

Exo 1

$$x(t) = -t^3 + 6t^2 + 1 \text{ (m)}$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -3t^2 + 12t$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -6t + 12$$

2) Instant d'arrêt:

$$v=0 \Rightarrow -3t(t-4) = 0 \Rightarrow$$

$t=0$ début du Mvt

$t=4s$ instant d'arrêt

M se déplace vers les x positif

$$3) \begin{cases} t \in [0, 4[; v > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t \in]4, \infty[; v < 0 \end{cases} \quad \text{M se déplace vers les } x \text{ négatif}$$

4) Dans les intervalles $[0, 2[$ et $]4, \infty[$ $a \cdot v > 0$

le mvt est accéléré

Dans l'intervalle $]2, 4[$ $a \cdot v < 0$ le mvt est retardé

$$5) x(0) = 1m ; x(4) = 33m ; x(5) = 26m$$

Déplacement effectué entre t_0 et t_2 :

$$\Delta x = x(5) - x(0) = 25m$$

$$\text{Distance parcourue: } d = |x(5) - x(4)| + |x(4) - x(0)| = 39m$$

Exo 2

1) En remplaçant t dans x on obtient:

$$x = \frac{y^2}{4} - 1 \quad \text{ou} \quad y = 2\sqrt{x+1}$$

2) Vitesse

$$v(t) = \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = 2t \\ v_y = \frac{dy}{dt} = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = 2t\vec{e}_x + 2\vec{e}_y$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(2t)^2 + 2^2} = \sqrt{4t^2 + 4} = \sqrt{4(t^2 + 1)}$$

$$v = (2) \sqrt{(t^2+1)} \Rightarrow v = 2\sqrt{(t^2+1)}$$

Accélération.

$$a(t) = \begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = 2 \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{a}(t) = 2\vec{i} \Rightarrow \|\vec{a}\| = \sqrt{22}$$

$a = 2 \text{ m/s}^2$

3) a est cst et le produit $\vec{a} \cdot \vec{v}$ positif donc le mv est uniformément accéléré

4) Accélération tangentielle

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{2t}{\sqrt{(t^2+1)}}$$

$$a_t = 2 \cdot \frac{2t}{2\sqrt{(t^2+1)}}$$

$$a_t = \frac{2t}{\sqrt{(t^2+1)}}$$

Accélération normale.

ona: $a^2 = a_t^2 + a_n^2$ donc: $a_n^2 = a^2 - a_t^2$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}$$

AN: $a_n = \frac{2}{\sqrt{(t^2+1)}}$

Rayon de courbure: ona $a_n = \frac{v^2}{\rho}$

Alors $\rho = \frac{v^2}{a_n} = 2(t^2+1)^{\frac{3}{2}}$

5. Angle entre $\vec{ox}$ et $\vec{v}$.

$$\sin \alpha = \frac{v_y}{v} = \frac{1}{\sqrt{(t^2+1)}}$$

6) Sachant que $\alpha = \frac{2}{\sqrt{t^2 + 1}}$

EX03

1) $\vec{e}_T$ = Vecteur unitaire tangent à la trajectoire en M et de même sens que le mouvement.

