Université A/ Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
$1^{ère}$ année ST

Année universitaire 2020-2021
Décembre 2020

Série de TD n° 01 de Maths 1 : Logique et raisonnements

Exercice 1.

a) Donner les négations des assertions suivantes où P, Q et R sont des propositions.

1. $P \vee (Q \wedge R)$.
2. $P \Rightarrow (Q \wedge R)$.
3. (136 multiple de 17) $\wedge$ (2 divise 167).
4. $(P \wedge Q) \Leftrightarrow \overline{R}$.
5. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \geq 0$

b) Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Donner leurs négations.

1. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x + 1 < 0$.
2. $\forall n \in \mathbb{N} : (n < 2) \Rightarrow (n^2 = n)$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x^2 < y$.
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x^2 < y$.
5. (11 est premier) et (3 est diviseur de 10).

Exercice 2.

a) Montrer par contraposition que :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$: si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.
2. $\forall x, y \in \mathbb{R} : (xy - 1)(x - y) \neq 0 \Rightarrow x(y^2 + y + 1) \neq y(x^2 + x + 1)$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x \neq 11$ et $y \neq -10) \Rightarrow xy + 10x - 11y - 10 \neq 100$.

b) Montrer par l'absurde que :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \neq y \Rightarrow (x + 1)(y - 1) \neq (x - 1)(y + 1)$.
2. $\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad \sqrt{9 + x^5} \neq 3 + \frac{x^5}{6}$.
3. $\forall a, b \geq 0, \frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Rightarrow a = b$.

Exercice 3.
Montrer par récurrence que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, (1 + x)^n \geq 1 + nx$, où x est un réel.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17.
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$

Université A/ Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
$1^{ère}$ année ST

Année universitaire 2020-2021
Décembre 2020

Corrigé de la série de TD n° 01 de Maths 1 : **Logique et raisonnements**

Exercice 1.

a) Donnons les négations des assertions suivantes où P, Q et R sont des propositions.

1. $\overline{P \vee (Q \wedge R)} \Longleftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{(Q \wedge R)}$.
$\Longleftrightarrow \overline{P} \wedge (\overline{Q} \vee \overline{R})$.
2. $\overline{P \Rightarrow (Q \wedge R)} \Longleftrightarrow \overline{\overline{P} \vee (Q \wedge R)}$.(car $(P \Rightarrow (Q \wedge R)) \Longleftrightarrow \big(\overline{P} \vee (Q \wedge R)\big)$
$\Longleftrightarrow \overline{\overline{P}} \wedge \overline{(Q \wedge R)}$.
$\Longleftrightarrow P \wedge (\overline{Q} \vee \overline{R})$.
3. $\overline{(136 \text{ multiple de } 17) \wedge (2 \text{ divise } 167)} \Longleftrightarrow \overline{(136 \text{ multiple de } 17)} \vee \overline{(2 \text{ divise } 167)}$.
$\Longleftrightarrow$ (136 n'est pas multiple de 17) $\vee$ (2 ne divise pas 167).
4. $\overline{(P \wedge Q) \Leftrightarrow \overline{R}} \Longleftrightarrow \overline{[(P \wedge Q) \Rightarrow \overline{R}] \wedge [\overline{R} \Rightarrow (P \wedge Q)]}$
$\Longleftrightarrow \overline{[(P \wedge Q) \Longrightarrow \overline{R}]} \vee \overline{[\overline{R} \Longrightarrow (P \wedge Q)]}$
$\Longleftrightarrow \overline{[\overline{(P \wedge Q)} \vee \overline{R}]} \vee \overline{[\overline{\overline{R}} \vee (P \wedge Q)]}$
$\Longleftrightarrow [\overline{\overline{(P \wedge Q)}} \wedge \overline{\overline{R}}] \vee [\overline{\overline{\overline{R}}} \wedge \overline{(P \wedge Q)}]$
$\Longleftrightarrow [(P \wedge Q) \wedge R] \vee [\overline{R} \wedge (\overline{P} \vee \overline{Q}]$
5. $\overline{\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \geq 0} \Longleftrightarrow \overline{\forall x \in \mathbb{R}} : \overline{x^2 - 1 \geq 0}$.
$\Longleftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 < 0$.

b) Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Donner leurs négations.

1. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x + 1 < 0$ "Fausse". On a $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Négation $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x + 1 \geq 0$
2. $\forall n \in \mathbb{N} : (n < 2) \Rightarrow (n^2 = n)$ "Vraie". Si $(n < 2)$ donc $n = 0$ ou $n = 1$ et on a : $0^2 = 0$ et $1^2 = 1$.
Négation $\exists n \in \mathbb{N} : (n < 2) \wedge (n^2 \neq n)$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x^2 < y$ "Vraie".
$\exists y = x^2 + 1$ on a : $x^2 - y = x^2 - x^2 - 1 = -1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Donc $x^2 - y < 0$ ou $x^2 < y, \forall x \in \mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y = x^2 + 1 \in \mathbb{R} : x^2 < y$.
Négation $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x^2 \geq y$
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x^2 < y$. "Fausse"
Prenons n'importe quel x dans $\mathbb{R}$, on a toujours $x^2 > 0$, et par concéquent,
l'assertion : $x^2 < y, \forall y \in \mathbb{R}$ est fausse car il suffit de considérer un y qui est négatif.
donc $\nexists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x^2 < y$. **Négation**
$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x^2 \geq y$.

