Université A/ MIRA de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie 1ère année Mars 2015

Corrigé de l'examen de Maths 1

Exercice n° 1. Montrons par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} \text{ est divisible par 17.}$$

Il s'agit de montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k \in \mathbb{N} : 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} = 17k.$$

Pour $n = 1$, on a

$$3 \times 5^{2-1} + 2^{3-2} = 17 = 17 \times 1,$$

Donc

$$\exists k = 1 \in \mathbb{N} : 3 \times 5^{2-1} + 2^{3-2} = 17k.$$

On suppose que

$$\exists k \in \mathbb{N} : 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} = 17k$$

et montrons que

$$\exists k' \in \mathbb{N} : 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} = 17k'.$$

On a

$$\begin{aligned} 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} &= 3 \times 25 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} \times 8 \\ &= 8\left(3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}\right) + 17 \times 3 \times 5^{2n-1} \\ &= 8 \times 17k + 17 \times k'' \text{ avec } k'' = 3 \times 5^{2n-1} \\ &= 17k' \text{ avec } k' = (8k + k'') \end{aligned}$$

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}^*, 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17.

Exercice n° 2. Considérons l'application f définie par :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} \end{array}$$

1. Étudions l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f.
   (a) Injectivité de f : On a

   $$f(2) = \frac{2 \times 2}{1 + 2^2} = \frac{4}{5}.$$

   $$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

   Donc f n'est pas injective car $f(2) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ mais $2 \neq \frac{1}{2}$.

   (b) Surjectivité de f : f n'est pas surjective car $y = 2$ (par exemple) n'a pas d'antécédent. En effet,

   $$\begin{aligned} f(x) = 2 &\iff \frac{2x}{1+x^2} = 2 \\ &\iff 2x = 2\left(1 + x^2\right) \\ &\iff x^2 - x + 1 = 0 \end{aligned}$$

   et l'équation $x^2 - x + 1 = 0$ n'admet pas de solutions réelles.

   (c) Bijectivité de f : f n'est pas bijective car elle n'est pas injective (ou bien car elle n'est pas surjective).

2. Montrons que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

$$\begin{aligned}
f(\mathbb{R}) &= \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in \mathbb{R} : y = f(x)\} \\
&= \left\{y \in \mathbb{R} / \exists x \in \mathbb{R} : y = \frac{2x}{1+x^2}\right\} \\
&= \left\{y \in \mathbb{R} / \exists x \in \mathbb{R} : yx^2 - 2x + y = 0\right\} \\
&= \left\{y \in \mathbb{R} : \Delta = 4 - 4y^2 \geq 0\right\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} : 4(1-y)(1+y) \geq 0\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} : y \in [-1, 1]\} \\
&= [-1, 1].
\end{aligned}$$

Exercice n° 3.

1. On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la relation binaire $\mathcal{R}_1$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad x\mathcal{R}_1 y \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : y = x^k.$$

(a) Montrons que $\mathcal{R}_1$ est une relation d'ordre

i. Réflexivité de $\mathcal{R}_1$: Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a

$$\begin{aligned}
& x = x^1 \\
\Longrightarrow\; & \exists k = 1 \in \mathbb{N} : x = x^k \\
\Longrightarrow\; & x\mathcal{R}_1 x.
\end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x\mathcal{R}_1 x$. D'où la réflexivité de $\mathcal{R}_1$.

ii. Antisymétrie de $\mathcal{R}_1$: Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^* : x\mathcal{R}_1 y$ et $y\mathcal{R}_1 x$. On a

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l} x\mathcal{R}_1 y \\ \text{et} \\ y\mathcal{R}_1 x \end{array}\right. &\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists k_1 \in \mathbb{N} : y = x^{k_1} \\ \text{et} \\ \exists k_2 \in \mathbb{N} : x = y^{k_2} \end{array}\right. \\
&\Longrightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N} : y = \left(y^{k_2}\right)^{k_1} \\
&\Longrightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N} : y = y^{k_1 k_2}.
\end{aligned}$$

