Chapitre 1

Ensembles, Relations et Applications

1.1 Généralités sur les ensembles

1.1.1 Ensemble

Définition 1.1 *Un ensemble est une collection d'objets qui ont la même propriété. Chaque objet est un élément de l'ensemble.*

Remarque 1.1 *Un élément x est distinct de l'ensemble $\{x\}$ c'est à dire $x \neq \{x\}$.*

Exemple 1.1 *Soit E l'ensemble des entiers qui divisent* 20*, on aura :*

$$E = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\} .$$

$\mathbb{N}$: *l'ensemble des entiers naturels.*
$\mathbb{Z}$: *l'ensemble des entiers relatifs.*
$\mathbb{Q}$: *l'ensemble des nombres rationnels.*
$\mathbb{R}$: *l'ensemble des nombres réels.*
$\mathbb{C}$: *l'ensemble des nombres complexes..*

Appartenance, Inclusion et Égalité

Soit E un ensemble non vide.

a) Si x est un élément de E on dit aussi que x appartient à E et on écrit $x \in E$.

Si x n'est pas un élément de E, on dit que x n'appartient pas à E et on écrit $x \notin E$.

b) Un ensemble E est inclus dans un ensemble F si tout élément de E est un élément de F et on a

$$E \subset F \Longleftrightarrow [\forall x, x \in E \Longrightarrow x \in F] .$$

On dit aussi que E est une partie de F ou bien E est un sous ensemble de F.

c) E et F sont égaux si E est inclus dans F et F est inclus dans E et on écrit :

$$E = F \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} E \subseteq F \\ \text{et} \\ F \subseteq E \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \quad [\forall x, x \in E \Longleftrightarrow x \in F] .$$

L'ensemble vide noté $\emptyset$ (ou $\{\}$) est un ensemble sans éléments et de plus il est inclus dans tout ensemble E.

Réunion et intersection

a) L'intersection de deux ensembles E et F est l'ensemble de leurs éléments communs et on écrit

$$E \cap F = \{x/x \in E \text{ et } x \in F\}.$$

Et si $E \cap F = \emptyset$, on dit que E et F sont disjoints.

b) La réunion de deux ensembles E et F est l'ensemble de leurs éléments comptés une seule fois et on écrit

$$E \cup F = \{x/x \in E \text{ ou } x \in F\}.$$

Différence de deux ensembles

On appelle différence de deux ensembles E et F et on note $E - F$ l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à F et on écrit

$$E - F = \{x/x \in E \text{ et } x \notin F\}.$$

Si $F \subset E$, alors $E - F$ est dit complémentaire de F dans E et il est noté C_E^F ou $\overline{F}$ ou $C_E F$. On note $\emptyset = E - E$.

Différence symétrique

On appelle différence symétrique de deux ensembles E et F et on note $E \Delta F$, l'ensemble défini par :

$$E \Delta F = (E - F) \cup (F - E).$$

1.1.2 Propriétés

Soient E un ensemble non vide, A, B et C trois ensembles, alors les relations suivantes sont vraies

1) $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$, 2) $A \cap \emptyset = \emptyset$ et $A \cup \emptyset = A$.

3) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, 4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

5) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$, 6) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

7) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$, 8) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.

9) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$. 10) $A \Delta \emptyset = A$ et $A \Delta A = \emptyset$.

11) Si : A, B des parties de E, alors on a :

$$C_E (A \cap B) = C_E A \cup C_E B \text{ et } C_E (A \cup B) = C_E A \cap C_E B.$$

1.1.3 L'ensemble des parties d'un ensemble

Etant donné un ensemble E. On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E et on note

$$\mathcal{P}(E) = \{A \text{ tel que : } A \subset E\}.$$

Remarque 1.2 *a) L'ensemble vide et E sont toujours des éléments de $\mathcal{P}(E)$.*

b) Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$, donc

$$\mathcal{P}(E) = \left\{ \begin{array}{c} \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \\ \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\} \end{array} \right\}.$$

1.1.4 Partition d'un ensemble

Définition 1.2 *Soient E un ensemble non vide et B une famille des parties de E.*

On dit que B est une partition de E si

1) Tout élément de B n'est pas vide.

2) Les éléments de B sont deux à deux disjoints.

3) La réunion des éléments de B est égale à E.

Exemple 1.2 *Soit* $E = \{1, 2, 3, 4\}$, *on a :* $B = \{\{3\}, \{4\}, \{1, 2\}\}$ *est une partition de* E.

1.1.5 Produit cartésien

Définition 1.3 *L'ensemble des couples* (x, y) *tels que* $x \in A$ *et* $y \in B$ *est appelé produit cartésien de* A *et* B *et on le note* $A \times B$

$$A \times B = \{(x, y) \,/\; x \in A \text{ et } y \in B\}.$$

Propriétés : Soient A, B, C et D des ensembles, alors les relations suivantes sont vraies

1) $A \times B = \emptyset \Longrightarrow A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

2) $A \times B = B \times A \Longleftrightarrow A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$ ou $A = B$.

3) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

4) $(A \cup C) \times B = (A \times B) \cup (C \times B)$.

5) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

6) $(A \times B) \cup (C \times D) \neq (A \cup C) \times (B \cup D)$.

Remarque Si $cardE = n$ fini, A, B des parties de E, alors on a :

$card(\mathcal{P}(E)) = 2^{cardE} = 2^n$ $\qquad$ $A \times B = cardA.cardB$

$card(A \cup B) = cardA + cardB - card(A \cap B)$

$card(A \triangle B) = cardA + cardB - 2card(A \cap B)$

Exemple 1.3 *Soient* $E = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{-2, 0, 1, 2, 3\}$ *et* $C = \{0, 2\}$.

Déterminer

$A \cap B,\ \ A \cup B,\ \ C_E A,\ C_E B,\ A - B,\ \ B - A,\ \ A \triangle B,\ \ A \times C,\ \ C \times A$

On a :

$A \cap B = \{1, 3\}, \qquad A \cup B = \{-2, 0, 1, 2, 3, 4\}, \qquad C_E A = \{-2, -1, 0, 2\},$

$C_E B = \{-1, 4\}, \quad A - B = \{4\}, \quad B - A = \{-2, 0, 2\}, \quad A \triangle B = \{-2, 0, 2, 4\},$

$A \times C = \{(1, 0), (1, 2), (3, 0), (3, 2), (4, 0), (4, 2)\},$

$C \times A = \{(0, 1), (2, 1), (0, 3), (2, 3), (0, 4), (2, 4)\}.$

1.2 Exercices

Exercise 1.4 *Soient E un ensemble non vide, A et B deux parties de ensemble E.*

Montrer que :

1) $C_E (A \cap B) = C_E A \cup C_E B$ 2) $C_E (A \cup B) = C_E A \cap C_E B.$

3) $(A \subseteq B) \Rightarrow C_E B \subseteq C_E A$ 4) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset C_E B$

Solution.

1) Montrons que

$$C_E (A \cap B) = C_E A \cup C_E B$$

Soit $x \in C_E (A \cap B)$.

On a :

$$\begin{aligned} x \in C_E (A \cap B) &\Leftrightarrow x \in E \text{ et } x \notin (A \cap B) \\ &\Leftrightarrow x \in E \text{ et } (x \notin A \text{ ou } x \notin B) \\ &\Leftrightarrow (x \in E \text{ et } x \notin A) \text{ ou } (x \in E \text{ et } x \notin B) \\ &\Leftrightarrow x \in C_E A \text{ ou } x \in C_E B \\ &\Leftrightarrow x \in C_E A \cup C_E B \end{aligned}$$

Donc,

$$\forall x \in C_E (A \cap B) \Leftrightarrow x \in C_E A \cup C_E B.$$

Alors,

$$C_E\left(A\cap B\right)=C_EA\cup C_EB$$

2) Montrons que

$$C_E\left(A\cup B\right)=C_EA\cap C_EB$$

Soit $x\in C_E\left(A\cup B\right).$
On a :

$$\begin{aligned} x\in C_E\left(A\cup B\right) &\Leftrightarrow x\in E \text{ et } x\notin (A\cup B)\\ &\Leftrightarrow x\in E \text{ et } (x\notin A \text{ et } x\notin B)\\ &\Leftrightarrow (x\in E \text{ et } x\notin A) \text{ et } (x\in E \text{ et } x\notin B)\\ &\Leftrightarrow x\in C_EA \text{ et } x\in C_EB\\ &\Leftrightarrow x\in C_EA\ \cap C_EB \end{aligned}$$

Donc,

$$\forall x\in C_E\left(A\cup B\right)\Leftrightarrow x\in C_EA\cap C_EB.$$

Alors,

$$C_E\left(A\cup B\right)=C_EA\cap C_EB$$

3) Montrons que :

$$(A\subseteq B)\Rightarrow C_EB\subseteq C_EA$$

On suppose que $A\subseteq B$ *et on démontre que :* $C_EB\subseteq C_EA.$
Soit $x\in C_EB.$
On a :

$$\begin{aligned} x\in C_EB &\Rightarrow x\in E \text{ et } x\notin B\\ &\Rightarrow x\in E \text{ et } x\notin A \text{ (car :} A\subseteq B)\\ &\Rightarrow x\in C_EA \end{aligned}$$

donc on a : $C_EB\subseteq C_EA.$

Alors,

$$(A\subseteq B)\Rightarrow C_EB\subseteq C_EA \qquad \text{(est vraie)}$$

4) Montrons que

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset C_E B$$

On suppose que $A \cap B = \emptyset$ *et on démontre que :* $A \subset C_E B$.
Soit $x \in A$.
On a :

$$\begin{aligned} x \in A \quad &\Rightarrow \quad x \notin B \text{ car } A \cap B = \emptyset \\ &\Rightarrow \quad x \in C_E B \end{aligned}$$

donc $\forall x : x \in A \Rightarrow x \in C_E B$, *d'où* $A \subset C_E B$.
Alors,

