Université A/ Mira de Béjaia — Octobre 2016
Faculté de Technologie
Département de Technologie
$1^{ère}$ année ST

Série de TD n° 02 de Maths 1 : Ensembles et Relations binaires

Exercice 1.

1. Soit $A = B = \{1, 2\}$. Donner tous les sous-ensembles de $A \times B$;
2. On considère les ensembles $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{(i, j) \in E^2/i < j\}$,
$B = \{(i, j) \in E^2/i = j\}$ et $C = \{(i, j) \in E^2/i > j\}$.
   a) Représenter A, B et C par un dessin ;
   b) Montrer que A, B et C forment une partition de $E \times E$.

Exercice 2. Soient A, B et C des parties d'un ensemble E. Montrer que
1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
2) $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$;
3) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;
4) $A \cap (B - C) = (A \cap B) \cap (A - C)$;

Exercice 3.

1. On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation binaire $\mathcal{T}$ par

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2 : (a, b)\mathcal{T}(c, d) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2.$$

   a. Montrer que $\mathcal{T}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$;
   b. Donner la classe d'équivalence de (0, 1).

2. On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xe^y = ye^x.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. On définit sur $]1, +\infty[$, la relation $\mathcal{S}$ par

$$\forall x, y \in]1, +\infty[: x\mathcal{S}y \Leftrightarrow \frac{x}{1 + x^2} \geq \frac{y}{1 + y^2}.$$

Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre sur $]1, +\infty[$. Cet ordre est-il total ?

Université A.Mira de Béjaïa
Faculté de Technologie
Département de Technologie
1ère année ST

Octobre 2016

Corrigé de la série de TD n°02 de Maths 1

Exercice n°01 : $A = B = \{1, 2\}$

1) $A \times B = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$

2) $E = \{1,2,3,4\}$, $A = \{(i,j) \in E^2 / i < j\}$

$B = \{(i,j) \in E^2 / i = j\}$ et $C = \{(i,j) \in E^2 / i > j\}$

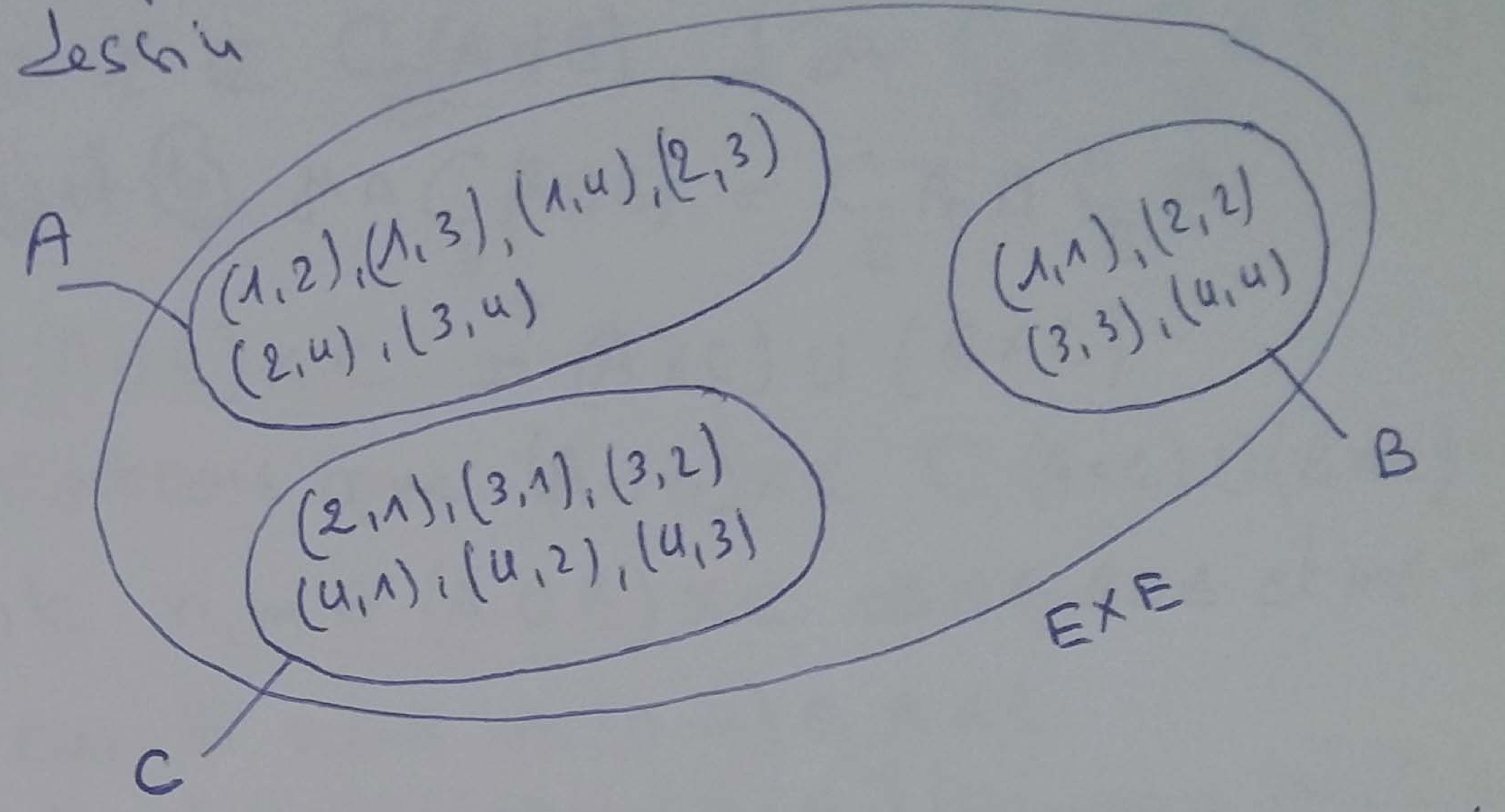
On a : $E^2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4)$
$(2,1), (2,2), (2,3), (2,4)$
$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4)$
$(4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}$

