications des Conditions de Théorème Central Limites (TCL), le nombre de tâches critiques doit être grand. Les praticiens descendent jusqu'à 15 tâches critiques.

3.1.2 Exemple d'application

Considérons le projet illustré sur le tableau suivant, où les trois durées de réalisation des tâches sont en jours :

Tâche i	Antériorités	a_i	p_i	a_i	\bar{d}_i	σ_i
A	-	1	2	9	3	4/3
B	-	1/2	1	15/2	2	7/6
C	-	3	6	15	7	2
D	B	1	3	11	4	5/3
E	C	1/2	1	15/2	2	7/6
F	C	2	3	10	4	4/3
G	A	10	15	50	20	20/3
H	F	3	5	25	8	11/5
I	D-E	6	10	32	13	13/3

Calculons, tout d'abord, les durées moyennes \bar{d}_i et leurs écart-types en utilisant les relations (3.1) et le résultat est donné dans le tableau précédent.

L'ordonnancement du projet en considérant les durées moyennes des tâches est donné dans le graphe :

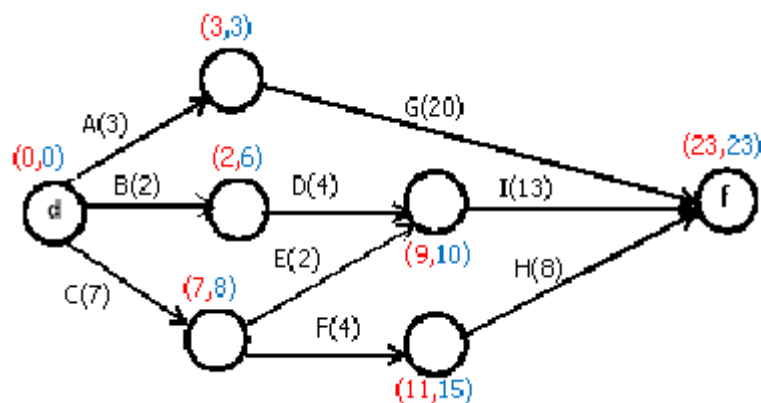


FIGURE 3.2 – Réseau Pert associé au projet

La durée moyenne de réalisation du projet est 23 jours et le chemin critique est $\mathcal{C} = \{A, G\}$. La durée de réalisation du projet $D_P = \sum_{i \in \mathcal{C}} d_i = d_A + d_G \rightsquigarrow N(\mu_{\mathcal{C}}, \sigma_{\mathcal{C}})$, où sa durée moyenne et son écart-type sont respectivement

$$\begin{cases} \mu_C = \sum_{i \in \mathcal{C}} \bar{d}_i = \bar{d}_A + \bar{d}_G = 23 \text{ jours} \\ \sigma_C = \sqrt{\sum_{i \in \mathcal{C}} \sigma_i^2} = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_G^2} = \sqrt{\frac{416}{9}} = 6,79 \text{ jours} \end{cases}$$

Calculons maintenant les probabilités suivantes :

1. La probabilité que le projet s'achève en 20 jours est :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D_P \leq 20) &= \mathbb{P}\left(\frac{D_P - \mu_C}{\sigma_C} \leq \frac{20 - \mu_C}{\sigma_C}\right), \\ &= \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{20 - 23}{6.79}\right), \\ &= \phi(-0.44) = 1 - \phi(0.44), \\ &= 1 - 0.67 = 33\%. \end{aligned}$$

2. La probabilité que le projet s'achève en moins de 32 jours :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D_P \leq 32) &= \mathbb{P}\left(\frac{D_P - \mu_C}{\sigma_C} \leq \frac{32 - \mu_C}{\sigma_C}\right), \\ &= \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{32 - 23}{6.79}\right), \\ &\simeq \phi(1.33) = 0.9082. \end{aligned}$$

3. Calcul du nombre de jours x pour achever le projet à 95% :

En utilisant la formule (3.3), on aura :

$$x = \mu_C + z_\alpha \sigma_C = 23 + 1.65 \times 6.79 = 34.20 \simeq 35 \text{ jours.}$$

3.2 Le suivi des coûts

Lors de la collecte des informations sur l'état d'avancement des travaux, si une tâche a pris du retard sur ce qui était prévue, le chef du projet cherche à réduire la durée de certaines tâches pour rester dans les délais, pour cela, il doit engager des coûts supplémentaires (main d'œuvre additionnelle, prix supplémentaire pour livraison rapide, ...).

En se basant sur la méthode PERT, on suppose qu'une tâche (i, j) est caractérisée par sa durée normale d_{ij} et sa durée réduite (comprimée), notée d_{ij}^c . Les coûts de réalisation respectifs de (i, j) sont C_{ij} et C_{ij}^c . On suppose que le coût décroît linéairement en fonction de la durée de la tâche comme le montre la figure 3.3.

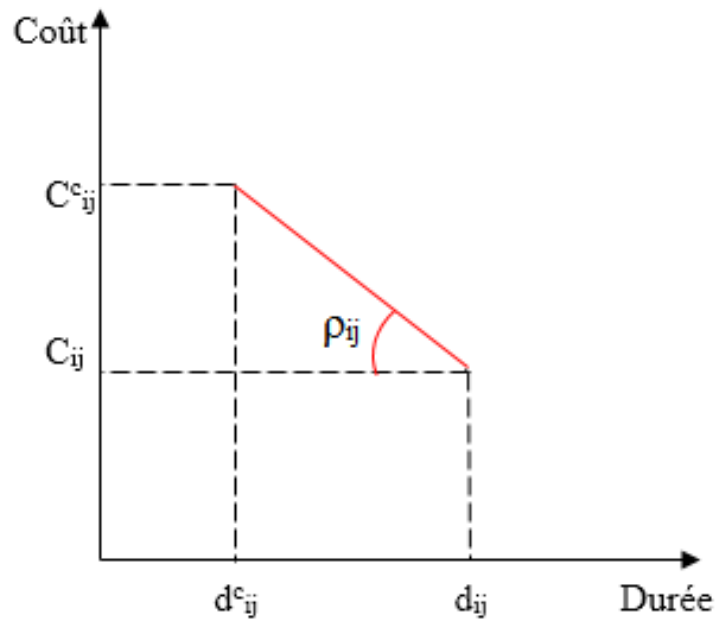


FIGURE 3.3 – Relation entre le coût et la durée d'une tâche

Le coût marginal (supplémentaire) pour la réduction de la durée de l'activité (i, j) d'une unité de temps est :

$$\rho_{ij} = \frac{C_{ij}^c - C_{ij}}{d_{ij} - d_{ij}^c}. \quad (3.4)$$

Le problème posé ici est de trouver les tâches à réduire et de combien leurs durées de réalisation seront comprimées, de manière à minimiser le coût supplémentaire engendré.