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset C_E B \qquad \textit{(est vraie)}$$

Exercise 1.5 *Soient* A, B *et* C *trois ensembles de l'ensemble* E.
Montrer que :

$$1) \quad A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C).$$

$$2) \quad A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C).$$

Solution.
1) Montrons que

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

Soit $x \in A - (B \cap C)$.
On a :

$$\begin{aligned} x \in A - (B \cap C) \quad &\Leftrightarrow \quad x \in A \ \text{ et } \ x \notin (B \cap C) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in A \ \text{ et } \ (x \notin B \text{ ou } x \notin C) \\ &\Leftrightarrow \quad (x \in A \ \text{ et } \ x \notin B) \text{ ou } (x \in A \ \text{ et } x \notin C) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in (A - B) \ \text{ ou } x \in (A - C) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in (A - B) \cup (A - C) \end{aligned}$$

Donc,

$$\forall x : x \in A - (B \cap C) \Leftrightarrow x \in (A - B) \cup (A - C).$$

D'où

$$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C).$$

2) Montrons que

$$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C).$$

Soit $x\in A-(B\cup C)$.
On a :

$$\begin{aligned}
x\in A-(B\cup C) &\Leftrightarrow x\in A \ \ et \ \ x\notin(B\cup C)\\
&\Leftrightarrow x\in A \ \ et \ \ (x\notin B \ et \ x\notin C)\\
&\Leftrightarrow (x\in A \ \ et \ \ x\notin B) \ et \ (x\in A \ \ et \ x\notin C)\\
&\Leftrightarrow x\in(A-B) \ \ et \ x\in(A-C)\\
&\Leftrightarrow x\in(A-B)\cap(A-C)
\end{aligned}$$

Donc,

$$\forall x: x\in A-(B\cup C)\Leftrightarrow x\in(A-B)\cap(A-C).$$

D'où

$$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C).$$

Exercise 1.6 *Soient A,B,C et D des ensembles.*
Montrer que :

1) $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$.
2) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.
3) $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$.

Solution.
1) Montrons que : $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$.
Soit $(x,y)\in(A\cap B)\times C$.

On a :
$$\begin{aligned}
(x,y)\in(A\cap B)\times C &\Leftrightarrow x\in A\cap B \ et \ y\in C\\
&\Leftrightarrow (x\in A \ et \ x\in B) \ \ et \ y\in C\\
&\Leftrightarrow (x\in A \ et \ y\in C\ ) \ \ et \ \ (x\in B \ \ et \ y\in C)\\
&\Leftrightarrow (x,y)\in(A\times C) \ \ et \ \ (x,y)\in(B\times C)\\
&\Leftrightarrow (x,y)\in(A\times C)\cap(B\times C)
\end{aligned}$$

Donc, $\forall (x,y) : (x,y) \in (A \cap B) \times C \Leftrightarrow (x,y) \in (A \times C) \cap (B \times C)$

Alors, $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

2) Montrons que : $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

Soit $(x,y) \in A \times (B \cup C)$.

On a :

$$\begin{aligned} (x,y) \in A \times (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } y \in (B \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } (y \in B \text{ ou } y \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } y \in B\ ) \text{ ou } (x \in A \text{ et } y \in C) \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times B) \text{ ou } (x,y) \in (A \times C) \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C) \end{aligned}$$

Donc,

$$\forall (x,y) : (x,y) \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow (x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$$

Alors,

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

3) Montrons que : $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

Soit $(x,y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$.

On a :

$$\begin{aligned} (x,y) \in (A \times B) \cap (C \times D) &\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times B) \text{ et } (x,y) \in (C \times D) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } y \in B) \text{ et } (x \in C \text{ et } y \in D) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in C) \text{ et } (y \in B \text{ et } y \in D) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap C \text{ et } y \in B \cap D \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in (A \cap C) \times (B \cap D) \end{aligned}$$

Donc,

$$\forall (x,y) : (x,y) \in (A \times B) \cap (C \times D) \Leftrightarrow (A \cap C) \times (B \cap D).$$

Alors,

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D) .$$

1.3 Relations binaires dans un ensemble

1.3.1 Définition et Propriétés

Définition 1.4 *Soient E un ensemble, x et y deux éléments de E. S'il existe un lien qui relie x et y on dit qu'ils sont reliés par une relation $\Re$ et on écrit $x\Re y$ ou $\Re(x, y)$.*

Exemple 1.7 $E = \mathbb{R}$, $\forall x, y \in E$, $x\Re y \Longleftrightarrow |x| - |y| = x - y$.

Propriétés

1) Réfléxivité : On dit que $\Re$ est réflexive dans E si :

$$\forall x \in E : x\Re x.$$

2) Symétrie : On dit que $\Re$ est symétrique dans E si :

$$\forall x, y \in E : x\Re y \Longrightarrow y\Re x.$$

3) Antisymétrie : On dit que $\Re$ est antisymétrique dans E si :

$$\forall x, y \in E : (x\Re y \text{ et } y\Re x) \Longrightarrow x = y.$$

4) Transitivité : On dit que $\Re$ est transitive dans E si :

$$\forall x, y, z \in E : (x\Re y \text{ et } y\Re z) \Longrightarrow x\Re z.$$

1.3.2 Relation d'équivalence

On dit que $\Re$ est une relation d'équivalence sur E si $\Re$ est à la fois réflexive, symétrique et transitive.

Classe d'équivalence

Soient $\Re$ une relation d'équivalence sur E et $a \in E$. On appelle classe d'équivalence de a notée $\hat{a}$ ou $\overline{a}$, l'ensemble des éléments x de E qui sont en relation $\Re$ avec a, c'est à dire :

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \{x \in E : x\Re a\}. \\ &= \{x \in E : a\Re x\}. \end{aligned}$$

Ensemble quotient

Soit $\Re$ une relation d'équivalence sur E. On définit l'ensemble quotient de E par la relation $\Re$ l'ensemble des classes d'équivalence de tous les éléments de E, noté $E/\Re$ et on a :

$$E/\Re = \{\hat{a}, a \in E\}.$$

Propriétés

Soit E un ensemble et $\Re$ une relation d'équivalence dans E. Soit x un élément de E, alors on a :

1) $\forall a \in E : a \in \hat{a}$

2) $\forall a, b \in E : a\Re b \Leftrightarrow \hat{a} = \hat{b}$ $(a \in \hat{b} \Leftrightarrow \hat{a} = \hat{b})$.

3) $\forall a, b \in E : \hat{a} \neq \hat{b} \Leftrightarrow \hat{a} \cap \hat{b} = \emptyset$

4) $E = \underset{a \in E}{\cup} \hat{a}$

Exercise 1.8 *Dans $\mathbb{R}$, on définit la relation binaire $\Re$ par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \ x\Re y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 = x - y.$$

1) Montrer que $\Re$ une relation d'équivalence.

2) Soit $a \in \mathbb{R}$. Préciser la classe d'équivalence de a.

Solution.

1) Montrons que $\Re$ une relation d'équivalence

$\Re$ ***est réflexive ?***

$$(\forall x \in \mathbb{R} : x\Re x)?$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a :

$$\begin{aligned} x\Re x &\Leftrightarrow x^2 - x^2 = x - x \\ &\Leftrightarrow 0 = 0 \end{aligned}$$

donc, $\forall x \in \mathbb{R} : x\Re x$*, alors* $\Re$ *est réflexive.......*(1)

$\Re$ ***est symétrique ?***

$$(\forall x, y \in \mathbb{R} : x\Re y \Rightarrow y\Re x)?$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$*, on suppose* $x\Re y$ *et on démontre que :* $y\Re x$.

On a :

$$\begin{aligned} x\Re y &\Rightarrow x^2 - y^2 = x - y \\ &\Rightarrow -\left(y^2 - x^2\right) = -\left(y - x\right) \\ &\Rightarrow y^2 - x^2 = y - x \\ &\Rightarrow y\Re x. \end{aligned}$$

Donc,

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x\Re y \Rightarrow y\Re x,$$

alors $\Re$ *est symétrique.......*(2)

$\Re$ ***est transitive ?***

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x\Re y \text{ et } y\Re z \Rightarrow x\Re z)?$$

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$*, on suppose* $x\Re y$ *et* $y\Re z$ *et on démontre que :* $x\Re z$.

On a :

$$x\Re y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 = x - y \tag{1.1}$$

et

$$y\Re z \Longleftrightarrow y^2 - z^2 = y - z. \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} (1.1) + (1.2) &\Rightarrow x^2 - y^2 + y^2 - z^2 = x - y + y - z \\ &\Rightarrow x^2 - z^2 = x - z \\ &\Rightarrow x\Re z. \end{aligned}$$

Donc

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \Re y \text{ et } y \Re z \Rightarrow x \Re z,$$

alors $\Re$ *est transitive.......(2)*

De $(1), (2)$ *et* (3)*, on a bien* $\Re$ *une relation d'équivalence.*

2) Soit $a \in \mathbb{R}$*, on a*

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \{x \in \mathbb{R}, x \Re a\} = \{x \in \mathbb{R}, x^2 - a^2 = x - a\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, (x-a)(x+a) = x - a\} = \{x \in \mathbb{R}, (x-a)(x+a-1) = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, x = a \text{ ou } x = 1 - a\} = \{a, 1-a\}. \end{aligned}$$

donc, $\hat{a} = \{a, 1-a\}$.

1.3.3 Relation d'ordre

Une relation binaire $\Re$ dans un ensemble E est dite relation d'ordre si elle est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive.

