Université A/ Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
1ère année ST

Novembre 2016

Série de TD n° 03 de Maths 1 : Applications

Exercice 1. Soient $f : E \longrightarrow F$ une application ; $A, B \subset E$ et $C, D \subset F$. Montrer que

1) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$;

2) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

3) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$;

4) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Exercice 2. Soit
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x(1-x)$$

a. f est-elle injective ? Est-elle surjective ?

b. Donner les intervalles I et J, tel que la fonction $f : I \longrightarrow J$ soit bijective.

c. Calculer f^{-1}

Exercice 3. Soit
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^2 + x - 2$$

a. Donner la définition de $f^{-1}(\{4\})$. Calculer $f^{-1}(\{4\})$.

b. L'application f est-elle bijective ?

c. Donner la définition de $f([-1,\ 1])$. Calculer $f([-1,\ 1])$.

d Donner la définition de $f^{-1}([-2,\ 4])$. Calculer $f^{-1}([-2,\ 4])$.

Exercice 4. Soient les applications $f : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}_*^+$ et $g : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow]-1,\ 1[$ définies par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$. Donner f^{-1}, g^{-1} puis $(gof)^{-1}$.

Université A/Mira - Béjaïa
Faculté de Technologie
Département ST
1er année ST

Novembre 2016

Corrigé de la série N° 03 de Maths 1

Exo n° 01 : $f : E \longrightarrow F$

$A, B \subset E$, $C, D \subset F$.

① Montrons que $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.

« $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ » [Définition]

Soit $y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A$ tel que $y = f(x)$,

Comme $A \subset B$, alors $x \in B$, donc $f(x) \in f(B)$

d'où $y \in f(B)$.....

② Montrons que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Montrons que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

a) Montrons que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

Soit $y \in f(A \cup B) \Rightarrow \exists x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$.

On distingue deux cas.

1er cas : $x \in A \Rightarrow y = f(x) \in f(A) \subset f(A) \cup f(B)$

$\Rightarrow y \in f(A) \cup f(B)$

2ème cas $x \in B \Rightarrow y = f(x) \in f(B) \subset f(A) \cup f(B)$

Dans les deux cas :

$y \in f(A) \cup f(B)$.

b) Soit $y \in f(A) \cup f(B)$. On distingue deux cas :

1er cas : $y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A \,/\, y = f(x)$

Comme $A \subset A \cup B \Rightarrow x \in A \cup B \mid y = f(x)$

donc $y \in f(A \cup B)$.

2ème cas : $y \in f(B) \Rightarrow \exists x \in B \,/\, y = f(x)$

Comme $B \subset A \cup B \Rightarrow x \in A \cup B \mid y = f(x)$

donc $y \in f(A \cup B)$.

Dans les deux cas : $y \in f(A \cup B)$.

De ⓐ et ⓑ on a :

$$\boxed{f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)}.$$

3) Montrons que

$f(A\cap B) \subset f(A)\cap f(B)$.

soit $y \in f(A\cap B) \Rightarrow \exists x \in A\cap B /$

$y = f(x)$

$\Rightarrow \exists x \in A / y = f(x)$ et $x \in B / y = f(x)$

$\Rightarrow y \in f(A)$ et $y \in f(B)$.

$\Rightarrow y \in f(A)\cap f(B)$.

L'exemple suivant montre que en général $f(A\cap B) \neq f(A)\cap f(B)$.

si $E = \{a, b\}$, $F = \{1\}$ avec $f(a) = f(b) = 1$; si on prend $A = \{a\}$, $B = \{b\}$ on a :

$$\begin{cases} f(A\cap B) = f(\phi) = \phi. \\ f(A)\cap f(B) = \{1\} \end{cases}$$

et $\phi \neq \{1\}$

4) Montrons que $f^{-1}(C\cap D) = f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$.

<< $f^{-1}(C) = \{x \in E / f(x) \in C\}$ $\boxed{\text{Définition}}$

a) Montrons que $f^{-1}(C\cap D) \subset f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$

soit $x \in f^{-1}(C\cap D) \Rightarrow f(x) \in C\cap D$ donc $f(x) \in C$ et $f(x) \in D$, alors $x \in f^{-1}(C)$ et $x \in f^{-1}(D) \Rightarrow x \in f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$ ...

b) Montrons que $f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C\cap D)$.

soit $x \in f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D) \Rightarrow x \in f^{-1}(C)$ et $x \in f^{-1}(D)$

$\Rightarrow f(x) \in C$ et $f(x) \in D$ $\Rightarrow f(x) \in C\cap D$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(C\cap D)$.

de a) et b) on a : $f^{-1}(C\cap D) = f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$.

Exo n° 02

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto -x^2 + x$$

a) Soit $y \in \mathbb{R}$ (fixé). On résout l'equation suivante :

$$x^2 - x + y = 0 \longrightarrow \text{I}$$

une équation de degré 2 avec y comme constante.