3.2.1 Principe de réduction

Pour cela, on calcule l'ordonnancement avec PERT, en utilisant les durées normales des tâches. On ordonne par la suite, les activités sur le chemin critique, \mathcal{C} , selon l'ordre croissant de leurs coûts supplémentaires et on choisit la première tâche, (k, n) , de cette liste puis on la réduit d'une durée égale à :

$$\min\{(d_{kn} - d_{kn}^c), MT_{ij}\}, (i, j) \notin \mathcal{C}.$$

Jusqu'à ce qu'on aura l'une des trois possibilités suivantes :

1. La contrainte sur la durée voulue est satisfaite. Alors, on arrête la procédure et le surcoût est de $(d_{kn} - d_{kn}^c) \times \rho_{kn}$ unités monétaires ;

2. L'activité est réduite au maximum, i.e soit de $(d_{kn} - d_{kn}^c)$ unité de temps, on choisit une autre activité de la liste en respectant l'ordre établi puis on répète la procédure.
3. Un ou plusieurs chemins deviennent critiques. Dans ce cas, on réduit soient :
 - Les activités communes aux différents chemins;
 - Une activité sur chaque chemin critique d'une même durée.
 On examine chaque possibilité et on choisit celle qui engendre le surcoût le moins élevé.

3.3 Exemple d'application 1

Considérons un projet composé de 8 tâches. Les durées normales et réduites des tâches, exprimées en jours, ainsi que leurs coûts associés en euros (€) par jour, sont résumés dans le tableau suivant :

Tâches	Antériorités	d_{ij}	d_{ij}^c	C_{ij} (€)	C_{ij}^c (€)	ρ_{ij}
A	D	10	6	200	300	25
B	D	6	5	100	200	100
C	A	15	-	-	-	-
D	-	4	3	200	250	50
E	B	8	-	-	-	-
F	D	10	-	-	-	-
G	E	7	5	200	300	50
H	C, F, G	5	4	200	250	50

- Calculons, tout d'abord, pour chaque tâche (i, j) la réduction maximale Δ_{ij} , ainsi que le coût marginal correspondant par la relation (3.4). Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau suivant :

Tâche (i, j)	A	B	C	D	E	F	G	H
Δ_{ij}	4	1	-	1	-	-	2	1
ρ_{ij}	25	100	-	50	-	-	50	50

Itération 1 : D'après le réseau PERT de la figure 3.4, le chemin critique est $\mathcal{C} = \{D-A-C-H\}$, donc on peut réduire soit A, D ou H . On choisit alors de comprimer la durée de la tâche A (représentée par l'arc $(1, 3)$, car $\rho_A = 25 < \rho_D = \rho_H = 50$, d'une quantité égale à :

$$\min\{(d_{13} - d_{13}^c), MT_{12}, MT_{24}, MT_{45}, MT_{15}\} = \min\{15, 4, 4, 4, 4\} = 4 \text{ jours.}$$

A est réduite au maximum, avec un surcoût de : $4 \times 25 = 100$ €.

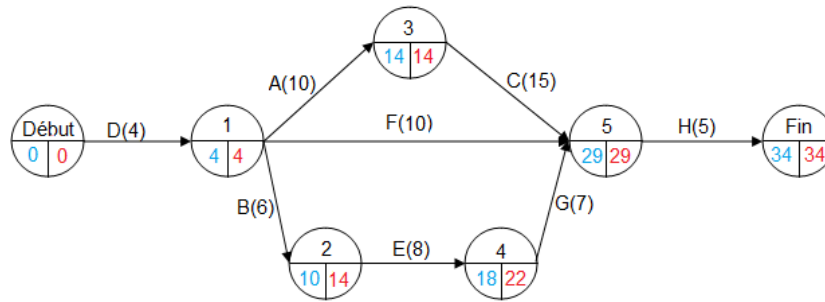


FIGURE 3.4 – Réseau PERT pour une durée de 34 jours

Itération 2 : On recalcule l’ordonnancement avec PERT, on obtient la figure 3.5.

On crée un second chemin critique $\mathcal{C}_2 = \{D - B - E - G - H\}$. Donc on peut réduire soit :

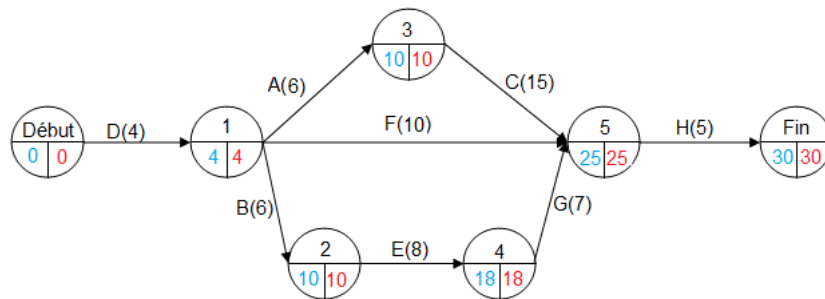


FIGURE 3.5 – Réseau PERT pour une durée de 30 jours

– $D \in \mathcal{C}, \mathcal{C}_2$ avec un surcoût de 50 €

– $H \in \mathcal{C}, \mathcal{C}_2$ avec un surcoût de 50 €

On réduit alors la tâche D de $\min\{1, MT_{15}\} = \min\{1, 11\} = 1$ journée. D est réduite au maximum, avec un surcoût de : $1 \times 50 = 50$ €.

Itération 3 On recalcule l’ordonnancement avec PERT, on obtient la figure 3.6. On réduit alors

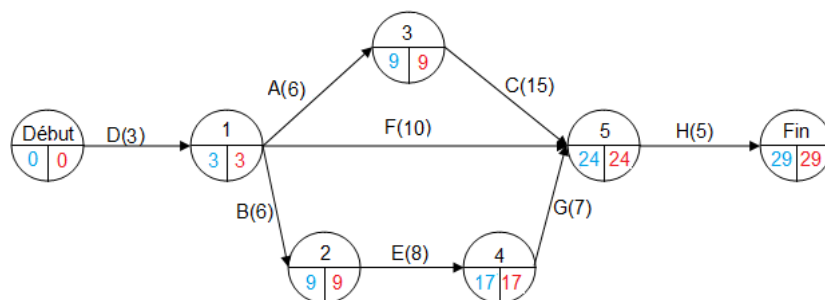


FIGURE 3.6 – Réseau PERT pour une durée de 29 jours

la tâche H de $\min\{1, MT_{15}\} = \min\{1, 11\} = 1$ journée. Elle est réduite au maximum et le surcoût associé est : $1 \times 50 = 50$ €.

Itération 4 : On recalcule l'ordonnement avec PERT, on obtient la figure 3.7.

