Université A/ MIRA de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie 1ère année

Année universitaire 2015-2016
MATHS 1

Corrigé de la série de T.D. n° 3

Exercice n° 1. I) (a) Soit $\epsilon > 0$. On a

$$|(7x+2)-9| = 7\,|x-1|\,.$$

Si on choisit $\delta = \dfrac{\epsilon}{7}$, on aura

$$|x-1| < \delta \Longrightarrow |(7x+2)-9| < \epsilon.$$

Ce qui revient à dire que $\lim_{x\to 1}(7x+2) = 9$.
(b) Il s'agit de montrer que $\lim_{x\to 3}(2x-6) = 0$. Soit $\epsilon > 0$. On a

$$|(2x-6)-0| = 2\,|x-3|\,.$$

Si on choisit $\delta = \dfrac{\epsilon}{2}$, on aura

$$|x-3| < \delta \Longrightarrow |(2x-6)-0| < \epsilon.$$

Ce qui revient à dire que $\lim_{x\to 3}(2x-6) = 0$.
II) Calcul des limites suivantes :
(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$; c'est une forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$. On a

$$\begin{aligned}\frac{x\sin x}{1-\cos x} &= \frac{x\sin x\,(1+\cos x)}{1^2-\cos^2 x}\\ &= \frac{x\sin x\,(1+\cos x)}{\sin^2 x}\\ &= \frac{x\,(1+\cos x)}{\sin x}.\end{aligned}$$

Finalement, $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\sin x}{1-\cos x} = 2$ car $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$ et $\lim_{x\to 0}(1+\cos x) = 2$.
Deuxième méthode : On a

$$\begin{aligned}\sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2},\\ 1-\cos x &= \cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}-(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2})\\ &= 2\sin^2\frac{x}{2}.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{x\sin x}{1-\cos x} &= \frac{2x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}\\ &= \frac{x\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\\ &= \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}=2$$

car $\lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=1$ et $\lim_{x\to 0}2\cos\dfrac{x}{2}=2$.

(b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$; c'est une forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$. On a

$$\begin{aligned}\frac{\tan x-\sin x}{x^3} &= \frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}\\ &= \frac{\sin x-\cos x\sin x}{x^3\cos x}\\ &= \frac{\sin x(1-\cos x)}{x.x^2\cos x}.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}\\ &= \frac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.\frac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}.\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}.$$

(c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-1}-x\right)$; c'est une forme indéterminée $+\infty-\infty$. On a

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+2x-1}-x &= \left(\sqrt{x^2+2x-1}-x\right)\times\frac{\sqrt{x^2+2x-1}+x}{\sqrt{x^2+2x-1}+x}\\ &= \frac{x^2+2x-1-x^2}{\sqrt{x^2+2x-1}+x}\\ &= \frac{x\left(2-\dfrac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+x}.\end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2-\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+1}=1.$$

(d) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x.\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x-\cos x}$, c'est une forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$. On a

$$\begin{aligned}\sin\left(x-\tfrac{\pi}{4}\right) &= \sin x\cos\tfrac{\pi}{4}-\cos x\sin\tfrac{\pi}{4}\\ &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin x-\cos x\right).\end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x.\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x-\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(e) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; on a

$$-1 \leq \sin\frac{1}{\sqrt{x}} \leq +1 \;\; \forall x>0,$$

donc

$$-\sqrt{x} \leq \sin\frac{1}{\sqrt{x}} \leq +\sqrt{x} \;\; \forall x>0,$$

d'où

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\sin\frac{1}{\sqrt{x}} = 0, \text{ car } \lim_{x\to 0^+}\left(-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\sqrt{x} = 0.$$

III) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Considérons la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \alpha+\beta x^2, \text{ si } x\in\left]-1,1\right[, \\ \dfrac{1}{|x|}, \text{ si } x\in\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[. \end{cases}$$