$A = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$

$B = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$

$C = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$

a) Représentation de A, B et C par un dessin



b) On a : $A \cap B = \phi$, $A \cap C = \phi$ et $B \cap C = \phi$
(voir le dessin ci-dessus).
et $A \cup B \cup C = E \times E$, donc
A, B et C forment une partition de $E \times E$.

1) $A\cap(B\cup C) \stackrel{?}{=} (A\cap B)\cup(A\cap C)$

a) Montrons que $A\cap(B\cup C) \subset (A\cap B)\cup(A\cap C)$

Soit $x\in A\cap(B\cap C) \Rightarrow x\in A$ et $x\in(B\cup C)$

1ère Cas si $x\in B \Rightarrow x\in A\cap B$

En utilisant la remarque suivante

« Soit A un sous-ensemble de E.

Si $x\in A$, il est clair que $x\in A\cup \boxed{\text{ens qlcq}}$

et si $x\notin A$, il est clair que $x\notin A\cap \boxed{\text{ens qlcq}}$

Pour le 1ère cas

$x\in A\cap B\cup \boxed{\text{ensemble quelconque}}$

pour cet ensemble on prend $\boxed{A\cap C}$

donc $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

2ème Cas si $x\in C \Rightarrow x\in A\cap C$

alors $x\in A\cap C\cup \boxed{\text{Ens qlcq}}$

donc on peut prendre comme

Ensemble quelconque $\boxed{A\cap B}$, alors

$x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$, donc dans

les deux cas $\boxed{A\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup(A\cap C)}$

b) Montrons que $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subset A\cap(B\cup C)$

Soit $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C) \Rightarrow x\in(A\cap B)$ ou

$x\in(A\cap C)$.