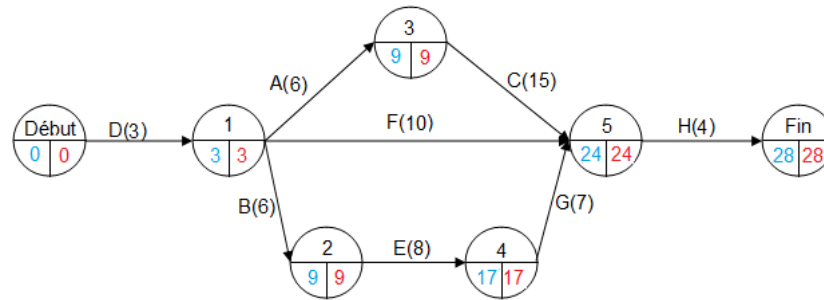


FIGURE 3.7 – Réseau PERT pour une durée de 28 jours

On arrête l'algorithme, car il n'existe pas de tâche critique à comprimer sur le chemin C . En conclusion, on peut ramener la durée du projet de 34 à 28 jours et le surcoût total associé est : $100 + 50 + 50 = 200$ €.

3.4 Exemple d'application 2 :

Considérons le projet suivant, où la durée de chaque activité est donnée en jours et le coût en € :

Activité (i, j)	Durée normale	Coût normale	Durée comprimée	Coût comprimée	Réduction max $\Delta d_{i,j}$	ρ_{ij}
(1,2)	8	100	6	200	2	50
(1,3)	4	150	2	350	2	100
(2,4)	2	50	1	90	1	40
(2,5)	10	100	5	400	5	60
(3,4)	5	100	1	200	4	25
(4,5)	3	80	1	100	2	10

Itération 1 : Le réseau PERT associé au projet en considérant les durées normales d'exécution des tâches est donné par la figure 3.8. Le chemin critique est $C_1 = \{(1, 2), (2, 5)\}$ et la durée minimale de réalisation du projet est de 18 jours.

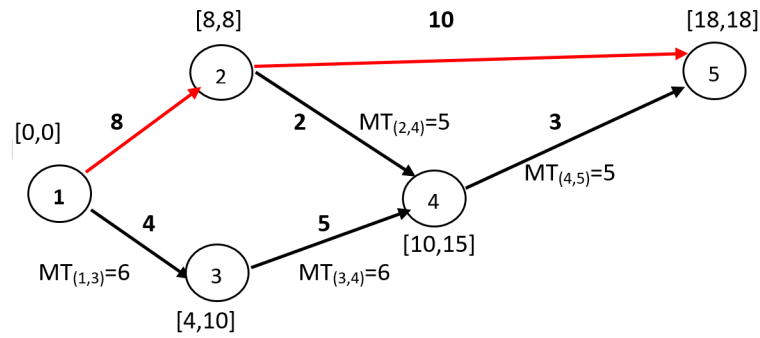


FIGURE 3.8 – Réseau PERT de l'itération 1

La tâche candidate à la compression est (1, 2), car $\rho_{1,2} = 50 < \rho_{2,5} = 60$. Alors, on la comprime d'une quantité maximale égale à :

$$\min\{\Delta_{1,2}, \min_{(i,j) \notin C_1} MT_{i,j}\} = \min\{2, 5\} = 2 \text{ jours.}$$

Le coût supplémentaire engendré = $2 \times \rho_{1,2} = 2 \times 50 = 100 \text{ €}$.

Itération 2 : L'activité (1, 2) est comprimée au maximum et le chemin critique ne change pas (voire la figure suivante). On comprime l'activité (2, 5) d'une durée égale à $\min\{5, 4\} = 4$

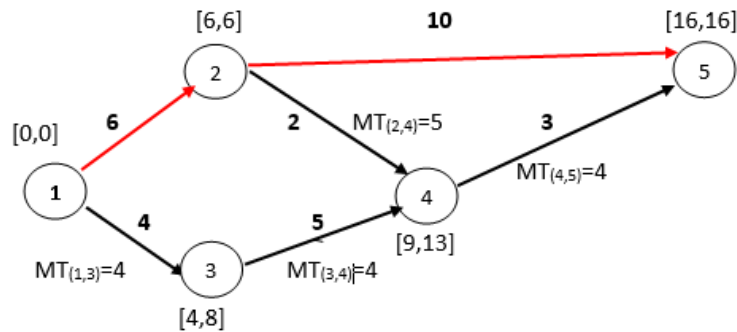


FIGURE 3.9 – Réseau PERT de l'itération 2

jours.

Le coût supplémentaire = $60 \times 4 = 240 \text{ €}$.

Itération 3 : On crée un deuxième chemin critique $C_2 = \{(1, 3) - (3, 4) - (1, 5)\}$. Comme il n'y pas de tâches communes entre C_1 et C_2 , alors on réduit de la même quantité l'activité (4, 5) $\in C_1$ et la tâche (4, 5) $\in C_2$ en respectant l'ordre établi. Ces tâches sont réduites d'une durée égale à $\min\{\Delta_{2,5}, \Delta_{4,5}, \min_{(i,j) \notin C_1 \cup C_2} MT_{i,j}\} = \{1, 2, 1\} = 1 \text{ jour}$.

Le coût supplémentaire est égal à : $60 + 10 = 70 \text{ €}$.

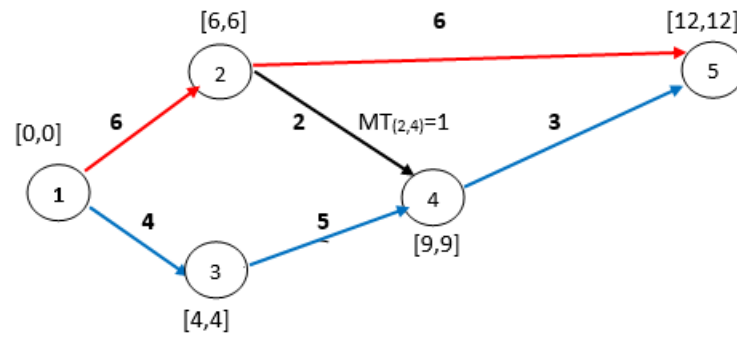


FIGURE 3.10 – Réseau PERT de l'itération 3

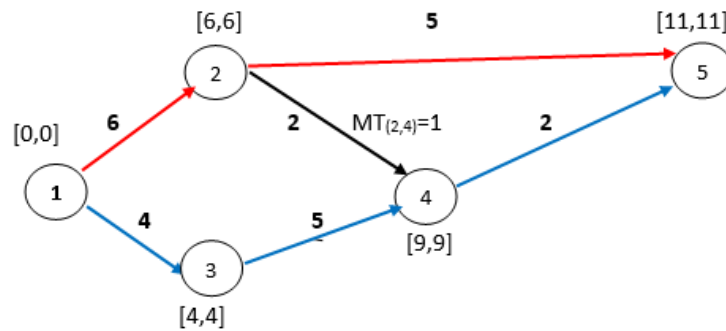


FIGURE 3.11 – Réseau PERT de l'itération 4

Itération 4 : Puisque il n'y plus d'activité à réduire sur C_1 , alors on arrête la procedure.