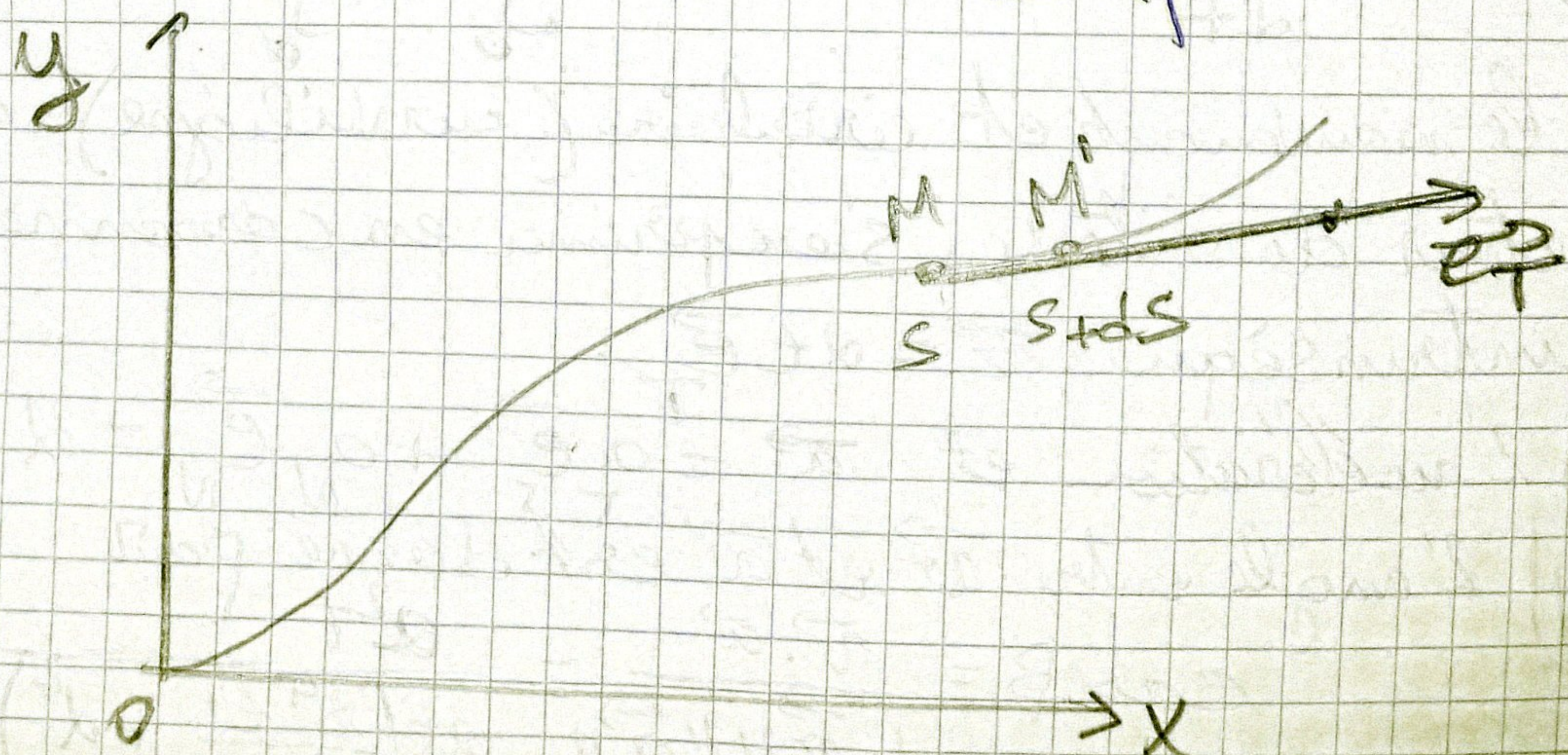
$\vec{e}_N$: Vect unitaire normal à la trajectoire en M et dirigé vers le centre de la courbure.

$\vec{b}$ = Vect unitaire $\perp$ au plan qui contient les deux vecteurs $\vec{e}_N$ et $\vec{e}_T$. On obtient $\vec{b}$ par la relation $\vec{b} = \vec{e}_T \wedge \vec{e}_N$.

2) Relation entre $S(t)$ et v

Lorsque l'on fait varier de façon élémentaire la position du point M en décrivant la trajectoire 'abscisse curviligne', le point M passe de S à $S + ds$ entre l'instant t et l'instant $t + dt$.

Le déplacement élémentaire est tangent à la trajectoire et s'écrit alors $d\vec{OM} = \vec{MM'} = ds \vec{e}_T$.