1èr cas si $x\in(A\cap B)\Rightarrow x\in A$ et $x\in B$

$\Rightarrow \boxed{x\in B\cup C}$ (voir la remarque précédente)

$\Rightarrow \boxed{x\in A\cap(B\cup C)}$

2ème cas : si $x\in A\cap C \Rightarrow x\in A$ et $x\in C$

$\Rightarrow \boxed{x\in B\cup C}$ (voir la remarque précédente

$\Rightarrow x\in A\cap(B\cup C)$, dans les deux cas

on a $(A\cap B)\cup(A\cap C) \subset A\cap(B\cup C)$

de a et b on a :

$$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$$

On peut démontrer l'égalité

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ directement

par les équivalences :

Soit $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow$

$x \in A$ et $x \in B \cup C$

$\Leftrightarrow (x \in A$ et $x \in B)$ ou $(x \in A$ et $x \in C)$

$\Leftrightarrow x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$

$\Leftrightarrow \boxed{x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)}$.

2) $C_E(A \cup B) \overset{?}{=} C_E A \cap C_E B$.

a) Montrons que $C_E(A \cup B) \subset C_E A \cap C_E B$.

Soit $x \in C_E(A \cup B) \Rightarrow x \in E$ et $x \notin A \cup B$

$\Rightarrow x \in E$ et $x \notin A$ et $x \notin B$.

$\Rightarrow x \in C_E A$ et $x \in C_E B$

d'où $C_E(A \cup B) \subset C_E A \cap C_E B$.

b) Montrons que $C_E A \cap C_E B \subset C_E(A \cup B)$.

Soit $x \in C_E A \cap C_E B \Rightarrow$

$x \in C_E A$ et $x \in C_E B \Rightarrow$

$x \notin A$ et $x \notin B \Rightarrow x \notin A \cup B$

$\Rightarrow x \in C_E(A \cup B)$, d'où $C_E A \cap C_E B \subset C_E(A \cup B)$

de (a) et (b) on a $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$.

3) $(A \cup B) \times C \overset{?}{=} (A \times C) \cup (B \times C)$.

a) Montrons que $(A \cup B) \times C \subset (A \times C) \cup (B \times C)$.

Soit $n, m \in (A \cup B) \times C \Rightarrow n \in A \cup B$ et $m \in C$

1er cas si $n \in A \Rightarrow (n, m) \in A \times C$

$\Rightarrow (n, m) \in (A \times C) \cup \underline{(B \times C)}$ (remarque précédente).

2ème cas : si $n \in B \Rightarrow (n, m) \in B \times C \cup \underline{(A \times C)}$

dans les deux cas

$(A \times B) \times C \subset (A \times C) \cup (B \times C)$.

b) Montrons que $(A\times C)\cup(B\times C) \subset (A\cup B)\times C$

soit $(n,m) \in (A\times C)\cup(B\times C)$.

1ér cas : si $(n,m) \in A\times C \Rightarrow$

$n\in A$ et $m \in C \Rightarrow n \in \underline{A\cup B}$ et $m\in C$

$\Rightarrow (n,m) \in (A\cup B)\times C$

2ème cas si $(n,m) \in B\times C \Rightarrow$

$n \in B$ et $m\in C \Rightarrow n \in B\cup A$ et

$m \in C \Rightarrow (n,m) \in (A\cup B)\times C$

dans les deux cas on a :

$(A\times C)\cup(B\times C) \subset (A\cup B)\times C$

de ⓐ et ⓑ on a : $(A\cup B)\times C = (A\times C)\cup(B\times C)$.

4) $A\cap(B-C) \overset{?}{=} (A\cap B)\cap(A-C)$.

a) Montrons que

$A\cap(B-C) \subset (A\cap B)\cap(A-C)$

soit $x \in A\cap(B-C) \Rightarrow$

$x\in A$ et $x \in B-C$

$\Rightarrow x\in A$, $x\in B$ et $x \notin C$

$\Rightarrow x \in A\cap B$ et $x\notin C$

$\Rightarrow x\in A\cap B$ et $x \in A-C$.

$\Rightarrow x \in (A\cap B)\cap(A-C)$.

b) Montrons que $(A\cap B)\cap(A-C) \subset A\cap(B-C)$

soit $x \in (A\cap B)\cap(A-C) \Rightarrow$

$x\in (A\cap B)$ et $x \in (A-C)$

$\Rightarrow x\in A$, $x\in B$ et $x\notin C$

$\Rightarrow x\in A$ et $x \in B-C$

$\Rightarrow x \in A\cap(B-C)$

de ⓐ et ⓑ on a :

$$\boxed{A\cap(B-C) = (A\cap B)\cap(A-C)}$$

Exercice n°03

a) Soit R la relation suivante :

$\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2 : (a,b) R (c,d) \Longleftrightarrow$
$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

1) Il est clair que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a :
$a^2+b^2 = a^2+b^2 \Rightarrow (a,b) R (a,b)$
$\Rightarrow R$ est réflexive.