Le coût total supplémentaire de réduction de la durée du projet de 7 jours est : $100 + 240 + 70 = 410\text{€}$.

Gestion des ressources

Pour effectuer les tâches du projet, des ressources sont nécessaires. Or les ressources d'une entreprise ne sont jamais illimitées, de plus les ressources utilisées pour un projet sont souvent transversales et appartiennent souvent à des services différents et sont affectées momentanément au projet. On peut aussi vouloir répartir de façon relativement homogène les ressources dans le temps afin d'éviter d'effectuer des heures supplémentaires et ensuite se trouver en sous-charge d'activité.

4.1 Types de ressources

Les ressources étant les moyens techniques et humains qui participent à la réalisation des tâches dans un projet. Généralement, on distingue deux types de ressources :

a- Ressources renouvelables :

Elles sont des ressources réutilisables dès qu'elles se libèrent, autrement dit la tâche qui leur est allouée se termine. Leurs quantités étant limitées mais la quantité maximale disponible reste invariante sur une période de temps. Il y a deux types :

Ressource disjonctive : elle est utilisée par une seule tâche à la fois (par exemple : une équipe spécialisée, une grue, ...).;

Ressource cumulative : elle est utilisée par plusieurs tâches simultanément (par exemple : le personnel, les ouvriers, les matériels. ..).

b- Ressources consommables :

Elles sont des ressources utilisables et non renouvelables. La quantité des ressources est toujours limitée et décroissante au fur et à mesure de son utilisation par les tâches (par exemple : matières premières, composants, pièces, Argent, ...).

L'intérêt de disposer d'un outil de gestion des ressources est d'optimiser l'usage de ces derniers. En définissant des catégories d'utilisation et en fixant les priorités appropriées, vous pouvez profiter au mieux de la capacité de réserve pendant les périodes creuses et éviter d'investir dans une puissance de traitement supplémentaire. C'est enfin la garantie pour vous qu'aucune ressource précieuse n'est gaspillée inutilement du fait de la variabilité des charges de travail.

4.2 Méthodes de gestion des ressources

Une des grandes difficultés rencontrées lors de la gestion des ressources est la sur-utilisation de celles-ci. Pour y remédier, il existe trois techniques :

4.2.1 Nivellement des ressources

L'objectif du nivellement est de supprimer tous les dépassements de disponibilité des ressources. C'est ce qu'on appelle aussi le "**lissage à moyens bloqués**". Il faut donc placer les activités de manière à ce qu'elles ne produisent pas un besoin supérieur à la disponibilité de chacune des ressources considérées. Cette augmentation de la durée du projet doit être minimale [6].

4.2.2 Lissage des ressources

L'objectif du lissage est de répartir la charge de travail de chaque ressource dans le temps sans jamais rallonger la durée du projet. On l'appelle aussi "**lissage à délais bloqués**". Les activités vont être déplacées dans leurs marges totales, c'est à dire en respectant leurs dates de début au plus tôt et de fin au plus tard, dont l'objectif est de réduire ces écarts par rapport à la disponibilité définie. Dans le cas où aucune disponibilité n'est imposée, le même traitement pourra être effectué par rapport à une charge moyenne [6].

4.2.3 Méthodes sérielles

Pour l'ordonnancement avec ressources, les heuristiques habituelles utilisées sont appelées méthodes sérielles ou liste de priorité. A la date t , une tâche est candidate au placement si elle n'a pas

encore été placée et si tous ses prédécesseurs sont achevés. Le principe des méthodes sérielles est le suivant [11] :

On se place en début de projet ($t = 0$)

Répéter

- déterminer les tâches candidates,
- établir une liste de priorité entre les tâches candidates,
- considérer les tâches candidates l'une après l'autre en respectant la liste de priorité,
- les affecter si les ressources nécessaires sont suffisantes,
- aller au prochain point où une tâche s'achève et libère des ressources.

jusqu'à ce que toutes les tâches ont été ordonnancées.

Fin.

La question essentielle est de choisir un ordre de priorité. Les listes de priorité généralement utilisées sont obtenues à partir des résultats de l'ordonnancement sans ressources. On peut prendre les tâches :

- par dates au plus tôt (début ou fin) croissantes ;
- par dates au plus tard (début ou fin) croissantes ;
- par marges totales croissantes ;
- lorsqu'une notion de coût de retard existe, par coûts décroissants.

Avantages et inconvénients des méthodes sérielles :

Les méthodes sérielles sont simples à mettre en œuvre et leurs temps de calcul sont très courts. Fondamentalement, ce sont des méthodes d'optimisation locale : on affecte les ressources chaque fois qu'elles se libèrent. Ce dernier point a pour effet que l'utilisation des ressources est le plus souvent correct, mais que des aberrations peuvent apparaître.

4.3 Exemple

Considérons le projet de construction (simplifié), composé des tâches codées de A à H , et dont le besoin en personnel de chaque tâche est représenté dans le tableau suivant :

Tâche	A	B	C	D	E	F	G	H
Durée(jours)	10	6	15	4	8	10	7	5
Antériorités	D	D	A	-	B	D	E	E, F, G
Personnel	3	2	5	3	4	3	4	3

Le réseau PERT associé au projet, ainsi que le calcul des dates de début au plus tôt et au plus tard sont schématisés dans la figure suivante :

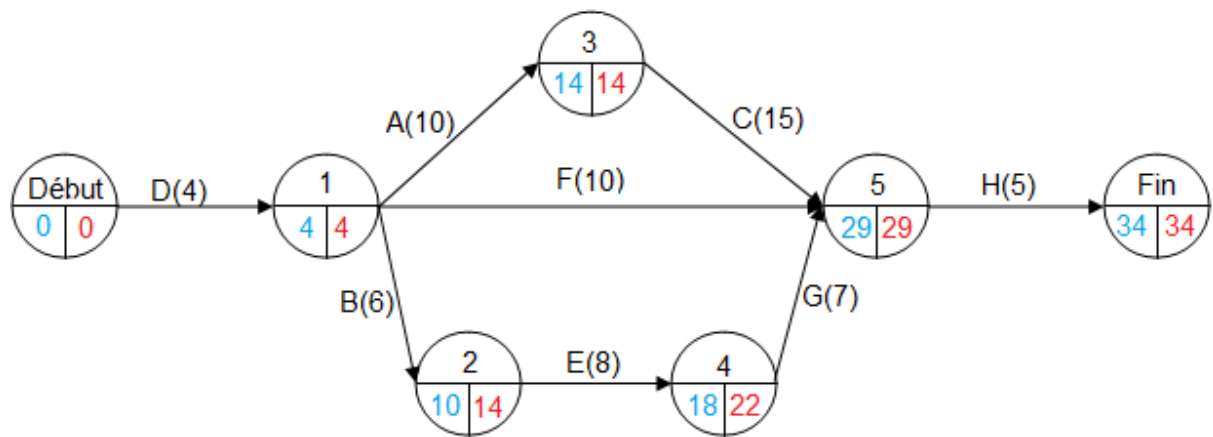


FIGURE 4.1 – Réseau Pert du projet.