1) Continuité de f sur $\mathbb{R}$:
a) f est continue sur $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ car la fonction $x\longmapsto \alpha+\beta x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $]-1,1[$ et la fonction $x\longmapsto \dfrac{1}{|x|}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, donc en particulier sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.
b) continuité de f en -1 :
On a $f(-1) = \dfrac{1}{|-1|} = 1$.

$$\lim_{\substack{x\to -1\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\>}}\left(\alpha+\beta x^2\right) = \alpha+\beta$$

et

$$\lim_{\substack{x\to -1\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\<}} \frac{1}{|x|} = 1.$$

Donc f est continue en -1 si et seulement si

$$\lim_{\substack{x\to -1\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\<}} f(x) = f(-1),$$

c'est à dire, si et seulement si $\alpha+\beta=1$.
c) continuité de f en 1 :
On a $f(1) = \dfrac{1}{|1|} = 1$.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\>}} \frac{1}{|x|} = 1$$

et

$$\lim_{\substack{x\to 1\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\<}}\left(\alpha+\beta x^2\right) = \alpha+\beta.$$

Donc f est continue en 1 si et seulement si

$$\lim_{\substack{x\to 1\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\<}} f(x) = f(1),$$

c'est à dire, si et seulement si $\alpha+\beta=1$.

Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\alpha+\beta=1$.
2) Dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$:
a) f est dérivable sur $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ car la fonction $x\longmapsto\alpha+\beta x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $]-1,1[$ et la fonction $x\longmapsto\dfrac{1}{|x|}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, donc en particulier sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.
b) Dérivabilité de f en -1 : On impose la condition $\alpha+\beta=1$ car si non f n'est pas continue en -1, donc f n'est pas dérivable en -1.
On a $f(-1)=\dfrac{1}{|-1|}=1$.

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x\to-1\\>}}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} &= \lim_{\substack{x\to-1\\>}}\frac{\alpha+\beta x^2-1}{x+1}\\
&= \lim_{\substack{x\to-1\\>}}\frac{\beta x^2-\beta}{x+1}\\
&= \beta\lim_{\substack{x\to-1\\>}}\frac{x^2-1}{x+1}\\
&= \beta\lim_{\substack{x\to-1\\>}}(x-1)=-2\beta.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x\to-1\\<}}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} &= \lim_{\substack{x\to-1\\<}}\frac{\frac{1}{|x|}-1}{x+1}\\
&= \lim_{\substack{x\to-1\\<}}\frac{1-|x|}{|x|(x+1)}\\
&= \lim_{\substack{x\to-1\\<}}\frac{1+x}{-x(x+1)}\\
&= \lim_{\substack{x\to-1\\<}}\frac{1}{-x}=1.
\end{aligned}$$

Donc f est dérivable en -1 si et seulement si

$$\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ -2\beta=1,\end{cases}$$

c'est à dire, si et seulement si $\alpha=\frac{3}{2}$ et $\beta=-\frac{1}{2}$.
c) Dérivabilité de f en 1 : On impose la condition $\alpha+\beta=1$ car si non f n'est pas continue en 1, donc f n'est pas dérivable en 1.
On a $f(1)=\dfrac{1}{|1|}=1$.

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x\to1\\>}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{\substack{x\to1\\>}}\frac{\frac{1}{|x|}-1}{x-1}\\
&= \lim_{\substack{x\to1\\>}}\frac{1-|x|}{|x|(x-1)}\\
&= \lim_{\substack{x\to1\\>}}\frac{1-x}{x(x-1)}\\
&= \lim_{\substack{x\to-1\\>}}\frac{-1}{x}=-1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x\to1\\<}}\frac{f(x)-f(-1)}{x-1} &= \lim_{\substack{x\to1\\<}}\frac{\alpha+\beta x^2-1}{x-1}\\
&= \lim_{\substack{x\to1\\<}}\frac{\beta x^2-\beta}{x-1}\\
&= \beta\lim_{\substack{x\to1\\<}}\frac{x^2-1}{x-1}\\
&= \beta\lim_{\substack{x\to1\\<}}(x+1)=2\beta.
\end{aligned}$$