5. (11 est premier) et (3 est diviseur de 10) "Fausse". Parce que : (3 est diviseur de 10) est fausse.
   Négation (11 n'est pas premier) ou (3 n'est pas diviseur de 10).

Exercice 2.

a) Montrons par contraposition que :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$: si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.
   Il s'agit de montrer que :

$$n \quad \text{est impair} \quad \Longrightarrow \quad (n^2 - 1) \quad \text{est divisible par} \;\; 8$$

   .
   On suppose que n est impair et on montre que $(n^2 - 1)$ est divisible par 8.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n \quad \text{est impair} \Longrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k + 1$$

   .
   - **Si k est pair alors** : $k = 2l$ et $n = 4l + 1; l \in \mathbb{N}$
     Donc $n^2 - 1 = 16l^2 + 8l = 8(2l^2 + l)$ et on déduit que $n^2 - 1$ est divisible par 8.
   - **Si k est impair alors** : $k = 2l + 1$ et $n = 4l + 3; l \in \mathbb{N}$
     Donc $n^2 - 1 = 16l^2 + 24l + 8 = 8(2l^2 + 3l + 1)$ et on déduit que $n^2 - 1$ est divisible par 8.
     Fianlement, par le principe de contraposition, on a démontré la proposition

$$n \in \mathbb{N}^* : \;\; \text{si} n^2 - 1 \;\; \text{n'est pas divisible par} 8, \;\; \text{alors n est pair}$$

2. $\forall x, y \in \mathbb{R} : (xy - 1)(x - y) \neq 0 \Rightarrow x(y^2 + y - 1) \neq y(x^2 + x - 1)$.
   Il s'agit de montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x(y^2 + y - 1) = y(x^2 + x - 1) \Rightarrow (xy - 1)(x - y) = 0$$

   .
   On suppose que $x(y^2 + y - 1) = y(x^2 + x - 1)$ et on montre que $(xy - 1)(x - y) = 0$.
   Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} x(y^2 + y + 1) = y(x^2 + x + 1) &\Longrightarrow xy^2 + xy + x - x^2y - xy - y = 0 \\ &\Longrightarrow xy(y - x) - (y - x) = 0 \\ &\Longrightarrow (xy - 1)(y - x) = 0 \\ &\Longrightarrow (xy - 1)(x - y) = 0 \end{aligned}$$

3. $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x \neq 11$ et $y \neq 10) \Rightarrow xy + 10x - 11y - 10 \neq 100$.
   Il s'agit de montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : xy + 10x - 11y - 10 = 100 \Rightarrow (x = 11 ou y = -10)$$

   .
   On suppose que $xy + 10x - 11y - 10 = 100$ et on montre que $(x = 11$ ou $y = -10)$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} xy + 10x - 11y - 10 = 100 &\Longrightarrow xy + 10x - 11y - 110 = 0 \\ &\Longrightarrow x(y+10) - 11(y+10) = 0 \\ &\Longrightarrow (y+10)(x-11) = 0 \\ &\Longrightarrow (y+10=0) \text{ ou } (x-11) = 0 \\ &\Longrightarrow (y=-10) \text{ ou } (x) = 11 \end{aligned}$$

b) Montrons par l'absurde que :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$
   La proposition est sous forme d'une implication $P \Rightarrow Q$ avec,
   $P : x \neq y$
   $Q : (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$
   Comme la négation de $P \Rightarrow Q$ est $P \wedge \overline{Q}$,
   donc la négation de $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$ est :
   $\exists x, y \in \mathbb{R} : x \neq y \wedge (x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)$.
   Démontrons cette nouvelle proposition.
   On a :

   $$\begin{aligned} (x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) &\Rightarrow xy - x + y - 1 = xy + x - y - 1 \\ &\Rightarrow xy - x + y - 1 - xy - x + y + 1 = 0 \\ &\Rightarrow -2x + 2y = 0 \\ &\Rightarrow 2y = 2x \\ &\Rightarrow x = y \end{aligned}$$

   Contradiction, du fait qu'on a supposé que $x \neq y$.
   Conclusion :
   La proposition $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$ est vraie.

2. $\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad \sqrt{9 + x^5} \neq 3 + \dfrac{x^5}{6}$. On suppose que

   $$\exists\, x \in \mathbb{R}^*, \quad \sqrt{9 + x^5} = 3 + \frac{x^5}{6}.$$

   $$\begin{aligned} \sqrt{9 + x^5} = 3 + \frac{x^5}{6} &\Longrightarrow 9 + x^5 = 9 + \frac{x^{25}}{36} + x^5 \\ &\Longrightarrow \frac{x^{25}}{36} = 0 \\ &\Longrightarrow x = 0 \text{ (ce qui est une contradiction, car } x \in \mathbb{R}^*). \end{aligned}$$

   Finalement, on a $\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad \sqrt{4 + x^3} \neq 2 + \dfrac{x^3}{4}$.