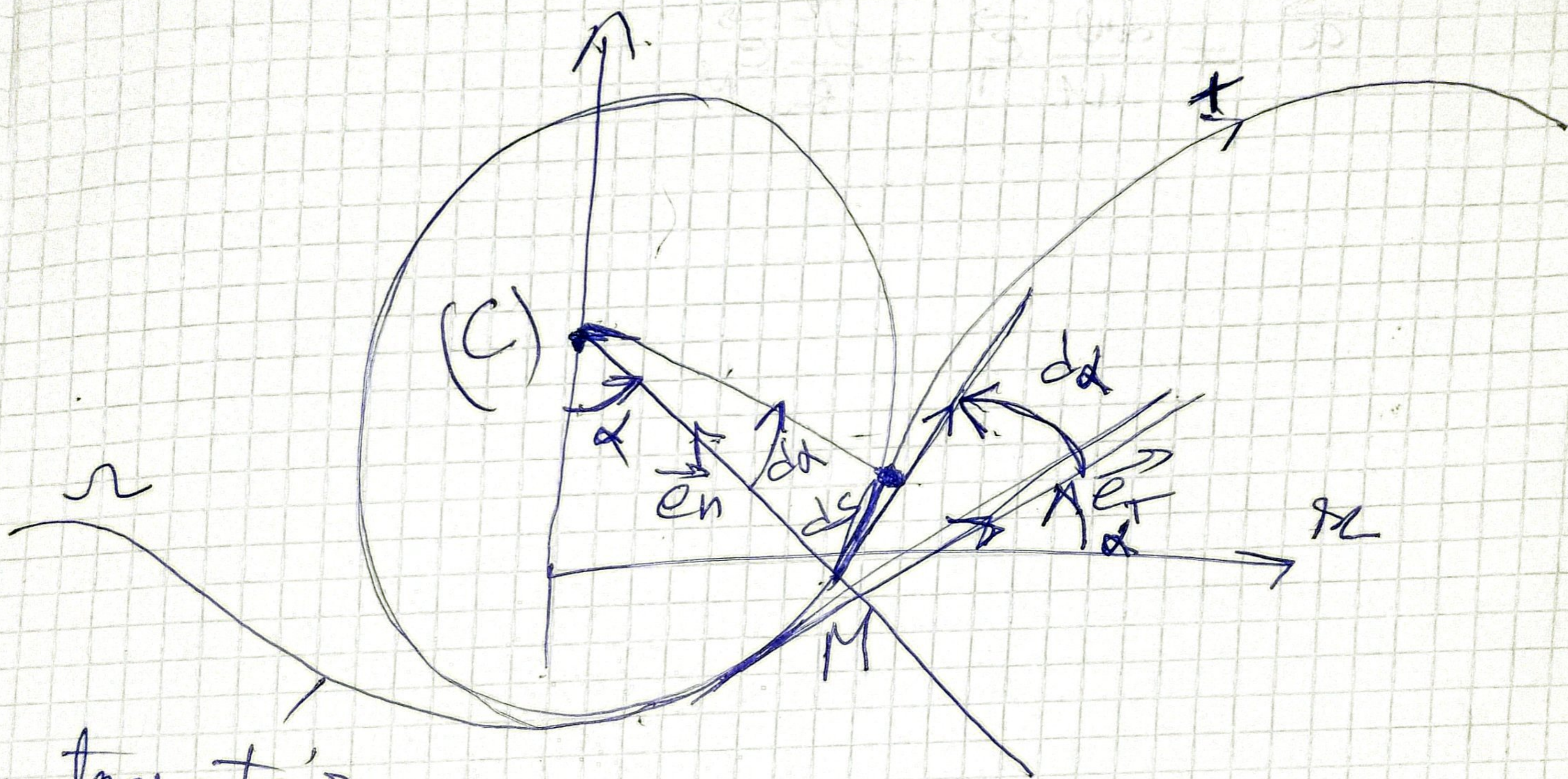
$$\vec{r} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{ds}{dt} \vec{e}_T$$

3) Vct accélération du point M. Dans la base de Frenet.

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} = \frac{d(v\vec{e}_T)}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{e}_T + v \frac{d\vec{e}_T}{dt}$$

Donc l'accélération tangentielle

$$\vec{a}_T = \frac{dv}{dt} \vec{e}_T \text{ avec } a_T = \frac{dv}{dt} ; v = ||\vec{v}||$$



trajectoire

calcul de $\frac{d\vec{e}_T}{dt}$

$$\frac{d\vec{e}_T}{dt} = \frac{d\vec{e}_T}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\vec{e}_T}{d\alpha} \frac{d\alpha}{ds} \frac{ds}{dt}$$

La dérivée du vecteur unitaire $\vec{e}_T$ par rapport à α correspond à un vecteur unitaire qui lui est perpendiculaire qu'on note $\vec{e}_N$ dirigé vers le centre

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{ds}{dt} \vec{e}_T$$

3) Vecteurs accélération dans la base de Frenet.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{e}_T)}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{e}_T + v \frac{d\vec{e}_T}{dt}$$

Donc l'accélération tangentielle $\vec{a}_T = \frac{dv}{dt} \vec{e}_T$ avec

$$a_T = \frac{dv}{dt}; v = \|\vec{v}\|$$

calculer $\frac{d\vec{e}_T}{dt}$

$$\frac{d\vec{e}_T}{dt} = \frac{d\vec{e}_T}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\vec{e}_T}{d\alpha} \frac{d\alpha}{ds} \frac{ds}{dt}$$

La dérivée du vecteur unitaire $\vec{e}_T$ par rapport à α correspond à un vecteur unitaire qui lui est perpendiculaire qu'on note $\vec{e}_N$ dirigé vers le centre du cercle osculateur C .

