Université A/ Mira de Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département d'Informatique
1ère année Licence

Février 2020

Série de TD N°3 d'Algèbre 1

Exercice 1.

a) Sur $\mathbb{Z}$, on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, \quad a \,\mathcal{R}\, b \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } a - b = 2k.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de 1.

b) Sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, on définit la relation binaire $\mathcal{T}$ par :

$$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \quad (x, y) \,\mathcal{T}\, (x', y') \Longleftrightarrow xy' = yx'.$$

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de (1, 2).

Exercice 2.

a) Sur $]1 + \infty[$, on définit la relation binaire $\mathcal{R}_1$ par :

$$\forall x, y \in]1 + \infty[, \quad x \,\mathcal{R}_1\, y \Longleftrightarrow \frac{x}{1+x^2} \geq \frac{y}{1+y^2}.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}_1$ est une relation d'ordre.

b) Sur $\mathbb{R}_+^*$, on définit la relation binaire $\mathcal{R}_2$
par $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, x\mathcal{R}_2 y \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ tel que $y = x^k$.

1. Montrer que $\mathcal{R}_2$ est une relation d'odre
2. $\mathcal{R}_2$ est-elle d'ordre total ?

Université A/Mira - Béjaia
Faculté des sciences exactes
Département d'informatique
1ère année licence à RN

Béjaia le 11/02/2020

Corrigé de la série numéro 03 d'algèbre 01

Exercice n° 01

a) $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $aRb \iff \exists k \in \mathbb{Z} / (a-b) = 2k$

Montrons que R est une relation d'equivalence

1) $\forall a \in \mathbb{Z}$, $a - a = 0 = 2 \times (0)$ avec $0 \in \mathbb{Z}$, alors aRa, donc R est reflexive

2) Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2 /$ aRb, alors $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $a - b = 2k \Rightarrow -(a-b) = -2k \Rightarrow$ donc $(b-a) = 2k'$ avec $k' \in \mathbb{Z}$ $(k' = -k \in \mathbb{Z})$. bRa, alors R est symétrique.

3) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3 /$ aRb et bRc, alors $\exists k_1 \in \mathbb{Z} / a - b = 2k_1$ et $\exists k_2 \in \mathbb{Z} / b - c = 2k_2$

donc $(a - b + b - c) = 2(k_1 + k_2) \Rightarrow a - c = 2k_3$ avec $k_3 = (k_1 + k_2) \in \mathbb{Z}$, alors aRc, donc R est transitive. Comme R est reflexive, symétrique et transitive, alors R est une relation d'equivalence

* Classe d'équivalence de 1.

On a $\overline{1} = \{ b \in \mathbb{Z} / 1 R b \}$

$= \{ b \in \mathbb{Z} / 1 - b = 2k, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \}$

$= \{ b \in \mathbb{Z} / b = 1 - 2k, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \}$

$= \{ 1 - 2k / k \in \mathbb{Z} \}$

$= \{ \dots, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots \}$

b) $\forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, $(x,y) T (x',y') \iff xy' = yx'$

Montrons que T est une relation d'équivalence

1) $\forall (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, on a $xy = yx$ (le produit est commutatif), alors $(x,y) T (x,y)$, donc R est reflexive

2) Soient $(x,y), (x',y') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / (x,y) T (x',y')$, alors

$xy' = yx' \Rightarrow y'x = x'y \Rightarrow x'y = y'x$

car $=$ est commutative et $\times$ est commutatif, donc

Comme $x'y = y'x \Rightarrow (x',y') T (x,y)$, alors

T est symétrique.

3) Soient $(x,y), (x',y'), (x'',y'') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* /$

$\begin{cases} (x,y) T (x',y') \\ (x',y') T (x'',y'') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy' = yx' & ① \times y'' \\ x'y'' = y'x'' & ② \times y \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} xy' \cdot y'' = yx'y'' \\ x'y'' \cdot y = y'x''y \end{cases} \Rightarrow xy'y'' = y'x''y \Rightarrow y'xy'' = y'x''y$

Comme $y \in \mathbb{Z}^*$, $y' \in \mathbb{Z}^*$, $y'' \in \mathbb{Z}^*$, alors $y' \neq 0$ donc $xy'' = x''y$ alors $(x, y) T (x'', y'')$ donc T est transitive.