L'entreprise n'ayant pas suffisamment de personnel, dispose juste de 9 ouvriers. Après la représentation du diagramme de Gantt avec le besoin en personnel de chaque tâche on s'aperçoit qu'il y a un dépassement de l'effectif disposé, comme le montre la figure 4.2.

On applique la méthode sérielle, où on choisit la liste de priorité de chaque étape selon l'ordre alphabétique.

Au début de projet, la tâche candidate est D qui nécessite 3 personnes, donc elle est retenue.

On va à la date $t = 4$, où D se termine et libère du personnel, les tâches candidates sont par ordre de priorité A , B et F . On va essayer de les placer en les prenant dans cet ordre :

- on place A qui prend 3 personnes ;
- on place B qui prend 2 personnes ;
- on place F qui prend 3 personnes ;

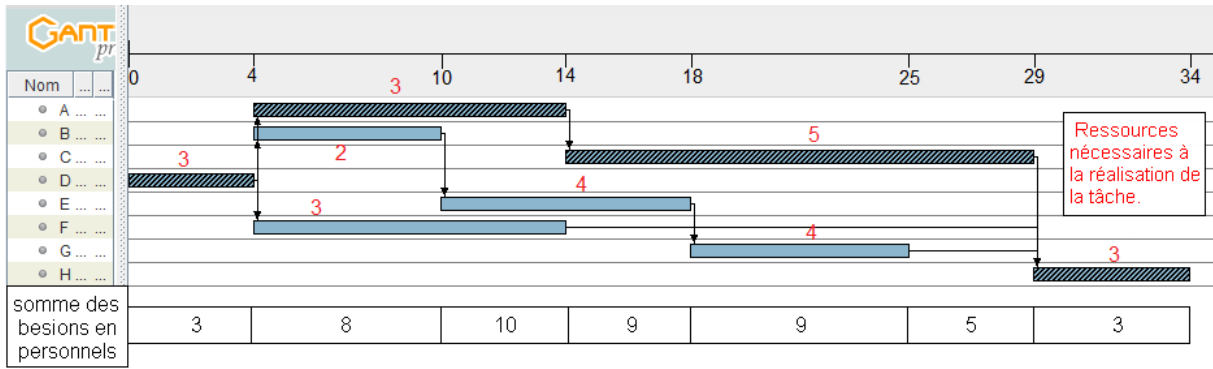


FIGURE 4.2 – Diagramme de Gantt au plus tôt avec ressources

Le tableau suivant résume l'ensemble des étapes :

t	Candidate	Retenu
0	D	D
4	A, B et F	A, B et F
10	E	
14	C, E	C, E
22	G	G
29	H	H

On obtient alors le diagramme de Gantt de la figure 4.3.

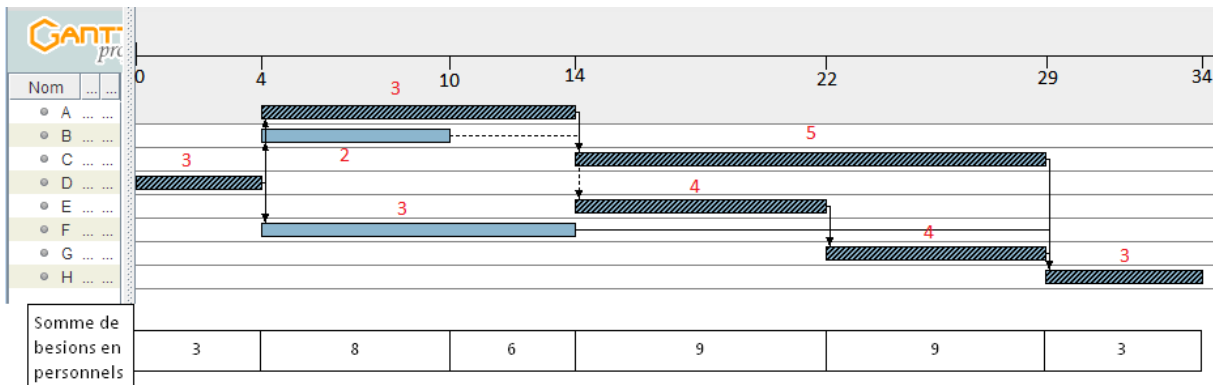


FIGURE 4.3 – Diagramme de Gantt de la solution sérielle

Étude de cas

5.1 Présentation de Ganttproject :

GanttProject est un logiciel libre de gestion de projet écrit en Java, ce qui permet de l'utiliser sur de nombreux systèmes d'exploitation, tels que : Windows, Linux et MacOS. Ce projet a été lancé par un étudiant de l'Université de Marne La Vallée en janvier 2003 et est maintenant proposé sous licence libre. Le chef de projet initial est Alexandre Thomas, relayé aujourd'hui par Dmitry Barashev.

GanttProject permet la planification de projets à l'aide du diagramme de Gantt. Il propose les fonctionnalités de base de ce type d'outil, comme la création des tâches, l'affectation des ressources, la gestion des dépendances et de l'avancement, mais dispose également de propriétés plus avancées comme l'exportation des documents en HTML/PDF et le travail collaboratif à distance sur internet, . . .etc.

Facile à prendre en main, il bénéficie d'une qualité graphique remarquable. On peut aisément créer des tâches, les découper, définir les ressources, les allouer aux tâches, construire et modifier le diagramme de Gantt à la souris. On peut aussi gérer, manuellement, le pourcentage de réalisation de chaque tâche. GanttProject dispose de plusieurs évolutions majeures :

- compatibilité avec MS Project ;
- gestion des jours fériés et des vacances pour les ressources ;
- visualisation du chemin critique ;
- sauvegarde d'états du projet et comparaison.

5.2 Description du problème :

La direction d'un campus universitaire souhaiterait investir dans une nouvelle piscine olympique. Elle dispose de peu de temps, la piscine doit être prête 05 jours avant l'arrivée des jeux d'été qui débutent le *01 Juin* de chaque année. Une entreprise a pris le projet, et démarre les travaux le *10 Avril*. Le chef de projet s'interroge sur le respect des délais et la livraison de la piscine le *27 Mai*.