Donc f est dérivable en 1 si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha+\beta=1 \\ 2\beta=-1, \end{array}\right.$$

c'est à dire, si et seulement si $\alpha=\frac{3}{2}$ et $\beta=-\frac{1}{2}$.
Conclusion : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\alpha=\frac{3}{2}$ et $\beta=-\frac{1}{2}$. Donc la fonction

$$f(x)=\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\left(3-x^2\right),\ \text{si } |x|<1 \\ \dfrac{1}{|x|},\ \text{si } |x|\geq 1 \end{array}\right.$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 2. I) a. Montrons que $\tan x+\frac{x}{3}=0$ admet une unique solution sur $\left]\frac{3\pi}{4},\pi\right[$.
Posons $F(x)=\tan x+\frac{x}{3}$. On a F est continue sur $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ car c'est la somme de deux fonctions continues sur $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$.
$F\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\tan\frac{3\pi}{4}+\frac{\frac{3\pi}{4}}{3}=-1+\frac{\pi}{4}<0,\ F(\pi)=\tan\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}>0.$
Le T.V.I. implique

$$\exists\, x_0\in\left]\frac{3\pi}{4},\pi\right[: F(x_0)=0,$$

c'est à dire

$$\exists\, x_0\in\left]\frac{3\pi}{4},\pi\right[: \tan x_0+\frac{x_0}{3}=0.$$

Unicité : $F'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{3}>0, \forall x\in\left]\frac{3\pi}{4},\pi\right[$, donc F est strictement croissante sur $\left]\frac{3\pi}{4},\pi\right[$.
Par suite la solution est unique.
b. Montrons que $\ln x-\frac{1}{x}=0$ admet une unique solution sur $]1,2[$.
Posons $F(x)=\ln x-\frac{1}{x}$. On a F est continue sur $[1,2]$ car c'est la somme de deux fonctions continues sur $[1,2]$.
$F(1)=\ln 1-1=-1<0,\ F(2)=\ln 2-\frac{1}{2}=0,19>0.$
Le T.V.I. implique

$$\exists\, x_0\in\,]1,2[\,: F(x_0)=0,$$

c'est à dire

$$\exists\, x_0\in\,]1,2[\,: \ln x_0-\frac{1}{x_0}=0.$$

Unicité : $F'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0, \forall x\in\,]1,2[$, donc F est strictement croissante. Par suite la solution est unique.
c. Montrons que $f(x)=x$ admet au moins une solution sur $[a,b]$. Ici, $f:[a,b]\longrightarrow[a,b]$ est une fonction continue.
Posons $g(x)=f(x)-x,\ x\in[a,b]$. On a g est continue sur $[a,b]$ car c'est la somme de deux fonctions continues sur $[a,b]$.
$g(a)=f(a)-a\geq 0,\ g(b)=f(b)-b\leq 0$ car $a\leq f(x)\leq b,\ \forall x\in[a,b]$.
Le T.V.I. implique

$$\exists\, x_0\in[a,b]: g(x_0)=0,$$

c'est à dire

$$\exists\, x_0\in[a,b]: f(x_0)=x_0.$$

II) Soit $x\in\mathbb{R}$, $E(x)$: est le plus grand entier inférieur ou égal à x. Donc, sur $[0,1]$, on a

$$E(x)=\left\{\begin{array}{l} 0,\ \text{si } x\in[0,1[\,, \\ 1,\ \text{si } x=1. \end{array}\right.$$

Par suite

$$f(x) = E(x) - \frac{1}{2} = \begin{cases} -\frac{1}{2}, \text{ si } x \in [0,1[, \\ \frac{1}{2}, \text{ si } x = 1. \end{cases}$$

f n'est pas continue sur $[0,1]$ car

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\frac{1}{2} \neq f(1) = \frac{1}{2}.$$

Donc le théorème des valeurs intermédiaires ne s'applique pas.