Comme T est Reflexive, symétrique et transitive, alors T est une relation d'equivalence

* Classe d'equivalence de $(1, 2)$

$$\overline{(1,2)} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* / (1,2) T (x,y)\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* / 1 \cdot y = x \cdot 2\} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* / y = 2x\}$$

$$= \{(x, 2x) / x \in \mathbb{Z}^*\}$$

Exercice n° 2 (Montrons que $R_\wedge$ est une relation d'ordre)

a) $\forall x, y \in]1, +\infty[, \; x R_\wedge y \Leftrightarrow \frac{x}{1+x^2} \geq \frac{y}{1+y^2}$

1) $\forall x \in]1, +\infty[$, on a : $\frac{x}{1+x^2} \geq \frac{x}{1+x^2}$, alors $x R_\wedge x$, donc $R_\wedge$ est reflexive.

2) Soient $x, y \in]1, +\infty[\; / \; x R_\wedge y$ et $y R_\wedge x$, alors

$$\begin{cases} \frac{x}{1+x^2} \geq \frac{y}{1+y^2} \\ \frac{y}{1+y^2} \geq \frac{x}{1+x^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{1+x^2} = \frac{y}{1+y^2}$$

$$\Rightarrow x(1+y^2) = (1+x^2)y \Rightarrow x + xy^2 = y + x^2y$$

$$\Rightarrow xy^2 = x^2y \Rightarrow \cancel{x}y \cdot \cancel{y} = \cancel{x} \cdot x\cancel{y}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = y} \text{ car } \boxed{x \neq 0}, \boxed{y \neq 0}.$$

donc $R_\wedge$ est antisymétrique.

3) Soient $x, y, z \in]1, +\infty[\; /$

$$\begin{matrix} x R_\wedge y \\ y R_\wedge z \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{1+x^2} \geq \frac{y}{1+y^2} \\ y/_{1+y^2} \geq z/_{1+z^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{1+x^2} \geq \frac{z}{1+z^2}$$

$\Rightarrow x R_\wedge z$, donc $R_\wedge$ est transitive. Comme $R_\wedge$ est reflexive, antisymétrique et transitive, alors $R_\wedge$ est une relation d'ordre.

b) $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $x R_2 y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \,/\, y = x^k$

Montrons que R_2 est une relation d'ordre

1) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x = x^1$, donc $\exists k \in \mathbb{N}$ $(k=1)$ $/$ $x = x^k$, alors $x R_2 x$, donc R_2 est reflexive

2) $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$ si $x R_2 y$ et $y R_2 x$, alors $\exists k_1 \in \mathbb{N} \,/\, y = x^{k_1}$ ① et $\exists k_2 \in \mathbb{N} \,/\, x = y^{k_2}$ ②

alors si on remplace x par sa valeur $(x = y^{k_2})$ dans ①, on trouve $y = (y^{k_2})^{k_1} = y^{k_1 \cdot k_2}$ avec $y \in \mathbb{R}_+^*$

alors $k_1 \cdot k_2 = 1$ comme $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, alors les seules valeurs vérifiants $k_1 k_2 = 1$ est bien $k_1 = 1$ et $k_2 = 1$. donc $x = y$, alors R_2 ~~est~~ antisymétrique

3) Soient $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ $/$ $x R_2 y$ et $y R_2 z$

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists k_1 \in \mathbb{N} \,/\, y = x^{k_1} & ① \\ \exists k_2 \in \mathbb{N} \,/\, z = y^{k_2} & ② \end{cases}$$

de ① et ② on trouve que $z = (x^{k_1})^{k_2} = x^{k_1 \cdot k_2}$, alors $\exists k_3 \in \mathbb{N}$ $(k_3 = k_1 \times k_2)$ telque $z = x^{k_3}$, donc $x R_2 z$, alors R_2 est transitive

Comme R_2 est reflexive, antisymétrique et transitive, alors R_2 est d'ordre.

* Pour que R_2 est d'ordre total, il faut que deux éléments quelconques de $\mathbb{R}_+^*$ soient comparables c'est-à-dire

$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$ on a $(x R_2 y$ ou $y R_2 x)$

On a : $(2, 5) \in \mathbb{R}_+^*$, mais $2 \neq 5^k$ $(k \in \mathbb{N})$

et $5 \neq 2^k$ $(k \in \mathbb{N})$.

Comme il n'existe pas d'entier $k \in \mathbb{N} \mid$

$(2 = 5^k)$ ou $(5 = 2^k)$, alors

$2 \not{R}_2 5$ et $5 \not{R}_2 2$

2 n'est pas en relation avec 5

5 n'est pas en relation avec 2

alors 5 et 2 sont incomparables

donc l'ordre est partiel.