2) Soit $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$.
Si $(a,b) R (c,d) \Rightarrow a^2+b^2 = c^2+d^2$
$\Rightarrow c^2+d^2 = a^2+b^2 \Rightarrow (c,d) R (a,b)$
$\Rightarrow R$ est symétrique.

3) Soit $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{R}^2$ si

$$\begin{cases} (a,b) R (c,d) \\ (c,d) R (e,f) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = c^2+d^2 & (1) \\ c^2+d^2 = e^2+f^2 & (2) \end{cases}$$

$(1)+(2) \Rightarrow a^2+b^2 = e^2+f^2 \Rightarrow$
$(a,b) R (e,f)$, donc
R est transitive.

a) Comme R est réflexive, symétrique et transitive, alors elle est d'équivalence

b) $\dot{(0,1)} = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 / (a,b) R (0,1)\}$
$= \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 / a^2+b^2 = 0^2 + 1^2\}$
$= \{(a,b) / a^2+b^2 = 1^2\}$
$= \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 / (a-0)^2 + (b-0)^2 = 1 = R^2\}$

Donc $\dot{(0,1)}$ est donné par l'équation d'un cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $R = 1$.

5

② Soit J la relation suivante :

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x J y \Leftrightarrow x e^y = y e^x$

1) $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $x e^x = x e^x \Rightarrow$ $x J x$, alors J est une relation réflexive.

2) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Si $x J y \Rightarrow x e^y = y e^x$ $\Rightarrow y e^x = x e^y \Rightarrow y J x$, alors J est symétrique.

3) Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{cases} x J y \\ y J z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x e^y = y e^x \\ y e^z = z e^y \end{cases}$$

On a : $x y e^z = x(y e^z) = x(z e^y)$
$= z(x e^y) = z(y e^x) = y z e^x$

Si $y \neq 0$ on obtient $x e^z = z e^x$ donc $x J z$, alors J est transitive.

Pour le cas où $y = 0$, alors $x = 0$ et $z = 0$, donc d'après la réflexivité $\boxed{x J z}$.

Comme J est réflexive, symétrique et transitive alors J est d'équivalence

Exercice n° 04 Soit S la relation suivante

$\forall x, y \in]1, +\infty[, \quad x S y \Leftrightarrow \frac{x}{1+x^2} \geq \frac{y}{1+y^2}$

① Il est clair que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$\frac{x}{1+x^2} \geq \frac{x}{1+x^2}$, donc $\forall x \in]1, +\infty[$

$x S x \Rightarrow S$ est réflexive

② Soient $x, y \in]1, +\infty[$, avec

$\begin{cases} x S y \\ y S x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{1+x^2} \geq \frac{y}{1+y^2} \\ \frac{y}{1+y^2} \geq \frac{x}{1+x^2} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x + xy^2 \geq y + yx^2 & (1) \\ y + x^2 y \geq x + y^2 x & (2) \end{cases}$

$\Rightarrow x + xy^2 \leq y + yx^2 \leq x + xy^2$

d'où $y = x$, alors

S est antisymétrique

③ Soient $x, y, z \in]1, +\infty[$, avec

$\begin{cases} x S y \\ y S z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{1+x^2} \geq \frac{y}{1+y^2} \\ \frac{y}{1+y^2} \geq \frac{z}{1+z^2} \end{cases}$

Comme les quantités sont > 0, alors

$\frac{x}{1+x^2} \geq \frac{z}{1+z^2}$ d'où $x S z$, donc

S est transitive.

Comme S est réflexive, antisymétrique et transitive, alors elle est d'ordre.

$\forall x, y \in]1, +\infty[$ on a soit $x S y$ soit $y S x$, donc ils sont comparables, alors l'ordre est total.