Après l'étude du projet, l'entreprise définit l'ensemble des tâches à faire, leurs antériorités ainsi que leurs durées. Le tableau suivant illustre l'étude établie :

Codes	Tâches	Durée (jours)	Tâches antérieures
A	Excavation	5	/
B	Fondation	2	A
C	Pose de canalisation	4	B
D	Essais en pression	8	C, G
E	Etanchéité	9	D
F	Mise en place de la station d'épuration	6	A
G	Mise en place du chauffage	5	F
H	Raccordement électrique	4	C, G
I	Sonorisation sous-marine	5	H
J	Dallage	6	E, I
K	Construction des vestiaires	8	J
L	Aménagement des espaces verts	6	J
M	Mise en eau	3	K
N	Essais et tests	2	M

5.3 Ordonnancement du projet

En ordonnant les tâches selon la **méthode MPM**, les dates de début au plus tôt et au plus tard des tâches sont indiquées sur la figure ci-dessous :

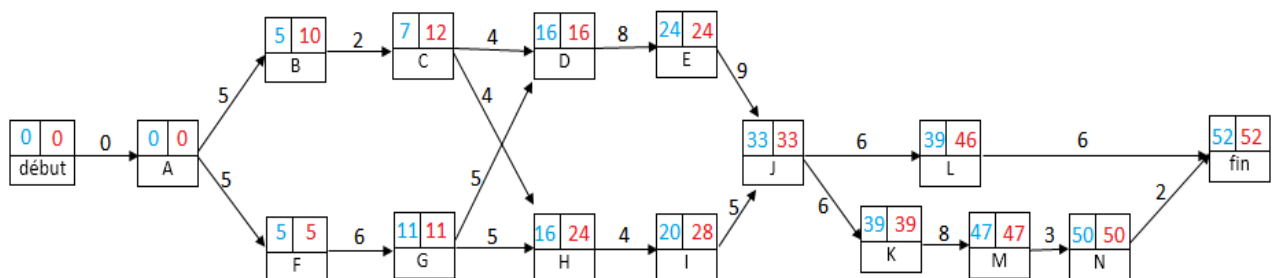


FIGURE 5.1 – Réseau MPM du projet

L'application de la **méthode PERT** donne le réseau d'activités suivant :

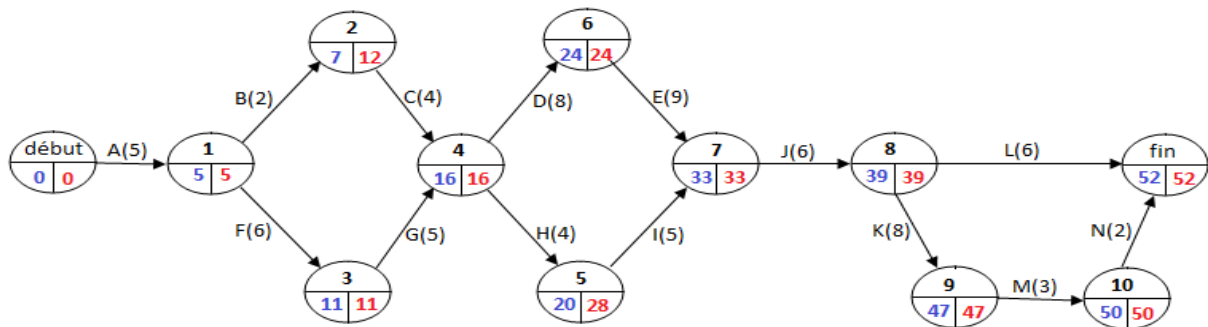


FIGURE 5.2 – Réseau PERT associé au projet

Le **diagramme de Gantt** est illustré par la figure 5.3

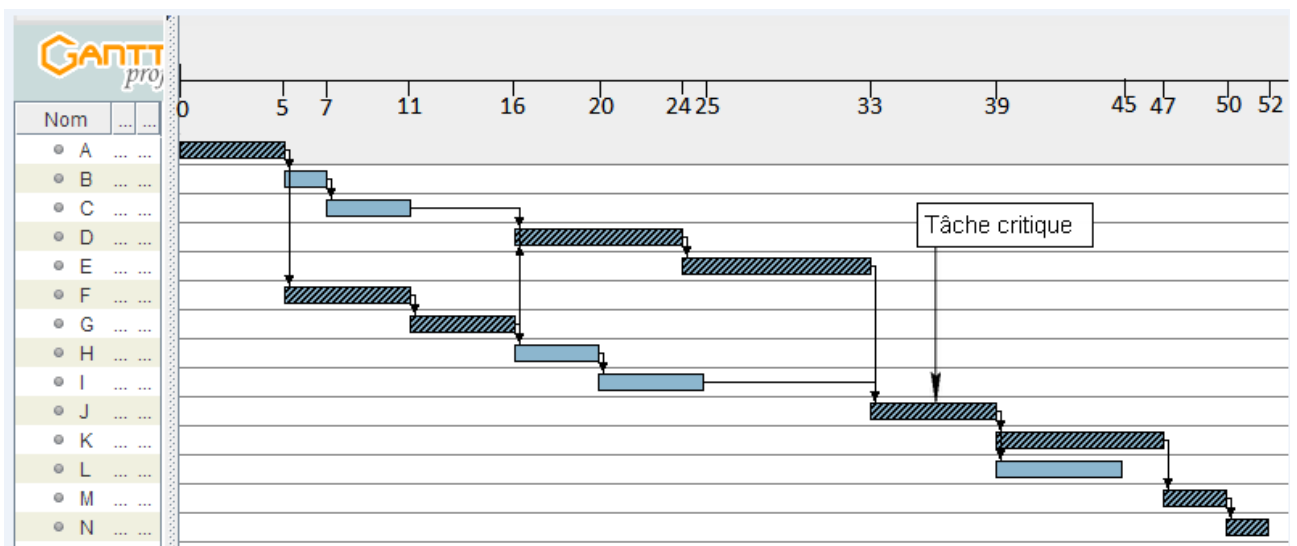


FIGURE 5.3 – Diagramme de Gantt au plus tôt

La **durée minimale** de réalisation du projet, calculées par les trois approches **MPM**, **PERT** et le **diagramme de GANTT**, est de **52 jours**. Le chemin critique \mathcal{C} est composé des tâches suivantes :

$A - F - G - D - E - J - K - M - N$.

Prenant maintenant le réseau PERT, la marge totale et libre de la tâche B , représentée par l'arc $(1, 2)$, est calculée comme suit :

$$MT_B = MT_{1,2} = T_2 - t_1 - d_{12} = 12 - 5 - 2 = 5.$$

$$ML_B = ML_{1,2} = t_2 - t_1 - d_{12} = 7 - 5 - 2 = 0.$$

Les autres marges, calculées de la même manière, sont données dans le tableau suivant :

Tâches	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
MT_i	0	5	5	0	0	0	0	8	8	0	0	7	0	0
ML_i	0	0	5	0	0	0	0	0	8	0	0	7	0	0

5.4 Gestion des ressources

Cette entreprise dispose de *10 ouvriers*. Le besoin en personnel de chaque tâche est représenté dans la figure 5.4.