$\Delta = 1 - 4y$, on distingue 3 Cas :

1) $\Delta > 0 \Rightarrow 1 - 4y > 0 \Rightarrow y < 1/4$

l'equation I admet deux solutions distinctes.

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{1-4y}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{1-4y}}{2}$$

2) $\Delta = 0 \Rightarrow 1 - 4y = 0 \Rightarrow y = 1/4$, l'équation I admet une solution double

$$x = \frac{1}{2}$$

3) $\Delta < 0 \Rightarrow 1 - 4y < 0 \Rightarrow y > 1/4$, l'equation I n'admet pas de solution.

* La fonction f n'est pas injective car : les reels $(y < 1/4)$ admettent deux antécédents par exemple pour $y = 0$ on a :

$x(1-x) = 0$ possède deux solution

$x_1 = 0$ et $x_2 = 1$

* La fonction f n'est pas surjective, car les réels $y > 1/4$ n'admettent aucun antécédant

ici on remarque que la valeur $\boxed{y = 1/4}$ est particulière car c'est le seul réel qui admet un unique antécédant.

2) La dérivée de f est $f'(x) = (-x^2 + x)' = -2x + 1$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ et $f(1/2) = 1/4$. Le tableau de variation de f est comme suit :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$1/4$	↘	$-\infty$

Pour éviter l'une des racines on prend l'intervalle $]-\infty, \frac{1}{2}]$ ou bien $[\frac{1}{2}, +\infty[$

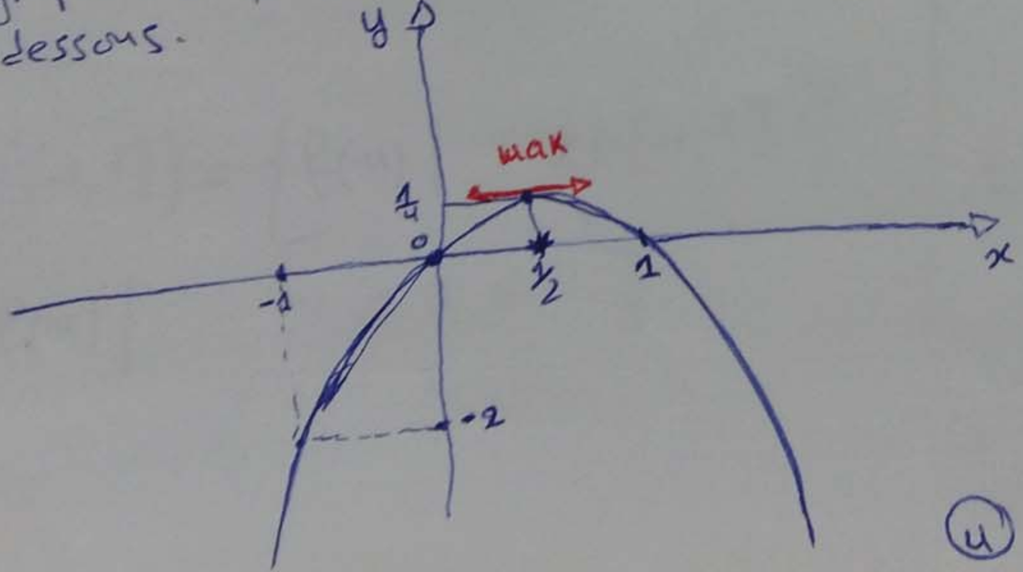
3. Si on prend l'intervalle de l'injectivité $]-\infty \; \frac{1}{2}]$ on trouve.

$$f^{-1}:]-\infty \; \tfrac{1}{4}] \longrightarrow]-\infty \; \tfrac{1}{2}]$$
$$y \longmapsto f^{-1}(y) = \frac{1-\sqrt{1-4y}}{2}.$$

Si on prend l'intervalle de l'injectivité $[\frac{1}{2} \; +\infty[$ on trouve.

$$f^{-1}:]-\infty \; \tfrac{1}{4}) \longrightarrow [\tfrac{1}{2} \; +\infty[$$
$$y \longmapsto f^{-1}(y) = \frac{1+\sqrt{1-4y}}{2}$$

Le graphe de f est donné dans la Figure ci-dessous.



Exo n° 03 :

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2 + x - 2$$

a) $f^{-1}(\{4\}) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) \in \{4\}\}$

$= \{x \in E \text{ tel que } f(x) = 4\}$

$f^{-1}(\{4\}) = \{x \mid x^2 + x - 2 = 4\}$

$\Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$

$\Delta = 1 + 4 \times 1 \times 6 = 25 > 0$

$x_1 = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = \boxed{2}$

$x_2 = \frac{-1-5}{2} = \frac{-6}{2} = \boxed{-3}$

$\Rightarrow f^{-1}(\{4\}) = \{-3, 2\}.$

b) f n'est pas injective car $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} \mid f(x_1) = f(x_2)$, mais $x_1 \neq x_2$.