Ordre partiel, ordre total

Soient E un ensemble et $\Re$ une relation d'ordre dans E. On dit que $\Re$ est d'ordre total si

$$\forall x, y \in E : x \Re y \text{ ou } y \Re x.$$

Et on dit qu'elle est d'ordre partiel si elle n'est pas d'ordre total, c'est à dire :

$$\exists x, y \in E : x \text{ n'a pas de relation avec } y \text{ et } y \text{ n'a pas de relation avec } x.$$

Exercise 1.9 *On définit sur* $\mathbb{R}^*$ *la relation binaire* $\mathcal{R}_1$ *par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^*, \quad x \mathcal{R}_1 y \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : y = kx.$$

1) Montrer que $\mathcal{R}_1$ *est une relation d'ordre.*

2) L'ordre $\mathcal{R}_1$ *est-il total ?*

Solution.

1) Montrons que $\mathcal{R}_1$ *est une relation d'ordre.*

Réflexivité de $\mathcal{R}_1$: $(\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad x \mathcal{R}_1 x)$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

On a

$$\begin{aligned} &On\ a:\ x = 1.x \\ &donc,\ \exists k = 1 \in \mathbb{N} : x = 1.x \\ &d'où,\ x\mathcal{R}_1 x. \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad x\mathcal{R}_1 x$, *alors la relation* $\mathcal{R}_1$ *est réflexive.......*(i)

Antisymétrie de $\mathcal{R}_1$ ***:***

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}^*, \quad x\mathcal{R}_1 y \text{ et } y\mathcal{R}_1 x \Longrightarrow x = y)?$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}^*$.

On suppose $x\mathcal{R}_1 y$ *et* $y\mathcal{R}_1 x$ *et on démonté* $x = y$.

On a

$$\begin{aligned} \begin{cases} x\mathcal{R}_1 y \\ et \\ y\mathcal{R}_1 x \end{cases} &\Longrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{N} : y = kx \\ et \\ \exists k' \in \mathbb{N} : x = k'y \end{cases} \\ &\Longrightarrow \exists k, k' \in \mathbb{N} : y = k\,(k'y) \\ &\Longrightarrow \exists k, k' \in \mathbb{N} : y = (kk')\,y. \end{aligned}$$

Donc $kk' = 1$ *ce qui implique que* $k = k' = 1$ *car* $k, k' \in \mathbb{N}$ *et par suite* $x = y$, *Finalement*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^*, \quad x\mathcal{R}_1 y \text{ et } y\mathcal{R}_1 x \Longrightarrow x = y.$$

D'où la relation $\mathcal{R}_1$ *est antisymétrie........*(ii)

Transitivité de $\mathcal{R}_1$:

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R}^*, \quad x\mathcal{R}_1 y \text{ et } y\mathcal{R}_1 z \Longrightarrow x\mathcal{R}_1 z)?$$

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^*$.

On suppose $x\mathcal{R}_1 y$ *et* $y\mathcal{R}_1 z$ *et on démontre* $x\mathcal{R}_1 z$.

On a

$$\begin{aligned} \begin{cases} x\mathcal{R}_1 y \\ et \\ y\mathcal{R}_1 z \end{cases} &\Longrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{N} : y = kx \\ et \\ \exists k' \in \mathbb{N} : z = k'y \end{cases} \\ &\Longrightarrow \exists k, k' \in \mathbb{N} : z = k'\,(kx) = (k'k)\,x \\ &\Longrightarrow \exists k'' = k'k \in \mathbb{N} : z = k''x \text{ donc, } x\mathcal{R}_1 z. \end{aligned}$$

Alors,

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^*, \quad x\mathcal{R}_1 y \text{ et } y\mathcal{R}_1 z \Longrightarrow x\mathcal{R}_1 z.$$

D'où la relation $\mathcal{R}_1$ est transitive........(iii)

De (i), (ii) et (iii), on a $\mathcal{R}_1$ est une relation d'ordre.

2) L'ordre $\mathcal{R}_1$ est-il total :

L'ordre $\mathcal{R}_1$ est total si et seulement si :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^*, \quad x\mathcal{R}_1 y \text{ ou } y\mathcal{R}_1 x.$$

Prenons $x = 2$ et $y = 3$, on a

$\nexists k \in \mathbb{N}$ *tel que* $3 = k.2$ *donc* 2 *n'est pas en relation avec* 3
et
$\nexists k \in \mathbb{N}$ *tel que* $2 = k.3$ *donc* 3 *n'est pas en relation avec* 2

Donc, l'ordre $\mathcal{R}_1$ n'est pas total, on dit que l'ordre $\mathcal{R}_1$ est partiel.

1.4 Exercices

Exercise 1.10 *Soit f l'application définie par :*

$$f \quad : \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

1) Sur $\mathbb{R}$, on considère la relation $\mathcal{R}_1$ définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}_1 y \Longleftrightarrow f(x) = f(y)$$

a) Montrer que $\mathcal{R}_1$ est une relation d'équivalence.

b) Déterminer la classe d'équivalence de $\frac{1}{2}$.

2) Sur $\mathbb{R}$, on considère la relation $\mathcal{R}_2$ définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}_2 y \Longleftrightarrow f(x) \geq f(y)$$

$\mathcal{R}_2$ est-elle une relation d'ordre ?

Solution.

1) Sur $\mathbb{R}$, on considère la relation $\mathcal{R}_1$ définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}_1 y \Longleftrightarrow f(x) = f(y)$$

a) Montrons que $\mathcal{R}_1$ est une relation d'équivalence.

Réflexivité de $\mathcal{R}_1$ ***:***

$$(\forall x \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}_1 x)?$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, *on a :*

$$x\mathcal{R}_1 x \iff f(x) = f(x) \text{ (est vraie)}$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x\mathcal{R}_1 x$, *d'où* $\mathcal{R}_1$ *est réflexive.......* (i)

Symétrique de $\mathcal{R}_1$:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}_1 y \Longrightarrow y\mathcal{R}_1 x)?$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, *on suppose que* $x\mathcal{R}_1 y$ *et on démontre que* $y\mathcal{R}_1 x$.

On a :

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}_1 y &\Longrightarrow f(x) = f(y) \\ &\Longrightarrow f(y) = f(x) \\ &\Longrightarrow y\mathcal{R}_1 x \end{aligned}$$

Donc, $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}_1 y \Longrightarrow y\mathcal{R}_1 x$, *d'où* $\mathcal{R}_1$ *est symétrique ....* (ii)

Transitivité de $\mathcal{R}_1$ ***:***

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}_1 y \text{ et } y\mathcal{R}_1 z \Longrightarrow x\mathcal{R}_1 z)?$$

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$, *on suppose que* $x\mathcal{R}_1 y$ *et* $y\mathcal{R}_1 z$ *et on démontre que* $x\mathcal{R}_1 z$.

On a :

$$\begin{cases} x\mathcal{R}_1 y \\ et \\ y\mathcal{R}_1 z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(x) = f(y)......(1) \\ et \\ f(y) = f(z)......(2) \end{cases}$$

(1)+(2) de (1) *et* (2) *on a :* $f(x) = f(z)$, *d'où* $x\mathcal{R}_1 z$

Alors,

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}_1 y \text{ et } y\mathcal{R}_1 z \Longrightarrow x\mathcal{R}_1 z.$$

Donc, $\mathcal{R}_1$ *est transitive.......* (iii) .

De (i), (ii) *et* (iii), *on a* $\mathcal{R}_1$ *est une relation d'équivalence.*

b) Déterminons la classe d'équivalence de $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{1}{2}\right)} &= \{x \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}_1\frac{1}{2}\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = f(\frac{1}{2})\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{1+x^2} = \frac{4}{5}\} = \{x \in \mathbb{R} : 4 + 4x^2 = 5\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : x^2 = \frac{1}{4}\} = \{x \in \mathbb{R} : x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = \frac{1}{2}\} \\
&= \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}.
\end{aligned}$$

2) Sur $\mathbb{R}$, *on considère la relation* $\mathcal{R}_2$ *définie par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}_2 y \Longleftrightarrow f(x) \geq f(y)$$

$\mathcal{R}_2$ *n'est pas une relation d'ordre, car elle n'est pas antisymétrique. En effet, on a* $2\mathcal{R}(-2)$ *et* $(-2)\mathcal{R}2$, *car*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1+2^2} \geq \dfrac{1}{1+(-2)^2} \\ et \\ \dfrac{1}{1+(-2)^2} \geq \dfrac{1}{1+2^2}, \end{cases}$$

mais $2 \neq -2$.

Exercise 1.11 *1) Dans* $\mathbb{R}$, *on définit la relation binaire* $\mathcal{R}$ *par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\ \mathcal{R}\ y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 \leq x - y.$$

Montrer que :

a) $\mathcal{R}$ *n'est pas symétrique.*

b) $\mathcal{R}$ *n'est pas antisymétrique.*

2) On définit sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$ *la relation binaire* $\mathcal{S}$ *par :*

$$\forall x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[,\ x\ \mathcal{S}\ y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 \leq x - y.$$

a) Montrer que $\mathcal{S}$ *est une relation d'ordre.*

b) Cet ordre-est il total ?

Solution.

1) Dans $\mathbb{R}$, on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\ \mathcal{R}\ y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 \leq x - y.$$

a) Montrons que $\mathcal{R}$ n'est pas symétrique :
On a $0\mathcal{R}2$, car

$$0^2 - 2^2 = -4 \leq -2 = 0 - 2.$$

Mais, $2\not{\mathcal{R}}0$, car

$$2^2 - 0^2 > 2 = 2 - 0.$$

b) Montrons que $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique : On a $0\mathcal{R}1$ et $1\mathcal{R}0$, car

$$\begin{cases} 0^2 - 1^2 \leq 0 - 1 \\ et \\ 1^2 - 0^2 \leq 1 - 0. \end{cases}$$

Mais $0 \neq -1$.