Exercice n° 3.
I) $i) f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2},\ x \in \mathbb{R}^*$. On a

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{2\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

car $\lim_{x\to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1$. Donc la fonction f est prolongeable par continuité en 0. On définit ce prolongement par

$$\begin{aligned} \widetilde{f} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \widetilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2}, \text{ si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, \text{ si } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$ii)$ $g(x) = \frac{1}{x},\ x \in \mathbb{R}^*$. On a $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \pm\infty$, donc la fonction g n'est pas prolongeable par continuité en 0.
II) Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \\ \sin x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On a $D_f = \mathbb{R}$.
1) **a) Continuité de f sur $\mathbb{R}$**
i) f est continue sur $\mathbb{R}^*$ car les fonctions $x \longmapsto \ln(1+x)$ et $x \longmapsto \sin x$ sont continues respectivement sur $]0,+\infty[$ et $]-\infty, 0[$.
ii) Continuité de f en 0 :
On a $f(0) = \ln(1+0) = 0$,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln(1+x) = 0 = f(0)$$

et

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \sin x = 0 = f(0).$$

Donc

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = f(0).$$

Par suite, f est continue en 0.
Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}$.
b) **Dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$**
i) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car les fonctions $x \longmapsto \ln(1+x)$ et $x \longmapsto \sin x$ sont dérivables respectivement sur $]0,+\infty[$ et $]-\infty,0[$.
ii) Dérivabilité de f en 0 :
On a $f(0) = \ln(1+0) = 0$,

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1 = f'_d(0)$$

et

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{\sin x}{x} = 1 = f'_g(0)$$

Donc

$$f'_d(0) = f'_g(0) = 1.$$

Par suite, f est dérivable en 0 et on a $f'(0) = 1$.
Finalement, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\begin{array}{rccl} f' : \mathbb{R} & \longrightarrow & & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) = & \begin{cases} \dfrac{1}{1+x}, \text{ si } x > 0 \\ \cos x, \text{ si } x < 0, \\ 1, \text{ si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

c) Continuité de f' sur $\mathbb{R}$
i) f' est continue sur $\mathbb{R}^*$ car les fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ et $x \longmapsto \cos x$ sont continues respectivement sur $]0,+\infty[$ et $]-\infty,0[$.
ii) Continuité de f' en 0 :
On a $f'(0) = 1$,

$$\lim_{\substack{> \\ x\to -0}} f'(x) = \lim_{\substack{> \\ x\to -0}} \frac{1}{1+x} = 1 = f'(0)$$

et

$$\lim_{\substack{< \\ x\to -0}} f'(x) = \lim_{\substack{< \\ x\to -0}} \cos x = 1 = f'(0).$$

Donc

$$\lim_{\substack{> \\ x\to -0}} f'(x) = \lim_{\substack{< \\ x\to -0}} f'(x) = f'(0).$$

Par suite, f' est continue en 0
Finalement, f' est continue sur $\mathbb{R}$.
2) f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ car f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et f' est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 4. 1) On a $f(x) = (x^2+1)\sin x$
a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$f'(x) = \left(x^2+1\right)\cos x + 2x\sin x.$$

b) **- Première méthode :**
i) la fonction f est continue sur $[0,\pi]$ comme produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $[0,\pi]$.
ii) la fonction f est dérivable sur $]0,\pi[$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $]0,\pi[$.

