

Corrigés d'exercices de la série N° 02 (Algèbre 1)

Exercice 1:

1) • La forme exponentielle de z_3 :
D'abord, on écrit z_1 et z_2 sous forme exponentielle :

• $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$

1) $|z_1| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

2) $\theta_1 = \arg(z_1) =$

$$\begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{1}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

D'où : $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ --- (1)

• $z_2 = 1 - i$

1) $|z_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

2) $\theta_2 = \arg(z_2) =$

$$\begin{cases} \cos \theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

D'où : $z_2 = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$ --- (2)

De (1) et (2), on obtient :

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2 e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})}$$

$$z_3 = \sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

• La forme trigonométrique de z_3 :

$$z_3 = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right)$$

2) La forme algébrique de z_3 :

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}$$

$$= \frac{(1 + i\sqrt{3})(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)}$$

$$= \frac{1 + i + i\sqrt{3} + i^2\sqrt{3}}{(1 - i^2)}$$

$$= \frac{1 + i + i\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2} \quad \left| \begin{array}{l} i^2 = -1 \end{array} \right.$$

$$z_3 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + i \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

3) $\cos \theta$, $\sin \theta$, ?? ($\theta = \arg(z_3)$)
 $= \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$

On a :

$$z_3 = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right)$$

$$= \sqrt{2} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i \sqrt{2} \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) \quad (3)$$

et

$$z_3 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + i \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \quad (4)$$

On compare (3) et (4), on trouve :

$$\begin{cases} \sqrt{2} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{2} \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{(1 - \sqrt{3})\sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{(1 + \sqrt{3})\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

$$4) z_3^{20} = ??$$

$$\text{On a : } z_3 = \sqrt{2} e^{i \frac{7\pi}{12}}, \text{ donc :}$$

$$\begin{aligned} z_3^{20} &= \left(\sqrt{2} e^{i \frac{7\pi}{12}} \right)^{20} \\ &= \left(\sqrt{2} \right)^{20} \cdot \left(e^{i \frac{7 \times 20 \pi}{12}} \right) \\ &= 2^{10} \cdot e^{i \frac{140\pi}{12}} \end{aligned}$$

Maintenant, on cherche l'argument principale de z_3^{20} , on a :

$$\begin{aligned} \frac{140\pi}{12} &= \frac{140\pi + 4\pi - 4\pi}{12} \\ &= \frac{144\pi - 4\pi}{12} \\ &= \frac{144\pi}{12} - \frac{4\pi}{12} \\ &= 12\pi - \frac{\pi}{3} \\ &= -\frac{\pi}{3} + 2 \times 6\pi \\ &= -\frac{\pi}{3} + 2k\pi / k=6 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} z_3^{20} &= 2^{10} \cdot e^{-i \frac{\pi}{3}} \\ &= 2^{10} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) \\ &= 2^{10} \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= 1024 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{z_3^{20} = 512 - i 512\sqrt{3}}$$

Exercice 2 :

$$1) P(i\sqrt{3}) \text{ et } P(-i\sqrt{3}) =$$

$$\begin{aligned} \bullet P(i\sqrt{3}) &= (i\sqrt{3})^4 - 6(i\sqrt{3})^3 + 24(i\sqrt{3})^2 \\ &\quad - 18(i\sqrt{3}) + 63 \\ &= i^4 (\sqrt{3})^4 - 6i^3 (\sqrt{3})^3 + 24i^2 (\sqrt{3})^2 \\ &\quad - 18i\sqrt{3} + 63 \\ &= 9 + 18i\sqrt{3} - 72 - 18i\sqrt{3} + 63 \\ &= 72 - 72 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet P(-i\sqrt{3}) &= (-i\sqrt{3})^4 - 6(-i\sqrt{3})^3 \\ &\quad + 24(-i\sqrt{3})^2 - 18(-i\sqrt{3}) + 63 \\ &= 9 - 18i\sqrt{3} - 72 + 18i\sqrt{3} + 63 \\ &= 72 - 72 = 0 \end{aligned}$$

Comme $P(i\sqrt{3}) = 0$ et $P(-i\sqrt{3}) = 0$, alors les complexes $i\sqrt{3}$ et $-i\sqrt{3}$ (qui sont des imaginaires purs) sont des solutions du polynôme P .

De plus, il existe un polynôme Q du même degré tq :

$$\begin{aligned} P(z) &= (z - i\sqrt{3})(z + i\sqrt{3}) Q(z) \\ &= (z^2 - (i\sqrt{3})^2) Q(z) \\ &= (z^2 + 3) Q(z) \end{aligned}$$

2) On détermine le polynôme Q :
Pour trouver Q , on effectue la division euclidienne :