2) On définit sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$ la relation binaire $\mathcal{S}$ par :

$$\forall x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[,\ x\ \mathcal{S}\ y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 \leq x - y.$$

a) Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre.

Réflexivité de** S **:

$$\left(\forall x \in]\frac{1}{2}; +\infty[,\ x\mathcal{S}x\right)?$$

Soit $x \in]\frac{1}{2}, +\infty[$. On a

$$x^2 - x^2 = 0 = x - x.$$

Donc,

$$x^2 - x^2 \leq x - x.$$

Alors,

$$\forall x \in]\frac{1}{2}; +\infty[,\ x\mathcal{S}x.$$

D'où, $\mathcal{S}$ est une relation réflexive.........(i)

Antisymétrie de** S **:

$$\left(\forall x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[, x\mathcal{S}y \text{ et } y\mathcal{S}x \Longrightarrow x = y\right)?$$

Soient $x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[$.

On suppose que $x\mathcal{S}y$ *et* $y\mathcal{S}x$ *et on démontre* $x = y$.

On a

$$\begin{cases} x\mathcal{S}y \\ et \\ y\mathcal{S}x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 \leq x - y \\ et \\ y^2 - x^2 \leq y - x \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 \leq x - y \\ et \\ x^2 - y^2 \geq x - y. \end{cases}$$

Alors,

$$x^2 - y^2 = x - y.$$

On a

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 = x - y &\Longrightarrow (x - y)(x + y - 1) = 0. \\ &\Longrightarrow \begin{cases} x = y \\ ou \\ x = 1 - y \ \ (impossible,\ car\, x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[). \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$\forall x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[, x\mathcal{S}y \ et\, y\mathcal{S}x \Longrightarrow x = y.$$

D'où la relation $\mathcal{S}$ *est antisymétrique* .... (ii)

Transitivité de S ***:***

$$\left(\forall x, y, z \in]\frac{1}{2}, +\infty[, x\mathcal{S}y \ et\, y\mathcal{S}z \Longrightarrow x\mathcal{S}z\right)?$$

Soient $x, y, z \in]\frac{1}{2}, +\infty[$.

On suppose $x\mathcal{S}y$ *et* $y\mathcal{S}z$ *et on démontre* $x\mathcal{S}z$.

On a :

$$\begin{cases} x\mathcal{S}y \\ et \\ y\mathcal{S}z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 \leq x - y \\ et \\ y^2 - z^2 \leq y - z \end{cases}$$

$$\Longrightarrow x^2 - z^2 \leq x - z.$$

Donc

$$\forall x, y, z \in]\frac{1}{2}, +\infty[, x\mathcal{S}y \ et\, y\mathcal{S}z \Longrightarrow x\mathcal{S}z.$$

D'où la relation $\mathcal{S}$ est transitive .... (iii)
De (i), (ii) *et* (iii), *on a* $\mathcal{S}$ *est une relation d'ordre.*
b) L'ordre est-il total ?
En effet, soient $x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[$. *On a*

$$x^2 - y^2 \leq x - y \ \text{ ou } \ x^2 - y^2 \geq x - y$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \ x^2 - y^2 \leq x - y \ \text{ ou } \ y^2 - x^2 \leq y - x \\ &\Longrightarrow \ x\mathcal{S}y \ \text{ ou } \ y\mathcal{S}x. \end{aligned}$$

Exercise 1.12 *On définit sur* $\mathbb{R}^2$ *la relation binaire* $\mathcal{R}_2$ *par :*

$$\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2, \quad (a,b)\, \mathcal{R}_2\, (c,d) \Longleftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2.$$

1) Montrer que $\mathcal{R}_2$ *est une relation d'équivalence.*
2) Déterminer la classe d'équivalence de $(0,1)$.
Solution.
On a $\mathcal{R}_2$ *la relation binaire définie sur* $\mathbb{R}^2$ *comme suit :*

$$\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2, \quad (a,b)\, \mathcal{R}_2\, (c,d) \Longleftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2.$$

1) Montrons que $\mathcal{R}_2$ *est une relation d'équivalence.*
Réflexivité de $\mathcal{R}_2$:

$$\big(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a,b)\, \mathcal{R}_2\, (a,b)\big)?$$

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
On a

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 = a^2 + b^2 \\ \Longrightarrow \ & (a,b)\, \mathcal{R}_2\, (a,b). \end{aligned}$$

Donc,

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a,b)\, \mathcal{R}_2\, (a,b).$$

Alors, la relation $\mathcal{R}_2$ *est réflexive sur* $\mathbb{R}^2$....... (i)
Symétrie de $\mathcal{R}_2$:

$$\big(\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2, \ (a,b)\, \mathcal{R}_2\, (c,d) \Longrightarrow (c,d)\, \mathcal{R}_2\, (a,b)\big)?$$

Soient $(a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2$, *on suppose* $(a,b)\, \mathcal{R}_2\, (c,d)$ *et on démontre* $(c,d)\, \mathcal{R}_2\, (a,b)$.

On a :

$$\begin{aligned}(a,b)\,\mathcal{R}_2\,(c,d) &\Longrightarrow a^2+b^2=c^2+d^2\\ &\Longrightarrow c^2+d^2=a^2+b^2\\ &\Longrightarrow (c,d)\,\mathcal{R}_2\,(a,b)\,.\end{aligned}$$

Donc

$$\forall\,(a,b)\,,(c,d)\in\mathbb{R}^2,\ \ (a,b)\,\mathcal{R}_2\,(c,d)\Longrightarrow (c,d)\,\mathcal{R}_2\,(a,b)\,.$$

D'où la relation $\mathcal{R}_2$ est symétrique.......(ii)

Transitivité de $\mathcal{R}_2$:

$$\big(\forall\,(a,b)\,,(c,d)\,,(e,f)\in\mathbb{R}^2:(a,b)\,\mathcal{R}_2\,(c,d)\ \ et\ \ (c,d)\,\mathcal{R}_2\,(e,f)\Longrightarrow(a,b)\,\mathcal{R}_2\,(e,f)\big)?$$

Soient $(a,b)\,,(c,d)\,,(e,f)\in\mathbb{R}^2$.

On suppose $(a,b)\,\mathcal{R}_2\,(c,d)$ et $(c,d)\,\mathcal{R}_2\,(e,f)$ et on démontre $(a,b)\,\mathcal{R}_2\,(e,f)\,.$

On a :

$$\begin{aligned}\left\{\begin{array}{l}(a,b)\,\mathcal{R}_2\,(c,d)\\ et\\ (c,d)\,\mathcal{R}_2\,(e,f)\end{array}\right. &\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}a^2+b^2=c^2+d^2\\ et\\ c^2+d^2=e^2+f^2\end{array}\right.\\ &\Longrightarrow a^2+b^2=e^2+f^2\\ &\Longrightarrow (a,b)\,\mathcal{R}_2\,(e,f)\,.\end{aligned}$$

Alors,,

$$\forall\,(a,b)\,,(c,d)\,,(e,f)\in\mathbb{R}^2:(a,b)\,\mathcal{R}_2\,(c,d)\ \ et\ \ (c,d)\,\mathcal{R}_2\,(e,f)\Longrightarrow(a,b)\,\mathcal{R}_2\,(e,f)\,.$$

D'où la relation $\mathcal{R}_2$ est transitive........(iii)

De (i), (ii) et (iii), on a $\mathcal{R}_2$ est une relation d'équivalence.

2) Déterminons $\overline{(0,1)}$ la classe d'équivalence de $(0,1)\,.$

On a :

$$\begin{aligned}\overline{(0,1)} &= \left\{(a,b)\in\mathbb{R}^2:(a,b)\,\mathcal{R}_2\,(0,1)\right\}=\left\{(a,b)\in\mathbb{R}^2:a^2+b^2=0^2+1^2\right\}\\ &= \left\{(a,b)\in\mathbb{R}^2:a^2+b^2=1\right\}.\end{aligned}$$

Donc la classe d'équivalence de $(0,1)$ est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

Exercise 1.13 *On définit sur $\mathbb{R}_*^+$ la relation binaire $\mathcal{R}_1$ par :*

$$\forall x,y\in\mathbb{R}_*^+,\quad x\mathcal{R}_1y\Longleftrightarrow\exists k\in\mathbb{N}:y=x^k.$$

1) Montrer que $\mathcal{R}_1$ est une relation d'ordre.

2) L'ordre $\mathcal{R}_1$ est-il total ?

Solution.

1) Montrons que $\mathcal{R}_1$ est une relation d'ordre.

Réflexivité de R_1 : $(\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad x\mathcal{R}_1 x)$

Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$.

On a

$$\begin{aligned} \textit{On a :}\quad & x = x^1 \\ & \textit{donc, } \exists k = 1 \in \mathbb{N} : x = x^k \\ & \textit{d'où } x\mathcal{R}_1 x. \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad x\mathcal{R}_1 x$, *alors la relation* $\mathcal{R}_1$ *est réflexive.......(i)*

Antisymétrie de R_1 ***:***

$$\big(\forall x, y \in \mathbb{R}_*^+, \quad x\mathcal{R}_1 y \text{ et } y\mathcal{R}_1 x \Longrightarrow x = y\big)?$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}_*^+$

On suppose $x\mathcal{R}_1 y$ *et* $y\mathcal{R}_1 x$ *et on démontre* $x = y$.