Donc $k_1 k_2 = 1$ ce qui implique que $k_1 = k_2 = 1$ car $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ et par suite $x = y$. Finalement,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad x\mathcal{R}_1 y \text{ et } y\mathcal{R}_1 x \Longrightarrow x = y.$$

D'où l'antisymétrie de $\mathcal{R}_1$.

iii. Transitivité de $\mathcal{R}_1$: Soient $x, y, z \in \mathbb{R}_+^* : x\mathcal{R}_1 y$ et $y\mathcal{R}_1 z$. On a

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l} x\mathcal{R}_1 y \\ \text{et} \\ y\mathcal{R}_1 z \end{array}\right. &\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists k_1 \in \mathbb{N} : y = x^{k_1} \\ \text{et} \\ \exists k_2 \in \mathbb{N} : z = y^{k_2} \end{array}\right. \\
&\Longrightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N} : z = \left(x^{k_1}\right)^{k_2} = x^{k_1 k_2} \\
&\Longrightarrow \exists k_3 = k_1.k_2 \in \mathbb{N} : z = x^{k_3} \Longrightarrow x\mathcal{R}_1 z.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}_+^*, \quad x\mathcal{R}_1 y \text{ et } y\mathcal{R}_1 z \Longrightarrow x\mathcal{R}_1 z.$$

D'où la transitivité de $\mathcal{R}_1$.

De i), ii) et iii), on a $\mathcal{R}_1$ est une relation d'ordre.

(b) L'ordre $\mathcal{R}_1$ n'est pas total : En effet, prenons $x = 2$ et $y = 3$. On a

$$\nexists k \in \mathbb{N} : 3 = 2^k \Longrightarrow 2 \not\mathcal{R}_1 3$$

et

$$\nexists k \in \mathbb{N} : 2 = 3^k \Longrightarrow 3 \not\mathcal{R}_1 2.$$

2. On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation binaire $\mathcal{R}_2$ par :

$$\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2, \quad (a,b)\,\mathcal{R}_2\,(c,d) \Longleftrightarrow a^2+b^2 = c^2+d^2.$$

   (a) Montrons que $\mathcal{R}_2$ est une relation d'équivalence.

      i. Réflexivité de $\mathcal{R}_2$: Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{array}{ll} & a^2+b^2 = a^2+b^2 \\ \Longrightarrow & (a,b)\,\mathcal{R}_2\,(a,b). \end{array}$$

      Donc $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a,b)\,\mathcal{R}_2\,(a,b)$. D'où la réflexivité de $\mathcal{R}_2$.

      ii. Symétrie de $\mathcal{R}_2$: Soient $(a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2 : (a,b)\,\mathcal{R}_2\,(c,d)$. On a

$$\begin{array}{rcl} (a,b)\,\mathcal{R}_2\,(c,d) & \Longrightarrow & a^2+b^2 = c^2+d^2 \\ & \Longrightarrow & c^2+d^2 = a^2+b^2 \\ & \Longrightarrow & (c,d)\,\mathcal{R}_2\,(a,b). \end{array}$$

      Donc

$$\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2, \ (a,b)\,\mathcal{R}_2\,(c,d) \Longrightarrow (c,d)\,\mathcal{R}_2\,(a,b).$$

      D'où la symétrie de $\mathcal{R}_2$.

      iii. Transitivité de $\mathcal{R}_2$: Soient $(a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{R}^2 : (a,b)\,\mathcal{R}_2\,(c,d)$ et $(c,d)\,\mathcal{R}_2\,(e,f)$. On a

$$\begin{array}{rcl} \left\{ \begin{array}{l} (a,b)\,\mathcal{R}_2\,(c,d) \\ \text{et} \\ (c,d)\,\mathcal{R}_2\,(e,f) \end{array} \right. & \Longrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} a^2+b^2 = c^2+d^2 \\ \text{et} \\ c^2+d^2 = e^2+f^2 \end{array} \right. \\ & \Longrightarrow & a^2+b^2 = e^2+f^2 \\ & \Longrightarrow & (a,b)\,\mathcal{R}_2\,(e,f). \end{array}$$

      Finalement,

$$\forall (a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{R}^2 : (a,b)\,\mathcal{R}_2\,(c,d) \ \text{ et } \ (c,d)\,\mathcal{R}_2\,(e,f) \Longrightarrow (a,b)\,\mathcal{R}_2\,(e,f).$$

      D'où la transitivité de $\mathcal{R}_2$.