iii) $f(0) = f(\pi) = 0.$
Donc d'après le théorème de Rolle, $\exists c \in]0, \pi[: f'(c) = 0,$
c'est à dire
$$\exists c \in]0, \pi[: \left(c^2 + 1\right) \cos c + 2c \sin c = 0.$$
D'où le résultat.
- Deuxième méthode :
Soit
$$g(x) = \left(x^2 + 1\right) \cos x + 2x \sin x, \; x \in [0, \pi].$$
i) la fonction g est continue sur $[0, \pi]$ comme produit et somme de fonctions continues sur $[0, \pi]$.
ii) $g(0) = 1, g(\pi) = -\left(\pi^2 + 1\right)$; donc $g(0)\, g(\pi) < 0.$
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists c \in]0, \pi[: g(c) = 0,$
c'est à dire
$$\exists c \in]0, \pi[: \left(c^2 + 1\right) \cos c + 2c \sin c = 0.$$
D'où le résultat.
2) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. En utilisant le théorème de Rolle, démontrons qu'il existe $x \in]0, 1[$ tel que
$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c.$$
Posons
$$h(y) = ay^4 + by^3 + cy^2 - (a + b + c)\, y, \; y \in [0, 1].$$
i) la fonction h est continue sur $[0, 1]$ car c'est une fonction polynomiale.
ii) la fonction h est dérivable sur $]0, 1[$ car c'est une fonction polynomiale.
iii) $h(0) = h(1) = 0.$
Donc d'après le théorème de Rolle, $\exists x \in]0, 1[: f'(x) = 0,$
c'est à dire
$$\exists x \in]0, 1[: 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx - (a + b + c) = 0,$$
ou encore
$$\exists x \in]0, 1[: 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = (a + b + c).$$
3) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $x \longmapsto \ln x$, démontrons que
$$\forall x > 0, \frac{x}{x+1} < \ln(1 + x) < x.$$
Soit $x > 0$, on applique le théorème des acroissements finis à la fonction $k : y \longmapsto \ln y$ sur l'intervalle $[1, 1 + x]$.
On a,
i) la fonction k est continue sur $[1, 1 + x]$,
ii) la fonction k est dérivable sur $]1, 1 + x[$.
Donc, d'après le théorème des acroissements finis,
$\exists c \in]1, 1 + x[: \ln(1 + x) - \ln 1 = (1 + x - 1)\, \frac{1}{c},$
ou encore
$$\exists c \in]1, 1 + x[: \ln(1 + x) = \frac{x}{c}.$$
On a
$$\begin{aligned} c > 1 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{1}{c} < 1 \\ &\Longrightarrow \quad \frac{x}{c} < x \;\text{ car } x > 0. \end{aligned}$$
Donc $\ln(1 + x) < x$ ....(1)

On a aussi

$$\begin{aligned} c < 1 + x &\implies \frac{1}{c} > \frac{1}{1+x} \\ &\implies \frac{x}{c} > \frac{x}{1+x} \text{ car } x > 0. \end{aligned}$$

Donc $\ln(1+x) > \dfrac{x}{1+x}$.........(2).
Finalement, de (1) et (2) on a

$$\forall x > 0, \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

Exercice n° 5. On considère la fonction définie par : $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.
1) Soit $x \in \mathbb{R}$, montrons que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

On raisonne par récurrence, on a pour $n = 0$

$$f^{(\mathbf{0})}(x) = f(x) = \sin x = \sin\left(x + \mathbf{0}\frac{\pi}{2}\right).$$

Pour $n = 1$

$$f^{(\mathbf{1})}(x) = \cos x = \sin x \cos\frac{\pi}{2} + \cos x \sin\frac{\pi}{2} = \sin\left(x + \mathbf{1}\frac{\pi}{2}\right).$$

On suppose que

$$f^{(\mathbf{n})}(x) = \sin\left(x + \mathbf{n}\frac{\pi}{2}\right),$$

montrons que

$$f^{(\mathbf{n+1})}(x) = \sin\left(x + (\mathbf{n+1})\frac{\pi}{2}\right).$$

On a

$$f^{(\mathbf{n+1})}(x) = \left(f^{(\mathbf{n})}\right)'(x) = \cos\left(x + \mathbf{n}\frac{\pi}{2}\right).$$

Or $\cos\theta = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$. Donc

$$f^{(\mathbf{n+1})}(x) = \sin\left(x + \mathbf{n}\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (\mathbf{n+1})\frac{\pi}{2}\right).$$

Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),\ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

2) Calcul de $\left[(x^2+1)\sin x\right]^{(20)}$. Posons $g(x) = x^2 + 1$, on a g et f sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

$$(g.f)^{(20)}(x) = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k . g^{(k)}(x) . f^{(20-k)}(x),\ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