3. $\forall a, b \geq 0, \dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a} \Rightarrow a = b$
   La négation cette proposition est : $\exists a, b < 0, \dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a} \wedge a \neq b$
   On a :

   $$\begin{aligned} \tfrac{a}{1+b} = \tfrac{b}{1+a} &\Rightarrow a \times (1+a) = b \times (1+b) \\ &\Rightarrow a + a^2 = b + b^2 \\ &\Rightarrow a + a^2 b - b^2 = 0 \\ &\Rightarrow a - b + a^2 - b^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow a-b+(a-b)(a+b)=0\\
&\Rightarrow (a-b)(1+a+b)=0\\
&\Rightarrow \begin{cases} a-b=0\\ 1+a+b=0\end{cases}\\
&\Rightarrow \begin{cases} a=b & (1)\,;\\ a=-b-1 & (2).\end{cases}
\end{aligned}$$

L'égalité (1) : contradiction car on a supposé que $a \neq b$.
L'égalité (2) :
- Si $b \geq 0$ alors $a < 0$ car a=-b-1
- Si $b < 0$ alors $a > 0$ car a=-b-1

contradiction car on a supposé a,b¡ 0.

Finalement, on a montré par l'absurde que : $\forall a, b \geq 0, \dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a} \Rightarrow a = b$.

Exercice 3.
Montrons par récurrence que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx$, où x est un réel.
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons par $P(n)$ la propriété : $(1+x)^n \geq 1+nx$.
   L'initialisation :
   Pour n=0 : On a $P(0) : (1+x)^0 = 1$ et $1+0\times x = 1$ donc $P(1)$ est vraie.
   L'hérédité :
   Suppposon $P(n)$ est vraie pour n fixé est montrque que $P(n+1)$ est vraie.
   montrons que
   $$P_{n+1} : \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$$
   On a :
   $$\begin{aligned}
   \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx &\Rightarrow (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx)\\
   &\Rightarrow (1+x)^{n+1} \geq 1+nx+x+nx^2 \geq 1+nx+x\\
   &\Rightarrow (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x
   \end{aligned}$$
   Donc $P(n+1)$est vraie.
   Finalement, on a montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $3\times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, notons par $P(n)$ la propriété : $3\times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} = 17k, \;\; k \in \mathbb{N}$
   L'initialisation :
   Pour n=1 : on a $3\times 5^{2\times 1-1} + 2^{3\times 1-2} = 3\times 5^1 + 2^1 = 17 = 17\times 1$, donc $\exists k = 1 \in \mathbb{N}$.
   $3\times 5^{2\times 1-1} + 2^{3\times 1-2} = 3\times 5^1 + 2^1 = 17k$. C'est à dire $P(1)$ est vraie.
   L'hérédité :
   Suppposon $P(n)$ est vraie pour n fixé est montrer que $P(n+1)$ est vraie.
   $$P_{n+1} : 3\times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} = 17k', \;\; k' \in \mathbb{N}$$
   On a :
   $$\begin{aligned}
   3\times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} &= 3\times 5^{2n-1+2} + 2^{3n-2+3}\\
   &= 3\times 5^2 \times 5^{2n-1} + 2^3 \times 2^{3n-2}\\
   &= 3\times 25 \times 5^{2n-1} + 8\times 2^{3n-2}\\
   &= 3\times (17+8) \times 5^{2n-1} + 8\times 2^{3n-2}
   \end{aligned}$$

$= 3 \times (17 + 8) \times 5^{2n-1} + 8 \times 2^{3n-2}$
$= 3 \times 17 \times 5^{2n-1} + 3 \times 8 \times 5^{2n-1} + 8 \times 2^{3n-2}$
$= 3 \times 17 \times 5^{2n-1} + 8 \times (3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2})$
$= 3 \times 17 \times 5^{2n-1} + 8 \times 17k$
$= 17 \times (3 \times 5^{2n-1} + 8 \times k) = 17\acute{k}$ avec $\acute{k} = 3 \times 5^{2n-1} + 8 \times k$.

On a montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, notons par $P(n)$ la propriété :
$3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} = 17k, \;\; k \in \mathbb{N}$

3. $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$
Pour $n \in \mathbb{N}$, notons par $P(n)$ la propriété : $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$.
L'initialisation :
Pour n=0 : On a $P(0)$: $\sum_{k=0}^{0} 2^k = 2^0 = 1$ et $2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1$ pour $n = 0$ d'où $P(0)$ est vraie.
L'hérédité :
Suppposon $P(n)$ est vraie pour n fixé est montrer que $P(n+1)$ est vraie.
montrons que

$$P_{n+1} : \forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2^{n+2} - 1$$

On a :
$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = \underbrace{2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n}_{S_n} + 2^{n+1}$
$= 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1}$
$= 2 \times 2^{n+1} - 1$
$= 2^{n+1+1} - 1$
$= 2^{n+2} - 1$

Donc $P(n+1)$est vraie.
Finalement, on a montré par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$$