On a

$$\begin{aligned} \left\{\begin{array}{l} x\mathcal{R}_1 y \\ \text{et} \\ y\mathcal{R}_1 x \end{array}\right. & \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists k_1 \in \mathbb{N} : y = x^{k_1} \\ \text{et} \\ \exists k_2 \in \mathbb{N} : x = y^{k_2} \end{array}\right. \\ & \Longrightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N} : y = \left(y^{k_2}\right)^{k_1} \\ & \Longrightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N} : y = y^{k_1 k_2}. \end{aligned}$$

Donc $k_1 k_2 = 1$ *ce qui implique que* $k_1 = k_2 = 1$ *car* $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ *et par la suite* $x = y$. *Finalement,*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_*^+, \quad x\mathcal{R}_1 y \text{ et } y\mathcal{R}_1 x \Longrightarrow x = y.$$

D'où la relation $\mathcal{R}_1$ *est antisymétrie........(ii)*

Transitivité de R_1 :

$$\big(\forall x, y, z \in \mathbb{R}_*^+, \quad x\mathcal{R}_1 y \text{ et } y\mathcal{R}_1 z \Longrightarrow x\mathcal{R}_1 z\big)?$$

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}_*^+$.

On suppose $x\mathcal{R}_1 y$ *et* $y\mathcal{R}_1 z$ *et on démontre* $x\mathcal{R}_1 z$.

On a

$$\left\{\begin{array}{l} x\mathcal{R}_1 y \\ et \\ y\mathcal{R}_1 z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists k_1 \in \mathbb{N} : y = x^{k_1} \\ et \\ \exists k_2 \in \mathbb{N} : z = y^{k_2} \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N} : z = \left(x^{k_1}\right)^{k_2} = x^{k_1 k_2}$$

$$\Longrightarrow \exists k_3 = k_1.k_2 \in \mathbb{N} : z = x^{k_3} \text{ donc, } x\mathcal{R}_1 z.$$

Alors,

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}_*^+, \quad x\mathcal{R}_1 y \text{ et } y\mathcal{R}_1 z \Longrightarrow x\mathcal{R}_1 z.$$

D'où la relation $\mathcal{R}_1$ est transitive........(iii)

De (i), (ii) et (iii), on a $\mathcal{R}_1$ est une relation d'ordre.

2) L'ordre $\mathcal{R}_1$ est-il total ?

L'ordre $\mathcal{R}_1$ est total si et seulement si :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_*^+, \quad x\mathcal{R}_1 y \text{ ou } y\mathcal{R}_1 x.$$

Prenons $x = 2$ et $y = 3$, on a

$\nexists k \in \mathbb{N}$ *tel que* $3 = 2^k$ *donc* 2 *n'est pas en relation avec* 3
et
$\nexists k \in \mathbb{N}$ *tel que* $2 = 3^k$ *donc* 3 *n'est pas en relation avec* 2

Donc, l'ordre $\mathcal{R}_1$ n'est pas total, on dit que l'ordre $\mathcal{R}_1$ est partiel.

Exercise 1.14 *Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$, dans $\mathcal{P}(E)$, on définit la relation binaire $\Re$ par :*

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) : \ A\Re B \Longleftrightarrow A \subseteq B.$$

1) Montrer que $\Re$ est une relation d'ordre.

2) Cet ordre est-il total ?

Solution.

On a :

$$\mathcal{P}(E) = \left\{\begin{array}{c} \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \\ \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\} \end{array}\right\}.$$

1) Montrons que $\Re$ une relation d'ordre.

$\Re$ ***est réflexive ?***

$$(\forall A \in \mathcal{P}(E) : A\Re A)?$$

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.

On a :

$$\begin{aligned} A\Re A \quad &\Leftrightarrow A \subseteq A \\ &A \subseteq A \text{ est toujours vraie} \end{aligned}$$

donc,

$$\forall A \in \mathcal{P}(E) : A\Re A,$$

alors $\Re$ *est réflexive.......(1)*

$\Re$ ***est antisymétrique ?***

$$(\forall A, B \in \mathcal{P}(E) : (A\Re B \text{ et } B\Re A) \Rightarrow A = B)?$$

Soient $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, *on suppose* $A\Re B$ *et* $B\Re A$ *et on démontre que :* $A = B$.

On a :

$$A\Re B \Longleftrightarrow A \subseteq B \tag{1.3}$$

et

$$B\Re A \Longleftrightarrow B \subseteq A. \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} \text{de } (1.3) + (1.4) \quad \text{on a :} \quad & A \subseteq B \text{ et } B \subseteq A. \\ & \Rightarrow B \subseteq A \subseteq B\ . \\ & \Rightarrow A = B \end{aligned}$$

Donc,

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) : (A\Re B \text{ et } B\Re A) \Rightarrow A = B,$$

alors $\Re$ *est antisymétrique.......(2)*

$\Re$ ***est transitive ?***

$$(\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E) : (A\Re B \text{ et } B\Re C) \Rightarrow A\Re C)?$$

Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$, *on suppose* $A\Re B$ *et* $B\Re C$ *et on démontre que :* $A\Re C$.

On a :

$$A\Re B \Longleftrightarrow A \subseteq B \tag{1.5}$$

et

$$B\Re C \Longleftrightarrow B \subseteq C \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}(1.5)+(1.6) &\Rightarrow A \subseteq B \text{ et } B \subseteq C \\ &\Rightarrow A \subseteq B \subseteq C \\ &\Rightarrow A \subseteq C \\ &\Rightarrow A \Re C.\end{aligned}$$

Donc

$$\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E) : (A \Re B \text{ et } B \Re C) \Rightarrow A \Re C,$$

alors, $\Re$ *est transitive.......(3)*

De $(1), (2)$ *et* (3)*, on a* $\Re$ *est une relation d'ordre.*

2) L'ordre est-il total ?

L'ordre $\Re$ *est total si et seulement si :*

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) : A \Re B \text{ ou } B \Re A.$$

Prenons : $A = \{1, 3\}$ *et* $B = \{2, 4\}$ *on a :*

$$\begin{array}{ll} A \text{ n'est pas en relation avec } B & \text{car : } A \nsubseteq B \\ \text{et} & \\ B \text{ n'est pas en relation avec } A & \text{car : } B \nsubseteq A \end{array}$$

Donc, l'ordre $\Re$ *n'est pas total, on dit dans ce cas :* $\Re$ *est d'ordre partiel.*

Exercise 1.15 *Dans* $\mathbb{C}$ *l'ensemble des nombres complexes on définit la relation* $\Re$ *comme suit :*

$$\forall z, z' \in \mathbb{C} : z \Re z' \Leftrightarrow |z - i| = |i - z'|$$

1) Montrer que $\Re$ *est une relation d'équivalence dans* $\mathbb{C}$*.*

2) Déterminer, dans le plan complexe, la classe d'équivalence de $2 + 3i$*.*

Solution.

Dans $\mathbb{C}$*, la relation* $\Re$ *est définie comme suit :*

$$\forall z, z' \in \mathbb{C} : z \Re z' \Leftrightarrow |z - i| = |i - z'|$$

1) Montrons que $\Re$ ***une relation d'équivalence dans*** $\mathbb{C}$

$\Re$ ***est réflexive ?*** $(\forall z \in \mathbb{C} : z \Re z)$?

Soit $z \in \mathbb{C}$*. On a :* $z \Re z \Leftrightarrow |z - i| = |i - z| \Leftrightarrow 0 = 0$

donc, $\forall z\in\mathbb{C}: z\Re z$*, alors* $\Re$ *est réflexive.......(1)*

$\Re$ ***est symétrique ?*** $(\forall z,z'\in\mathbb{C}: z\Re z'\Rightarrow z'\Re z)?$

Soient $z,z'\in\mathbb{C}$*, on suppose* $z\Re z'$ *et on démontre que :* $z'\Re z$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } z\Re z' &\Rightarrow |z-i|=|i-z'| \\ &\Rightarrow |i-z'|=|z-i| \\ &\Rightarrow |z'-i|=|i-z|, \text{ car } |z-i|=|i-z| \text{ et } |i-z'|=|z'-i| \\ &\Rightarrow z'\Re z. \end{aligned}$$

Donc, $\forall z,z'\in\mathbb{C}: z\Re z'\Rightarrow z'\Re z$, *alors* $\Re$ *est symétrique.......(2)*

$\Re$ ***est transitive ?*** $(\forall z,z',z''\in\mathbb{C}: (z\Re z' \text{ et } z'\Re z'')\Rightarrow z\Re z'')?$

Soient $z,z',z''\in\mathbb{C}$*, on suppose* $z\Re z'$ *et* $z'\Re z''$ *et on démontre que :* $z\Re z''$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } z\Re z' &\Longleftrightarrow |z-i|=|i-z'| \ldots\ldots\ldots (*) \\ \text{et } z'\Re z'' &\Longleftrightarrow |z'-i|=|i-z''| \ldots\ldots\ldots (**) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (*)+(**) &\Rightarrow |z-i|=|i-z''|, \text{ car } |i-z'|=|z'-i| \\ &\Rightarrow |z-i|=|i-z''|\Rightarrow z\Re z''. \end{aligned}$$

Donc, $(\forall z,z',z''\in\mathbb{C}: (z\Re z' \text{ et } z'\Re z'')\Rightarrow z\Re z'')$, *alors* $\Re$ *est transitive.......(2)*

De $(1),(2)$ *et* (3)*, on a bien* $\Re$ *une relation d'équivalence dans* $\mathbb{C}$.

2) Déterminons la classe d'équivalence de $2+3i$**.**

$$\begin{aligned} \text{On a : } \widehat{2+3i} &= \{z\in\mathbb{C},\ z\Re(1+i)\}=\{z\in\mathbb{C},\ |z-i|=|i-(2+3i)|\}, \\ &= \left\{z\in\mathbb{C},\ |z-i|=|-2-2i|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\right\}, \\ &= \left\{z\in\mathbb{C},\ |z-i|=2\sqrt{2}\right\}. \end{aligned}$$

L'ensemble des points $M(x,y)$ *est le cercle de centre* $A(0,1)$ *et de rayon* $r=2\sqrt{2}$.