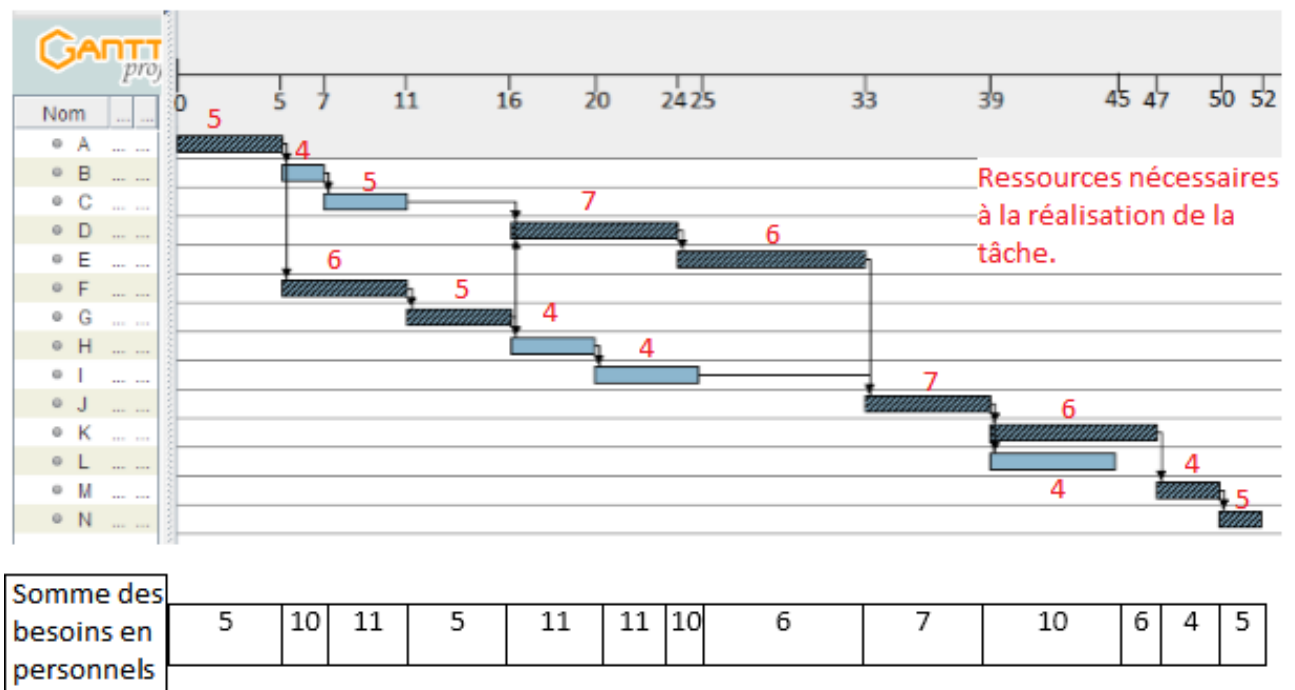


FIGURE 5.4 – Diagramme de Gantt avec ressources

Appliquons maintenant la méthode sérielle, en choisissant comme liste de priorité, à chaque étape, l'ordre alphabétique.

- Au début du projet, la tâche candidate est *A*, qui mobilise 5 ouvriers, et elle est donc retenue.
- À la date $t = 5$, lorsque *A* se termine et libère des ouvriers, les tâches candidates, par ordre de priorité, sont *B* et *F*. Elles sont retenues et mobilisent tout le personnel disponible.

Le tableau suivant résume l'ensemble des étapes de la méthode sérielle :

date t	Tâches candidates	Tâches retenues	Tâches rejetés
0	A	A	
5	B, F	B, F	
7	C		C
11	C, G	G, C	
16	D, H	D	H
24	E, H	E, H	
28	I	I	
33	J	J	
39	K, L	K, L	
45			
47	M	M	
50	N	N	

En représentant l'ordonnancement calculé par la méthode sérielle, le diagramme de Gantt obtenu est le suivant :

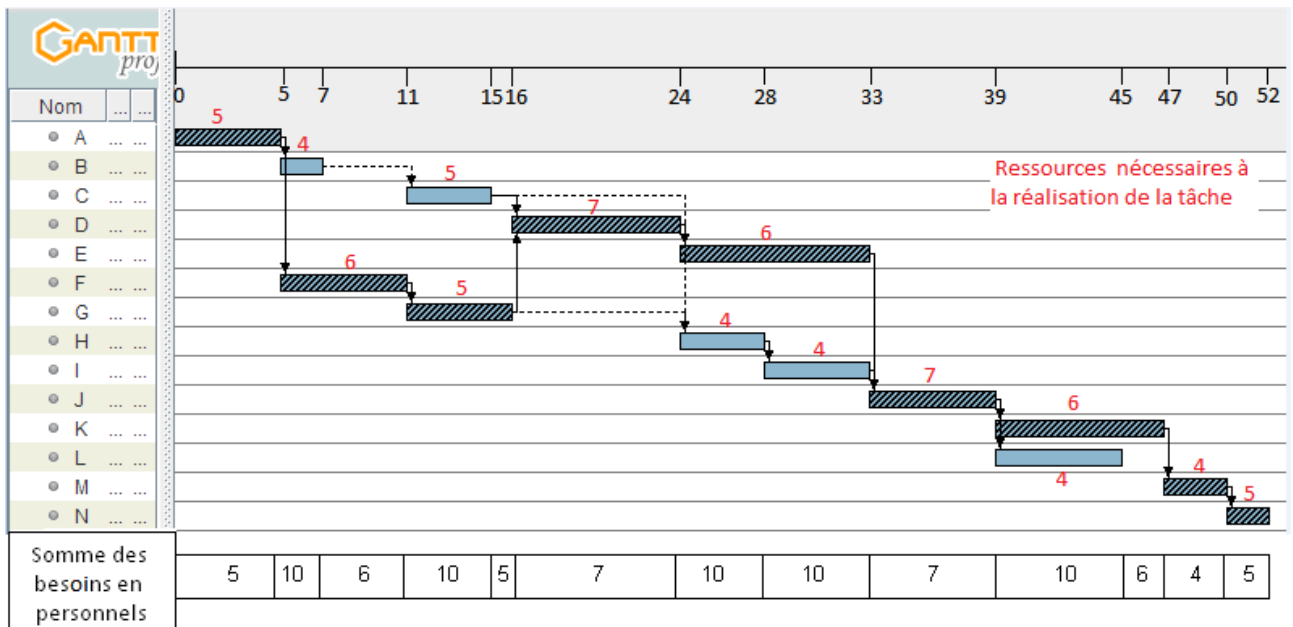


FIGURE 5.5 – Diagramme de Gantt de la solution sérielle

Tâches	d_{ij}	d_{ij}^c	$d_{ij} - d_{ij}^c$	ρ_{ij} (€/ jour)
A	5	-	-	-
B	2	-	-	-
C	4	3	1	5000
D	8	7	1	2900
E	9	8	1	2500
F	6	4	2	2300
G	5	-	-	-
H	4	3	1	2300
I	5	4	1	1800
J	6	-	-	-
K	8	7	1	1900
L	6	5	1	2700
M	3	-	-	-
N	2	-	-	-