On a pour $x \in \mathbb{R}$

$$g^{(0)}(x) = g(x) = x^2 + 1;\ g^{(1)}(x) = 2x;\ g^{(2)}(x) = 2 \text{ et } g^{(k)}(x) = 0 \quad \forall k \geq 3.$$

$$\begin{cases} f^{(20)}(x) = \sin\left(x + \mathbf{20}\frac{\pi}{2}\right) = \sin(x + 10\pi) = \sin x; \\ f^{(19)}(x) = \sin\left(x + \mathbf{19}\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 10\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x; \\ f^{(18)}(x) = \sin\left(x + \mathbf{18}\frac{\pi}{2}\right) = \sin(x + 9\pi) = \sin(x + \pi) = -\sin x. \end{cases}$$

On a aussi

$$C_{20}^0 = 1, C_{20}^1 = 20 \text{ et } C_{20}^2 = 190.$$

Par suite

$$\begin{aligned}\left[(x^2+1)\sin x\right]^{(20)} &= C_{20}^{0}g^{(0)}(x)\,f^{(20)}(x)+C_{20}^{1}g^{(1)}(x)\,f^{(19)}(x)+C_{20}^{2}g^{(2)}(x)\,f^{(18)}(x)\\ &= (x^2+1)\sin x+20\times 2x\,(-\cos x)-190\times 2\times\sin x\\ &= (x^2+1)\sin x-40x\cos x-380\sin x.\end{aligned}$$

Finalement

$$\left[\left(x^2+1\right)\sin x\right]^{(20)}=\left(x^2-379\right)\sin x-40x\cos x.$$

Exercice n° 6. (a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}$, c'est une forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$. Au voisinage de 0, on a

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right),$$

donc

$$\frac{\sin x-x}{x^3}=-\frac{1}{6}+\frac{o\left(x^3\right)}{x^3}.$$

Par suite,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=-\frac{1}{6}.$$

(b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^3\sin x}$, c'est une forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$. Au voisinage de 0, on a

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+o\left(x^2\right).$$

On déduit que

$$e^{-\frac{x^2}{2}}=1+\frac{-\frac{x^2}{2}}{1!}+\frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2}{2!}+o\left(x^4\right)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o\left(x^4\right).$$

On a aussi au voisinage de 0

$$\sin x=x+o(x),$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right).$$

On déduit que

$$\begin{aligned}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^3\sin x} &= \frac{\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o\left(x^4\right)\right)-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)\right)}{x^3\left(x+o(x)\right)}\\ &= \frac{\frac{x^4}{12}+o\left(x^4\right)}{x^4+o\left(x^4\right)}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^3\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4\left(\frac{1}{12}+\frac{o\left(x^4\right)}{x^4}\right)}{x^4\left(1+\frac{o\left(x^4\right)}{x^4}\right)}=\frac{1}{12}.$$

Exercice n° 7. 1) Au voisinage de 0, on a :

$\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)$

$\sqrt{1+x}=1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}+o\left(x^2\right)$

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o\left(x^3\right).$

En remplaçant dans l'écriture de g, on obtient :

$g\left(x\right) = \left(a+b+1\right)x + \left(-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right)x^2 + \left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{8}b - \frac{1}{6}\right)x^3 + o\left(x^3\right).$

2) Pour $x \neq 0$, on a :

$\dfrac{g\left(x\right)}{x^3} = \left(a+b+1\right)\dfrac{1}{x^2} + \left(-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right)\dfrac{1}{x} + \left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{8}b - \frac{1}{6}\right) + o\left(1\right).$

Pour que $\dfrac{g\left(x\right)}{x^3}$ admette une limite finie lorsque $x \to 0$, il faut que

$$\begin{cases} a+b+1=0 \\ -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = 0 \end{cases}$$

ou encore $a = b = -\frac{1}{2}$.

Dans ce cas $\lim_{x\to 0} \dfrac{g\left(x\right)}{x^3} = \frac{1}{3}a - \frac{1}{8}b - \frac{1}{6} = -\frac{13}{48}$.