1.5 Applications

Définition 1.5 *Soient* E,F *deux ensembles.*

- On appelle application de E *dans* F *une relation de* E *dans* F *dont à tout élément* x *de* E *on lui correspond un et un seul élément* y *de* F. x *est dit antécédent,* E *l'ensemble de départ ou des antécédents,* y *est appelé l'image,* F *l'ensemble d'arrivée ou des images.*

- Deux applications sont égales si leurs ensembles de départ sont égaux, leurs ensembles d'arrivée sont égaux et leurs valeurs également.

En général, on schématise une fonction ou une application f *par*

$$\begin{array}{rccl} f: & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & y = f(x). \end{array}$$

$\Gamma = \{(x, f(x)), x \in E\}$ *est appelé graphe de* f*.*

Exemple 1.16

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x}{x-1} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}-\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x}{x-1}. \end{array}$$

Dans cet exemple g *est une application mais* f *est une fonction et n'est pas une application car l'élément* 1 *n'a pas une image dans* $\mathbb{R}$*.*

1.5.1 Restriction et prolongement d'une application

Soit E' un sous ensemble de E et $f : E \longrightarrow F$ une application. L'application $g : E' \longrightarrow F$ telle que $\forall x \in E', g(x) = f(x)$ est appelée la restriction de f à E' et on écrit $g = f_{/E'}$ et on dit aussi que f est le prolongement de g à E.

1.5.2 Composition des applications

Soient E, F et G trois ensembles et et $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ deux applications. On définit l'application composée de f et g notée $g \circ f$ par

$$\forall x \in E : (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

1.5.3 Injection, surjection et bijection

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

a) On dit que f est injective si et seulement si :

$$\forall x, x' \in E : f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$$

ou d'une manière équivalente

$$\forall x, x' \in E : x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x').$$

b) On dit que f est surjective si et seulement si :

$$\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x).$$

c) On dit que f est bijective si f à la fois injective et surjective.

Propriétés

a) f est injective si et seulement si l'équation $y = f(x)$ admet au plus une solution.

a) f est surjective si et seulement si l'équation $y = f(x)$ admet au moins une solution.

a) f est bijective si et seulement si l'équation $y = f(x)$ admet une et une seule solution.

Proposition 1.1 *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications, alors on a*

1) $g \circ f$ est injective $\Longrightarrow f$ est injective.

2) $g \circ f$ est surjective $\Longrightarrow g$ est surjective.

3) $g \circ f$ est bijective $\Longrightarrow f$ est injective et g est surjective.

Preuve : 1) On suppose que $g \circ f$ est injective et on montre que f est injective. Soient $x, x' \in E : f(x) = f(x')$ qui est dans F. On compose par g aux deux membres de l'égalité, on obtient

$$\begin{aligned} g(f(x)) = g(f(x')) &\Longrightarrow (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \\ &\Longrightarrow x = x' \text{ car } g \circ f \text{ est injective.} \end{aligned}$$

Ce qui montre que f est injective.

2) On suppose que $g \circ f$ est surjective et on montre que f est surjective.

$$\begin{aligned} g \circ f \text{ surjective} &\Longrightarrow \forall z \in G, \exists x \in E : z = (g \circ f)(x) \\ &\Longrightarrow \exists x \in E : z = g(f(x)). \end{aligned}$$

En posant $y = f(x) \in F$ alors $\forall z \in G, \exists y \in F : z = g(y)$, ce qui montre que g est surjective.

3) $g \circ f$ est bijective $\Longleftrightarrow \begin{cases} g \circ f \text{ est injective} \\ g \circ f \text{ est surjective} \end{cases} \Longrightarrow f$ est injective et g est surjective.

1.5.4 Applications réciproques

Définition 1.6 *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application bijective, alors il existe une application notée f^{-1} définie par $f^{-1} : F \longrightarrow E$*

$$y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y),$$

appelée application réciproque de f.

Théorème 1.17 *Théorème : Soit $f : E \longrightarrow F$ une application bijective, alors son application réciproque f^{-1} vérifie $f \circ f^{-1} = Id_F$ et $f^{-1} \circ f = Id_E$. On rappelle*

$$\begin{array}{rrcl} Id_E : & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & Id_E(x) = x. \end{array}$$

Proposition 1.2 *Proposition : Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications, alors on a*

a) f et g sont injectives $\Longrightarrow g \circ f$ est injective.

b) f et g sont surjectives $\Longrightarrow g \circ f$ est surjective.

c) f et g sont bijectives $\Longrightarrow g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Preuve : a) On suppose que f et g sont injectives et on montre que $g \circ f$ est injective. Soient $x, x' \in E$, alors on a

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') &\Longrightarrow g(f(x)) = g(f(x')) \\ &\Longrightarrow f(x) = f(x') \text{ car } g \text{ est injective} \\ &\Longrightarrow x = x' \text{ car } f \text{ est injective.} \end{aligned}$$

Ce qui montre que l'application $g \circ f$ est injective.

b) On suppose que f et g sont surjectives et on montre que $g \circ f$ est surjective.

Soit $z \in G$, on a :

$$\begin{aligned} z \in G &\Rightarrow \exists y \in F : z = g(y) \quad \text{car } g \text{ est surjective} \\ y \in F &\Rightarrow \exists x \in E : y = f(x) \quad \text{car } f \text{ est surjective} \end{aligned}$$

Donc, on obtient

$$z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$

Ce qui montre que l'application $g \circ f$ est surjective.

c) On suppose que f et g sont bijectives, donc f et g sont surjectives et f et g sont injectives. D'après a) et b) on déduit que $g \circ f$ est injective et est surjective, c'est à dire $g \circ f$ est bijective.

Remarque 1.3 *1. Les graphes d'une application bijective f et de son inverse f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.*

2. Notons que si f est bijective alors f^{-1} est aussi bijective et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

1.5.5 Image directe

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et A un sous-ensemble de E.

On définit l'image directe de A par l'application f le sous-ensemble de F noté $f(A)$:

$$\begin{aligned} f(A) &= \{y \in F, \exists x \in A, y = f(x)\} \\ &= \{f(x), x \in A\}. \end{aligned}$$

Exemple 1.18 *Soit*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

et $A = [-2, 1]$.

On a :

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} = \{x^2, x \in [-2, 1]\} = [0, 4].$$

1.5.6 Image réciproque

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et B un sous-ensemble de F.

On définit l'image réciproque de B par l'application f le sous-ensemble de E noté $f^{-1}(B)$:

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}.$$

Exemple 1.19 *Soit*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

et $B = [0, 4]$.

On a

$$\begin{aligned} f^{-1}([0, 4]) &= \{x \in \mathbb{R}, f(x) \in [0, 4]\} = \{x \in \mathbb{R}, x^2 \in [0, 4]\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, 0 \leq x^2 \leq 4\} = \{x \in \mathbb{R}, x^2 - 4 \leq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, (x - 2)(x + 2) \leq 0\} = [-2, 2]. \end{aligned}$$

Propriétés

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Soient A_1, A_2 deux parties de E et B_1, B_2 sont deux parties de F. Alors on a :

1) $A_1 \subset A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$.

2) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

3) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

4) $B_1 \subset B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

5) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

6) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

7) $f^{-1}\left(C_F^{B_1}\right) = C_E^{f^{-1}(B_1)}$.

1.6 Exercices

Exercise 1.20 *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Soient A_1, A_2 deux parties de E. Montrer que :*

1) $A_1 \subset A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$.

2) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

3) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$

Solution.

1) Montrons que

$$A_1 \subset A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subset f(A_2).$$

On suppose que $A_1 \subset A_2$ et on montre que $f(A_1) \subset f(A_2)$.

Soit $y \in f(A_1)$:

$$\begin{aligned} y \in f(A_1) &\Longrightarrow \exists x \in A_1 : y = f(x) \\ &\Longrightarrow \exists x \in A_2 : y = f(x) \text{ car } A_1 \subset A_2 \\ &\Longrightarrow y \in f(A_2). \end{aligned}$$

D'où $f(A_1) \subset f(A_2)$.

2) Montrons que

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2).$$

Soit $y \in f(A_1 \cup A_2)$

$$\begin{aligned}
y \in f(A_1 \cup A_2) &\Longleftrightarrow \exists x \in (A_1 \cup A_2) : y = f(x) \\
&\Longleftrightarrow [\exists x \in A_1 \text{ ou } \exists x \in A_2] : y = f(x) \\
&\Longleftrightarrow [\exists x \in A_1 : \ y = f(x)] \text{ ou } [\exists x \in A_2 : y = f(x)] \\
&\Longleftrightarrow y \in f(A_1) \text{ ou } y \in f(A_2) \\
&\Longleftrightarrow y \in (f(A_1) \cup f(A_2)).
\end{aligned}$$

Alors,

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2).$$

3) Montrons que :

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2).$$

Soit $y \in f(A_1 \cap A_2)$

$$\begin{aligned}
y \in f(A_1 \cap A_2) &\Longrightarrow \exists x \in (A_1 \cap A_2) : y = f(x) \\
&\Longrightarrow [\exists x \in A_1 \text{ et } \exists x \in A_2] : y = f(x) \\
&\Longrightarrow [\exists x \in A_1 : \ y = f(x)] \text{ et } [\exists x \in A_2 : y = f(x)] \\
&\Longrightarrow y \in f(A_1) \text{ et } y \in f(A_2) \\
&\Longrightarrow y \in (f(A_1) \cap f(A_2)).
\end{aligned}$$

Alors,

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2).$$

Supposons que f *est injective et montrons la deuxième inclusion.*

Soit $y \in (f(A_1) \cap f(A_2))$

$$\begin{aligned}
y \in (f(A_1) \cap f(A_2)) &\Longrightarrow y \in f(A_1) \text{ et } y \in f(A_2) \\
&\Longrightarrow \begin{cases} \exists x_1 \in A_1 : \ y = f(x_1) \\ \text{et} \\ \exists x_2 \in A_2 : y = f(x_2) \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $y = f(x_1) = f(x_2)$ *et* f *est injective, ce qui implique que* $x_1 = x_2 = x$. *Donc* $x \in (A_1 \cap A_2)$ *et* $y = f(x)$, *c'est à dire* $y \in f(A_1 \cap A_2)$.