TABLE 5.1 – Durées normales et réduites des tâches, avec leurs coûts marginaux

5.5 Réduction de la durée du projet

Le projet avec sa durée minimale de 52 jours se termine le **31 Mai**. Le chef de projet s'interroge s'il peut réduire de **05 jours** la durée du projet pour respecter la date de livraison du projet (*le 27 Mai*)? Les durées normales et réduites, ainsi que les coûts marginaux correspondants de certaines tâches sont illustrées dans le tableau suivant :

Itération 1 :

D'après le réseau PERT de la figure 5.2 (ou le réseau MPM de la figure 5.1), le chemin critique est $\mathcal{C} = \{A, F, G, D, E, J, K, M, N\}$. Par conséquent, on peut réduire la durée des tâches F , D , E ou K . On choisit de réduire la tâche K (représentée par l'arc (8, 9)), car elle présente le surcoût le plus faible. Cette tâche est comprimée d'une quantité égale à :

$$\min\{(d_{89} - d_{89}^c), MT_{12}, MT_{24}, MT_{45}, MT_{57}, MT_{8fin}\} = \min\{1, 5, 5, 8, 8, 7\} = 1 \text{ journée.}$$

K est alors réduite au maximum, avec un surcoût de : $1 \times 1900 = 1900 \text{ €}$.

Itération 2 :

On recalcule l'ordonnancement, on ne crée pas un autre chemin critique. Alors on réduit la tâche *F* de : $\min\{2, 5, 5, 8, 8, 6\} = 2$ jours.

F est alors réduite au maximum, avec un surcoût de : $2 \times 2300 = 4600$ €.

Itération 3 :

On recalcule l'ordonnancement, on ne crée pas un autre chemin critique. Alors on réduit la tâche *E* de : $\min\{1, 3, 3, 8, 8, 6\} = 1$ journée.

E est réduite au maximum, avec un surcoût de : $1 \times 2500 = 2500$ €.

Itération 4 :

On recalcule l'ordonnancement, on ne crée pas un autre chemin critique. Alors on réduit la tâche *D* de : $\min\{1, 3, 3, 7, 7, 6\} = 1$ journée.

D est réduite au maximum, avec un surcoût de : $1 \times 2900 = 2900$ €.

Les tâches du chemin critique sont réduites au maximum, on arrête la réduction. En conclusion, le projet peut être réduit de 5 jours avec un surcoût total de : $1900 + 4600 + 2500 + 2900 = 11900$ €.

L'ordonnancement avec la réduction est illustré dans la figure 5.6.

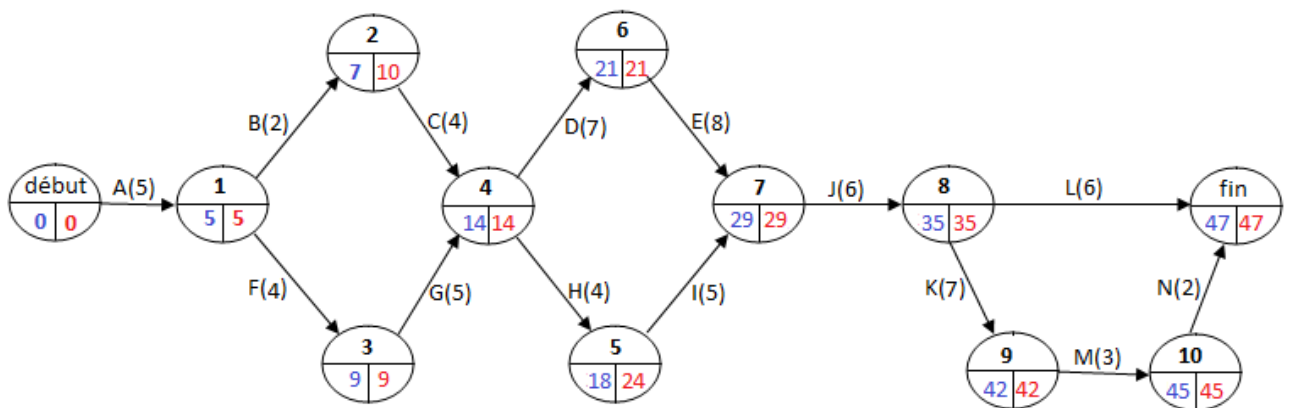


FIGURE 5.6 – Réseau PERT pour une durée de 47 jours

Conclusion :

Le projet avec son ordonnancement initial a une durée de 52 jours et se termine le 31 Mai, bien que la date de livraison fixée dans le contrat est le 27 Mai. Donc, en réduisant le projet de 05 jours, il se termine le 26 Mai, ce qui permet à l'entreprise de respecter la date de livraison initiale.

Bibliographie

- 1 (AFNOR), Concepts et vocabulaire en management de projet. Norme AFNOR, FD X50-105, 2003.
- 2 Daniel de WOLF. Gestion de projets et études de cas. Cours de Master 1 Économie et gestion de l'environnement et du développement durable. Université du LITTORAL COTE D'OPALE, 2010.
- 3 Vicent GIARD. Gestion de la production et des flux. 3ème Édition, Economica, Paris, 2003.
- 4 Vicent GIARD. Gestion de projets. Economica, Paris, 1991.
- 5 MELLAL L., Le management de projet par le management des risques : propositions méthodologiques. Mémoire de magister, Université de BATNA, 2009.
- 6 MEREDITH J.R., MANTEL S.J., Project Management. John Wiley, 2003.
- 7 Jeane-Yves Moine. Le Grand Livre de Management de Projets. Éditions AFNOR, Paris, 2013.
- 8 Jeane-Yves Moine. Manuel de Gestion de Projets. Éditions AFNOR, Paris, 2008.
- 9 Roger Aïm. Les fondamentaux de la gestion de projet. Éditions AFNOR, Paris, 2011.
- 10 Jean Michael Bennett and Danny S.K. Ho. Project Management for Engineers. World Scientific Publishing , Singapore, 2014.
- 11 Jitesh J. Thakkar. Project Management : Strategic and Operational Planning. Springer Nature Singapore Pte Ltd, 2022.