Le vecteur $\vec{e}_N$ est donc normal à la trajectoire au point M et dirigé vers la concavité de la courbe.

L'arc de cercle $ds = R_c d\alpha$ donc $\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R_c}$ avec R_c le rayon du cercle osculateur.

$$\frac{ds}{dt} = \dot{s} = v$$

$$\frac{d\vec{e}_T}{dt} = \frac{1}{R_c} v \vec{e}_N, \text{ donc } \vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{e}_T + \frac{v^2}{R_c} \vec{e}_N$$

EX04:

$$1) ds = \frac{dv}{dt} \rightarrow ds = v dt \rightarrow \int_0^s ds = \int_0^t v dt \rightarrow s = \frac{1}{2} \alpha t^2$$

2) le mouvement est circulaire (curviligne), alors le vecteur de vitesse s'exprime en coordonnées

intrinsèque: $\vec{v} = \alpha t \vec{e}_T$

$$3) \text{ L'accélération et } \vec{a} = a_T \vec{e}_T + a_N \vec{e}_N = \alpha \vec{e}_T + \frac{\alpha^2 t^2}{b} \vec{e}_N$$

4) L'angle entre $\vec{v}$ et $\vec{a}$ est donné par

$$\cos \beta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{\|\vec{v}\| \|\vec{a}\|} = \frac{\alpha^2 t}{\alpha t \left(\frac{\alpha^4 t^4}{b^2} + \alpha^2 \right)^{1/2}}$$

$$= \frac{b}{(b^2 + d^2 t^4)^{1/2}} \rightarrow \beta = \cos^{-1} \left(\frac{b}{(b^2 + d^2 t^4)^{1/2}} \right)$$

Exo 5:

$$\omega = \frac{30(2\pi)}{60} = \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2 \text{ s}$$

$$f = \frac{1}{T} = 0,5 \text{ Hz}$$

$$\star v = \omega R = 0,47 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 0 ; a_n = \frac{v^2}{R} = 1,47 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = a_n = 1,47 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\star v = \omega r = 0,16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} ; a_t = \frac{dv}{dt} = 0 ; a_n = \frac{v^2}{R}$$

$$a_t = 0,51 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} ; a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = a_n = 0,51 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Exo 6:

1 - Vecteurs, positions, vitesse et accélération

$$p = b \cos(\omega t) ; \dot{p} = -b\omega \sin(\omega t)$$

$$\ddot{p} = -b\omega^2 \cos(\omega t)$$

$$\theta = \omega t ; \dot{\theta} = \omega ; \ddot{\theta} = 0$$

$$\text{Vecteur position } \vec{OM} = p \vec{e}_g = b \cos(\omega t) \vec{e}_g$$

$$\text{Vecteur vitesse: } \vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{p} \vec{e}_g + p \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$= b\omega (-\sin(\omega t) \vec{e}_g + \cos(\omega t) \vec{e}_\theta)$$

$$\text{Vecteur accélération } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{p} - p \dot{\theta}^2) \vec{e}_g$$

$$+ (2\dot{p} \dot{\theta} + p \ddot{\theta}) \vec{e}_\theta = -2b\omega^2 (\cos(\omega t) \vec{e}_g + \sin(\omega t) \vec{e}_\theta)$$