$f(-3) = f(2) = 4$, mais $2 \neq -3$.

* est ce que f est surjective :

soit $y \in \mathbb{R}$, $\exists ? x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) = y$.

$\Rightarrow x^2 + x - (2 + y) = 0$

$\Delta = 1 - 4 \times [-(2+y)] = 1 + 8 + 4y$

$= 9 + 4y$

si $\Delta < 0$ l'equation n'a pas de solutions, donc si $\boxed{y < -\frac{9}{4}}$

l'equation $f(x) = y$ n'a pas de solutions

alors les $\boxed{y < -\frac{9}{4}}$ n'ont pas d'antécédent

donc f n'est pas surjective, par suite f n'est pas injective.

c) $f([-1,1]) = \{ f(x) \,|\, x \in [-1,1] \}$

$= \{ f(x) \,|\, -1 \leq x \leq 1 \}$

Rq : si f est $\nearrow$ ou $\searrow$ nous allons donner directement $[f(-1), f(1)]$ ou $[f(+1), f(-1)]$, si non on doit voir le tableau de variation de f, alors

$f'(x) = 2x + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{2}}$,

$f(-\frac{1}{2}) = \boxed{-\frac{9}{4}}$. le tableau de variation de f est :

	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	$\boxed{-2}$ $\searrow$	$-\frac{9}{4}$	$\nearrow$ $\boxed{0}$	$\nearrow$ $+\infty$

Min f dans $[-1, 1]$ est bien $-\frac{9}{4}$ alors

$f([-1,1]) = [-\frac{9}{4}, 0]$.

Car f decroissante sur $[-1\ \frac{1}{2}]$ puis croissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$

d) $f^{-1}([-2, 4]) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in [-2, 4]\}$

$\Rightarrow \quad -2 \leq x^2 + x - 2 \leq 4.$

on a : $\quad x^2 + x - 2 \geq -2 \quad \Rightarrow$

$x^2 + x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x(x+1) \geq 0$

alors par le tableau suivant on trouve :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x \in]-\infty \; -1] \cup [0 \quad +\infty[$

$x^2 + x - 2 \leq 4 \quad \Rightarrow x^2 + x - 6 \leq 0$

$\Delta = 1 + 24 = 25 > 0$

$x_1 = \frac{-1+5}{2} = \boxed{2} \; , \; x_2 = \frac{-1-5}{2} = \boxed{-3}$

a été fait déjà.

donc $(x-2)(x+3) \leq 0$ on a le tableau suivant :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-2)(x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x \in [-3 \quad 2]$

donc $f^{-1}([-2 \; 4]) = [-3, -1] \cup [0 \quad 2]$

Exo n° 04

$f : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}_*^+$, $g : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow]-1, 1[$

$x \longmapsto \frac{1}{x}$, $x \longmapsto \frac{x-1}{x+1}$

Comme 0 et -1 sont exclus des domaines de définition, donc f et g sont bien définies.

$f^{-1} : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}_*^+$

$y \longmapsto \frac{1}{y}$

$\begin{cases} y = f(x) \Rightarrow \\ y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y} \end{cases}$

$g^{-1} :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}_*^+$

$y \longmapsto \frac{1+y}{1-y}$

$\begin{cases} y = g(x) \Rightarrow \\ y = \frac{x-1}{x+1} \end{cases}$

$\Rightarrow x - 1 = yx + y$

$\Rightarrow x - yx = 1 + y$

$\Rightarrow x(1-y) = 1 + y$

$\Rightarrow x = \frac{1+y}{1-y}$.

$(g \circ f)^{-1}(y) = f^{-1} \circ g^{-1}(y)$.

$]-1, 1[\xrightarrow{g^{-1}} \mathbb{R}_*^+ \xrightarrow{f^{-1}} \mathbb{R}_*^+$

$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

$f^{-1} \circ g^{-1}(y) = f^{-1}[g^{-1}(y)]$

$= \frac{1}{g^{-1}(y)} = \frac{1}{\frac{1+y}{1-y}} = \frac{1-y}{1+y}$

$= -g^{-1}(y)$

Remarque :

① pour f : on a : $\frac{1}{x} = y$ admet une unique solution $x = \frac{1}{y}$ $\forall y \in \mathbb{R}_*^+$, donc est bijective

② pour g : on a $\frac{x-1}{x+1} = y \Rightarrow x = \frac{1+y}{1-y}$ et une solution unique $\forall y \in]-1, 1[$, alors g est bijective. donc

f^{-1} et g^{-1} existent.

(c'est bien de le présenter avant le calcul de f^{-1} et g^{-1}.)