c-à-d : $Q(z) = \dfrac{P(z)}{z^2+3}$

$$\begin{array}{r|l} \overbrace{z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63}^{P(z)} & z^2 + 3 \\ \hline -\quad \cancel{z^4} \qquad\quad 3z^2 \qquad\qquad\qquad & \underbrace{z^2 - 6z + 21}_{Q(z)} \\ 0 - 6\cancel{z^3} + 21z^2 - 18\cancel{z} + 63 & \\ -\quad -6\cancel{z^3} \qquad\quad -18z \qquad & \\ \hline 0 \quad 21\cancel{z^2} + 0 + \cancel{63} & \\ -\quad 21\cancel{z^2} \qquad\quad + \cancel{63} & \\ \hline 0 \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

D'où :

$$\boxed{P(z) = (z^2+3)(z^2 - 6z + 21)}$$

3) $P(z) = 0$??

on a : $P(z) = (z^2+3)(z^2-6z+21)$

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 + 3 = 0 \\ \text{ou} \\ z^2 - 6z + 21 = 0 \end{cases}$$

- $z^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow (z - i\sqrt{3})(z + i\sqrt{3}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z - i\sqrt{3} = 0 \\ \text{ou} \\ z + i\sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = i\sqrt{3} \\ \text{ou} \\ z = -i\sqrt{3} \end{cases}$$

- $z^2 - 6z + 21 = 0 \;\text{---}\; (*)$

on calcule le discriminant Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(21)$$
$$= 36 - 84$$
$$= -48 = 48i^2$$

donc l'équation $(*)$ admet deux solutions complexes conjuguées (car $\Delta < 0$) :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 - \sqrt{48i^2}}{2}$$
$$= \frac{6 - \sqrt{16 \times 3\, i^2}}{2}$$
$$= \frac{6 - 4\sqrt{3}\,i}{2} = 3 - 2\sqrt{3}\,i$$

$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 + \sqrt{48i^2}}{2} = 3 + 2\sqrt{3}\,i$$

$$(z_1 = \overline{z_2} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1})$$

D'où :

$$\boxed{S = \{i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}, 3 - 2\sqrt{3}\,i, 3 + 2\sqrt{3}\,i\}}$$

Exercice 3 :

1) on remplace 2 dans (1), on obtient :

$$2^3 - (3+i)2^2 - (2+5i)2 + 8 + 14i$$
$$= 8 - (3+i)4 - (2+5i)2 + 8 + 14i$$
$$= 8 - 12 - 4i - 4 - 10i + 8 + 14i$$
$$= 16 - 16 - 14i + 14i$$
$$= 0$$

D'où : 2 est une solution réelle de l'équation (1).

2) On détermine a, b et c :

On a :

$$(z-2)(az^2 + bz + c)$$
$$= az^3 + bz^2 + cz - 2az^2 - 2bz - 2c$$
$$= az^3 + (b-2a)z^2 + (c-2b)z - 2c$$

$\downarrow$ --- $(**)$

Par identification entre (1) et (**), on obtient :

$$\begin{cases} a = 1 & \text{--- (1)} \\ b - 2a = -3 - i & \text{---- (2)} \\ c - 2b = -2 - 5i & \text{--- (3)} \\ -2c = 8 + 14i & \text{... (4)} \end{cases}$$

De (1), on a : $\boxed{a = 1}$

De (4), on a : $\boxed{c = -4 - 7i}$ --- (5)

on remplace (5) dans (3), on trouve : $\boxed{b = -1 - i}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 - i \\ c = -4 - 7i \end{cases}$$

D'où :

$$\boxed{\begin{aligned} &Z^3 - (3+i)Z^2 - (2+5i)Z + 8 + 14i \\ &= (Z-2)\left(Z^2 - (1+i)Z - 4 - 7i\right) \end{aligned}}$$

3) Les solutions de (1) :

On a :

$$Z^3 - (3+i)Z^2 - (2+5i)Z + 8 + 14i = 0$$

$$\Leftrightarrow (Z-2)\left(Z^2 - (1+i)Z - 4 - 7i\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Z - 2 = 0 \\ \text{ou} \\ Z^2 - (1+i)Z - 4 - 7i = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Z = 2 \\ \text{ou} \\ Z^2 - (1+i)Z - 4 - 7i = 0 \end{cases}$$

On remarque que l'équation

$$Z^2 - (1+i)Z - 4 - 7i = 0 \text{ ---} (*)$$

est une équation du 2ème degré à coefficients complexes. ($a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{C}$), donc :

On calcule le discriminant Δ de cette équation :

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-(1+i)\right)^2 - 4(1)(-4-7i)$$

$$= \cancel{1} - \cancel{1} + 2i + 16 + 28i$$

$$= 16 + 30i = \delta^2$$ (δ racine carrée de Δ)

On pose : $\delta = x + iy$, donc :

$$\Delta = \delta^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\Leftrightarrow 16 + 30i = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 16 & \text{--- (1)} \\ 2xy = 30 & \text{--- (2)} \\ x^2 + y^2 = 34 & \text{--- (3)} \end{cases}$$

$(1) + (3) \Rightarrow 2x^2 = 50 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow \boxed{x = \pm 5}$

$(3) - (1) \Rightarrow 2y^2 = 18 \Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow \boxed{y = \pm 3}$

Maintenant, d'après (2), les réels x et y sont de même signe, donc

$\delta = 5 + 3i$ <u>ou</u> $\delta = -5 - 3i$

les solution de (*) sont :

$$Z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{1+i-5-3i}{2} = -2 - i$$

$$Z_2 = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{1+i+5+3i}{2} = 3 + 2i$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation (1) est :

$$S = \{2, -2-i, 3+2i\}.$$

Fin