Exercise 1.21 *Soit* $f : E \longrightarrow F$ *une application. Soient* B_1, B_2 *sont deux parties de* F. *Montrer que :*

1) $B_1 \subset B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$. 2) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

3) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f(B_1) \cap f(B_2)$ 4) $f^{-1}\left(C_F^{B_1}\right) = C_E^{f^{-1}(B_1)}$.

Solution.

1) Montrons que :

$$B_1 \subset B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2).$$

On suppose que $B_1 \subset B_2$ *et on montre que* $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

Soit $x \in f^{-1}(B_1)$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1) &\Longrightarrow f(x) \in B_1 \\ &\Longrightarrow f(x) \in B_2 \text{ car } B_1 \subset B_2 \\ &\Longrightarrow x \in f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

Ce qui montre que $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

Alors,

$$B_1 \subset B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2).$$

2) Montrons que :

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$$

Soit $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) &\Longleftrightarrow f(x) \in (B_1 \cup B_2) \\ &\Longleftrightarrow f(x) \in B_1 \text{ou } f(x) \in B_2 \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \text{ ou } x \in f^{-1}(B_2) \\ &\Longleftrightarrow x \in \left[f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)\right]. \end{aligned}$$

Alors,

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$$

3) Montrons que :

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$

Soit $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) &\iff f(x) \in (B_1 \cap B_2) \\ &\iff f(x) \in B_1 et\, f(x) \in B_2 \\ &\iff x \in f^{-1}(B_1) \;\; et\; x \in f^{-1}(B_2) \\ &\iff x \in \left[f^{-1}(B_1) \;\; \cap \;\; f^{-1}(B_2)\right]. \end{aligned}$$

Alors,

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f(B_1) \cap f(B_2).$$

4) Montrons que :

$$f^{-1}\left(C_F^{B_1}\right) = C_E^{f^{-1}(B_1)}.$$

Soit $x \in f^{-1}\left(C_F^{B_1}\right)$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\left(C_F^{B_1}\right) &\Leftrightarrow f(x) \in C_F^{B_1} \\ &\Leftrightarrow f(x) \in F \;\; et\; f(x) \notin B_1 \\ &\Leftrightarrow x \in E \;\; et\; x \notin f^{-1}(B_1) \\ &\Leftrightarrow x \in C_E^{f^{-1}(B_1)}. \end{aligned}$$

Alors,

$$f^{-1}\left(C_F^{B_1}\right) = C_E^{f^{-1}(B_1)}.$$

Exercise 1.22 *On considère l'application*

$$\begin{aligned} f : [-1, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{1}{1 + x^2}. \end{aligned}$$

1) Calculer $f^{-1}(\{2\})$ et $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$.

2) Etudier l'injectivité et la surjectivité de f.

Solution.

$$\begin{array}{rccc} f: & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}. \end{array}$$

1) $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) =?$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\left(\left\{\tfrac{1}{2}\right\}\right) &\Longleftrightarrow x \in [-1,1] \ \text{ et } f(x) = \frac{1}{2} \\ &\Longleftrightarrow x \in [-1,1] \ \text{ et } \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2} \\ &\Longleftrightarrow x \in [-1,1] \ \text{ et } x^2 - 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow x \in [-1,1] \ \text{ et } x = \pm 1 \\ &\Longleftrightarrow x = 1 \ \text{ ou } x = -1. \end{aligned}$$

D'où $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = \{-1,1\}$.

$f^{-1}(\{2\}) =?$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(\{2\}) &\Longleftrightarrow x \in [-1,1] \ \text{ et } f(x) = 2 \\ &\Longleftrightarrow x \in [-1,1] \ \text{ et } \frac{1}{1+x^2} = 2 \\ &\Longleftrightarrow x \in [-1,1] \ \text{ et } x^2 = \frac{-1}{2} \ \text{ impossible.} \end{aligned}$$

D'où $\nexists x \in f^{-1}(\{2\}) \Longrightarrow f^{-1}(\{2\}) = \emptyset$.

2) Injectivité de f?

De la première question, on a $f(1) = f(-1) = \frac{1}{2}$. Donc f n'est pas injective.

Surjectivité de f?

De la première question, $\nexists x \in [-1,1] : f(x) = 2$. Donc f n'est pas surjective.

Exercise 1.23 *Soit f l'application définie par :*

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}$$

1) Calculer $f(\{-1,1\})$ et $f^{-1}(\{-1\})$.

2) f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

3) Donner des intervalles I et J, tels que l'application $f : I \longrightarrow J$ soit bijective.

4) Dans ce cas, déterminer son application réciproque f^{-1}.

Solution.

Soit f l'application définie par :

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}$$

1) Calculons $f(\{-1,1\})$ et $f^{-1}(\{-1\})$.

$$f(\{-1,1\}) = \{f(x)/x \in \{-1,1\}\} = \{f(-1), f(1)\} = \{\frac{1}{2}\}$$

donc, $f(\{-1,1\}) = \{\frac{1}{2}\}$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{-1\}) &= \{x \in \mathbb{R}/f(x) \in \{-1\}\} = \{x \in \mathbb{R}/f(x) = -1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/\frac{1}{1+x^2} = -1\} = \{x \in \mathbb{R}/x^2 = -2\} = \emptyset. \end{aligned}$$

donc, $f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset$.

2) f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

- Injectivité de f :

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)?$$

On a : $f(1) = f(-1) = \frac{1}{2}$, *mais* $1 \neq -1$

donc, f n'est pas injective.

- Surjectivité de f :

$$(\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : y = f(x))?$$

On a : $y = -1$ n'a pas d'antécédent (d'après la question précédente).

donc, f n'est pas surjective.

- Bijectivité de f :

f n'est pas bijective car elle n'est pas surjective.

3) Donnons des intervalles I et J, tels que l'application $f : I \longrightarrow J$ soit bijective :

Résolvons l'équation $y = f(x)$ où $y \in J$ et x à déterminer d'une manière unique dans I.
On a :

$$y = \frac{1}{1+x^2} \quad \Leftrightarrow \quad yx^2 + y - 1 = 0..... (1)$$

$$\Delta = 4(y - y^2) \;\Rightarrow\; \Delta > 0 \Leftrightarrow y \in]0,1[$$

les racines de l'équation (1) *sont*

$$x_1 = \frac{-\sqrt{y(1-y)}}{y} \quad et \quad x_2 = \frac{\sqrt{y(1-y)}}{y}$$

Donc, des intervalles I et J sont : $I =]0,+\infty[$ et $J =]0,1[$. Il est facile de vérifier que

$$f : I =]0,+\infty[\longrightarrow J =]0,1[$$

est une une application bijective.

***Remarque** : on peut aussi considérer la bijection $f : I =]-\infty,0[\longrightarrow J =]0,1[$.*

4) Déterminons, dans ce cas, l'application réciproque f^{-1}.

L'application réciproque de la bijection $f :]-\infty,0[\longrightarrow]0,1[$ est la suivante :

$$\begin{array}{llll} f^{-1}: &]0,1[& \longrightarrow &]-\infty,0[\\ & y & \longmapsto & f^{-1}(y) = \dfrac{-\sqrt{y(1-y)}}{y} \end{array}$$

Exercise 1.24 *On considère les deux applications suivantes :*

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = 3 - 2x \end{array} \qquad \begin{array}{llll} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g(x) = x^2. \end{array}$$

1) f est-elle injective ? surjective ?

2) Calculer $f(\{-4,3\})$, $f(]1,+\infty[)$ et $f^{-1}(]-\infty,0[)$.

3) Déterminer l'application gof et calculer $(gof)(0)$, $(gof)(3)$ et $(gof)^{-1}(\{-1\})$.

4) gof est-elle injective ? surjective ? bijective ?

5) Donner des intervalles I et J, tels que l'application $gof : I \longrightarrow J$ soit bijective. Déterminer, dans ce cas, l'application réciproque $(gof)^{-1}$.

Solution.

On considère les deux applications suivantes :

$$f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & f(x)=3-2x\end{array}\qquad g:\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & g(x)=x^2.\end{array}$$

1) f est-elle injective ? surjective ?

Injectivité de f :

$$(\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}: f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2)?$$

Soient $x_1,x_2\in\mathbb{R}$:on suppose $f(x_1)=f(x_2)$ et on démontre $x_1=x_2$.

On a :

$$\begin{aligned} f(x_1)=f(x_2) &\Longrightarrow 3-2x_1=3-2x_2\\ &\Longrightarrow -2x_1=-2x_2\\ &\Longrightarrow x_1=x_2.\end{aligned}$$

Alors

$$(\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}: f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2).$$

Donc f est injective.

Surjectivité de f :

$$(\forall y\in\mathbb{R},\exists x\in\mathbb{R}: y=f(x))?$$

Soit $y\in\mathbb{R},\exists ?x\in\mathbb{R}: y=f(x)$.