   De i), ii) et iii), on a $\mathcal{R}_2$ est une relation d'équivalence.

   (b) La classe d'équivalence de $(0,1)$:

$$\begin{array}{rcl} \overline{(0,1)} & = & \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : (a,b)\,\mathcal{R}_2\,(0,1)\right\} \\ & = & \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a^2+b^2 = 0^2+1^2\right\} \\ & = & \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a^2+b^2 = 1\right\}. \end{array}$$

   Donc la classe d'équivalence de $(0,1)$ est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

Exercice n° 4.

1. Déterminer les limites suivantes :

   (a) On a

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{x+3}-\sqrt{x} & = & \left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\dfrac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}} \\ & = & \dfrac{x+3-x}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}} \\ & = & \dfrac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}. \end{array}$$

   Donc

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}} = 0.$$

(b) On a

$$\begin{aligned}\frac{\sin^2 x}{1+\cos x} &= \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} \\ &= \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x} \\ &= 1-\cos x.\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} = \lim_{x\to\pi} (1-\cos x) = 2.$$

(c) On a

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = (\ln)'(x)\Big|_{x=1} = \frac{1}{x}\Big|_{x=1} = 1.$$

2. Soient a et b deux nombres réels. On définit la fonction f par :

$$f(x) = \begin{cases} ax+b, & \text{si } x \le 0, \\ \dfrac{3}{1+x}, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

(a) Continuité de f sur $\mathbb{R}$: Sur $\mathbb{R}^*$, f est continue car $x \longmapsto ax+b$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $]-\infty, 0[$ et $x \longmapsto \dfrac{3}{1+x}$ est continue sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ donc en particulier sur $]0, +\infty[$.

Continuité de f en 0 :

On a $f(0) = a \times 0 + b = b$.

$$\lim_{x \overset{\geq}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{\geq}{\to} 0} \frac{3}{1+x} = 3,$$

$$\lim_{x \overset{\leq}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{\geq}{\to} 0} ax+b = b.$$

$$\text{f est continue en } 0 \iff \lim_{x \overset{\geq}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{\leq}{\to} 0} f(x) = f(0) \iff b = 3.$$

Finalement f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $b = 3$.

(b) Dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$: Sur $\mathbb{R}^*$, f est dérivable car $x \longmapsto ax+b$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $]-\infty, 0[$ et $x \longmapsto \dfrac{3}{1+x}$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ donc en particulier sur $]0, +\infty[$.

Dérivabilité de f en 0 :

Si $b \neq 3$, f n'est pas dérivable en 0 car elle n'est pas continue en 0.

Donc Posons $b = 3$, donc $f(0) = 3$.

$$\lim_{x \overset{\geq}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \overset{\geq}{\to} 0} \frac{\frac{3}{1+x} - 3}{x} = \lim_{x \overset{\geq}{\to} 0} \frac{3-3-3x}{x(1+x)} = \lim_{x \overset{\geq}{\to} 0} \frac{-3}{1+x} = -3 = f'_d(0),$$

$$\lim_{x \overset{\leq}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \overset{\geq}{\to} 0} \frac{ax+3-3}{x} = a = f'_g(0).$$

$$\text{f est dérivable en } 0 \iff b = 3 \text{ et } f'_d(0) = f'_g(0) \iff b = 3 \text{ et } a = -3.$$

Finalement f est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $b = 3$ et $a = -3$.