On a :

$$\begin{aligned} y=f(x) &\Longrightarrow y=3-2x\\ &\Longrightarrow x=\frac{3-y}{2}.\end{aligned}$$

Donc

$$\forall y\in\mathbb{R},\exists x=\frac{3-y}{2}\in\mathbb{R}: f(x)=y.$$

D'où f est surjective, on conclut que f est bijective,

2) Calculons $f(\{-4,3\})$, $f(]1,+\infty[)$ et $f^{-1}(]-\infty,0[)$.

On a :

$$\begin{aligned} f(\{-4,3\}) &= \{f(x)/x\in\{-4,3\}\}\\ &= \{f(-4),f(3)\}=\{-3,11\}.\end{aligned}$$

Alors,

$$f(\{-4,3\}) = \{-3,11\}.$$

On a :

$$\begin{aligned} f(]1,\infty[) &= \{f(x)/x \in]1,\infty[\} \\ &=]-\infty,1[\text{ (} \textit{car } f \textit{ est décroissante}). \end{aligned}$$

Alors,

$$f(]1,\infty[) =]-\infty,1[.$$

On a :

$$\begin{aligned} f^{-1}(]-\infty,0[) &= \{x \in \mathbb{R}/ \ \ f(x) \in]-\infty,0[\} = \{x \in \mathbb{R}/ \ \ f(x) < 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/ \ \ 3-2x < 0\} = \{x \in \mathbb{R}/ \ \ x > \frac{3}{2}\} =]\frac{3}{2},+\infty[\end{aligned}$$

Donc,

$$f^{-1}(]-\infty,0[) =]\frac{3}{2},+\infty[.$$

3) Déterminons l'application gof et calculons $(gof)(0)$, $(gof)(3)$ et $(gof)^{-1}(\{-1\})$.

Déterminons l'application gof :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (gof)(x) &= g(f(x)) = (3-2x)^2 \\ &= 4x^2 - 12x + 9. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{array}{rccl} gof : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (gof)(x) = 4x^2 - 12x + 9. \end{array}$$

Calculons $(gof)(0)$, $(gof)(3)$ et $(gof)^{-1}(\{-1\})$:

$$\begin{aligned} (gof)(0) &= 4(0)^2 - 12 \times 0 + 9 &= 9. \\ (gof)(3) &= 4(3)^2 - 12 \times (3) + 9 &= 9. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (gof)^{-1}(\{-1\}) &= \{x \in \mathbb{R}/(gof)(x) \in \{-1\}\} = \{x \in \mathbb{R}/(gof)(x) = -1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/4x^2 - 12x + 9 = -1\} = \{x \in \mathbb{R}/2x^2 - 6x + 5 = 0\} \end{aligned}$$

On a : $\Delta = 36 - 40 = -4 < 0$, *donc l'équation n'admet pas de racine dans* $\mathbb{R}$.

Alors, $(gof)^{-1}(\{-1\}) = \emptyset$.

4) gof *est-elle injective ? surjective ? bijective ?*

Injectivité de gof :

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : gof\,(x_1) = gof\,(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)?$$

On a : $(gof)(0) = (gof)(3) = 9$ *mais* $0 \neq 3$, *donc* gof *n'est pas injective car* $y = 9$ *admet deux antécédents (d'après la question précédente).*

Surjectivité de gof :

$$(\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : y = gof\,(x))?$$

On a : $y = -1$ *n'a pas d'antécédents dans* $\mathbb{R}$ *(d'après la question précédente).*

Donc gof *n'est pas surjective.*

Bijectivité de gof :

gof *n'est pas bijective car elle n'est pas surjective (ou car elle n'est pas injective).*

Donnons des intervalles I *et* J, *tels que l'application* $gof : I \longrightarrow J$ *soit bijective : Résolvons l'équation* $y = (gof)(x)$ *où* $y \in J$ *et* x *à déterminer d'une manière unique dans* I.

On a :

$$y = 4x^2 - 12x + 9 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 - y = 0.....(1)$$

$$\Delta = 144 - 4 \times 4(9 - y) = 16y$$

$$\Delta \geq 0 \quad ssi \quad y \geq 0 \Rightarrow y \in [0, +\infty[$$

les racines de l'équation (1) *sont :*

$$\begin{aligned} x_1 = \frac{12 + \sqrt{16y}}{8} &= \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{y}}{2} \\ et & \\ x_2 = \frac{12 - \sqrt{16y}}{8} &= \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{y}}{2} \end{aligned}$$

Le tableau de variation

Il est facile de vérifier que $gof : I = [\frac{3}{2}, +\infty[\longrightarrow J = [0, +\infty[$ *est une bijection.*

Remarque *: on peut aussi considérer la bijection* $gof : I =]-\infty, \frac{3}{2}] \longrightarrow J =$ $[0, +\infty[$.

Déterminons, dans ce cas, l'application réciproque $(gof)^{-1}$ *: L'application réciproque de la bijection* $gof : I = [\frac{3}{2}, +\infty[\longrightarrow J = [0, +\infty[$ *est la suivante :*

$$\begin{array}{rccl} (gof)^{-1}: & [0, +\infty[& \longrightarrow & [\frac{3}{2}, +\infty[\\ & y & \longmapsto & \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{y}}{2}. \end{array}$$

Remarque *: L'application réciproque de la bijection* $gof : I =]-\infty, \frac{3}{2}] \longrightarrow J =$ $[0, +\infty[$ *est*

$$\begin{array}{rccl} (gof)^{-1}: & [0, +\infty[& \longrightarrow &]-\infty, \frac{3}{2}] \\ & y & \longmapsto & \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{y}}{2}. \end{array}$$

Exercise 1.25 *Considérons l'application* f *définie par :*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} \end{array}$$

1) Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f.

2) Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

Corrigé de l'exercice

Considérons l'application f *définie par :*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} \end{array}$$

1) Étudions l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f.

Injectivité de f :

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)?$$

On a :

$$f(2) = \frac{2 \times 2}{1+2^2} = \frac{4}{5}.$$

et

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

Donc f n'est pas injective car $f(2) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ mais $2 \neq \frac{1}{2}$.

***Surjectivité de** f :*

$$(\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : y = f(x))?$$

f n'est pas surjective car $y = 2$ (par exemple) n'a pas d'antécédent. En effet,

$$\begin{aligned} f(x) = 2 &\iff \frac{2x}{1+x^2} = 2 \\ &\iff 2x = 2(1+x^2) \\ &\iff x^2 - x + 1 = 0 \end{aligned}$$

et l'équation $x^2 - x + 1 = 0$ n'admet pas de solutions réelles.

Bijectivité de f : f n'est pas bijective car elle n'est pas injective (ou bien car elle n'est pas surjective).

2) Montrons que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

On a :
$$\begin{aligned} f(\mathbb{R}) &= \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in \mathbb{R} : y = f(x)\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} / \exists x \in \mathbb{R} : y = \frac{2x}{1+x^2}\right\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in \mathbb{R} : yx^2 - 2x + y = 0\} \end{aligned}$$

$\Delta = 4 - 4y^2$ *donc,* $\Delta \geq 0$ *si* $y \in [-1, 1]$

Alors $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

Exercise 1.26 *Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = x^2 - x$.*

1) f est-elle injective ? f est-elle surjective ?

2) Déterminer $f([-1, 2])$, $f(\mathbb{R})$ et $f^{-1}([0, 1])$.

3) Donner des intervalles I et J, tels que l'application $f : I \to J$, soit bijective. Puis déterminer l'application réciproque f^{-1}.

Solution.

Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = x^2 - x$

1) f est-elle injective ? *f n'est pas injective car $f(0) = 0 = f(1)$ mais $0 \neq 1$.*

*f **est-elle surjective ?***

f n'est pas surjective car si $y=-4$ on aura $x^2-x=-4 \Rightarrow x^2-x+4=0$ n'admet pas de racine dans $\mathbb{R}$ car $\triangle=-15<0$ c'est à dire $y=-4, \nexists x$ dans $\mathbb{R}$ tel que $f(x)=-4$.

***2) Déterminons** $f([-1,2])$, $f(\mathbb{R})$ et $f^{-1}([0,1])$.*

$$f([-1,2])=f\left(\left[-1,\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},2\right]\right)$$

$$=\left[f\left(\frac{1}{2}\right),f(-1)\right]\cup\left[f\left(\frac{1}{2}\right),f(2)\right]=\left[-\frac{1}{4},0\right]\cup\left[-\frac{1}{4},0\right]=\left[-\frac{1}{4},0\right]$$

car f décroissante sur $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$ et f croissante sur $\left[\frac{1}{2},2\right]$.

$f(\mathbb{R})=\left[-\frac{1}{4},+\infty\right[$.

$f^{-1}([0,1])=\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2},0\right]\cup\left[1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ *car $f(x)=0\Rightarrow x=0$ ou $x=1$ et $f(x)=1\Rightarrow x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.*

(Utiliser le tableau de variation de l'application f)

3) Les intervalles** I **et** J**, tels que l'application** $f:I\to J$**, soit bijective.

On prends $I=\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ et $J=\left[-\frac{1}{4},+\infty\right[$. L'application $f:\left[\frac{1}{2},+\infty\right[\to\left[-\frac{1}{4},+\infty\right[$, est bijective.

***4) Déterminons l'application réciproque** f^{-1}.*

Soit $y\in\left[-\frac{1}{4},+\infty\right[$, on calcule x en fonction de y. On a : $y=x^2-x\Rightarrow x^2-x-y=0$, $\triangle=1+4y>0$, (car $y\in\left[-\frac{1}{4},+\infty\right[$). Donc, $x=\frac{1-\sqrt{1+4y}}{2}$. Alors, l'application réciproque f^{-1} est

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \left[-\frac{1}{4},+\infty\right[& \longrightarrow & \left[\frac{1}{2},+\infty\right[\\ & y & \longmapsto & \frac{1-\sqrt{1+4y}}{2}. \end{array}$$