2) instants $t = 0 \text{ s}$ et $t = \frac{\pi}{4} \text{ s}$

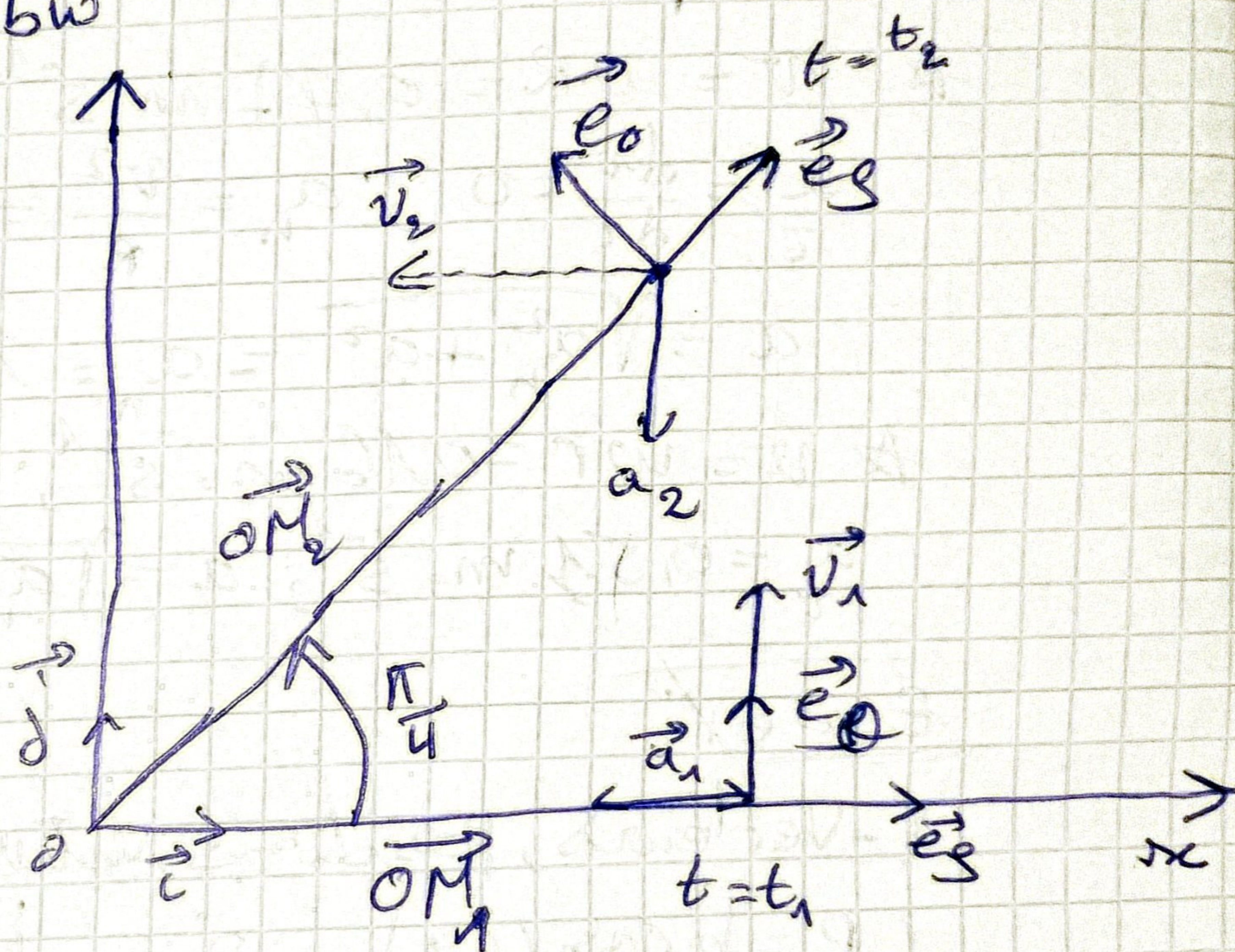
$t(s)$	positions	Velocities	Accelerations
$t_1 = 0s$	$\vec{OM}_1 = r\vec{e}_3 = b\vec{e}_3$	$\vec{v}_1 = b\omega\vec{e}_\theta$	$\vec{a}_1 = -2b\omega^2\vec{e}_3$
$t_2 = \frac{\pi}{4}\omega s$	$\vec{OM}_2 = b\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_3$	$\vec{v}_2 = b\omega\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_\theta\right)$	$\vec{a}_2 = -2b\omega^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_\theta\right)$

On a $\|\vec{OM}_1\| = b$ et $\|\vec{OM}_2\| = b\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\theta_1 = 0$; $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$.

$\|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\| = b$.

$\|\vec{a}_1\| = \|\vec{a}_2\| = 2b\omega^2$.



Exo 7:

$$\begin{cases} x = R \cos(\omega t) \\ y = R \sin(\omega t) \\ z = at \end{cases}$$

$$p = z(t+T) - z(t) = a(t+T) - at = aT = \frac{2\pi a}{\omega}$$

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = R \cos(\omega t)\vec{i} + R \sin(\omega t)\vec{j} + (at)\vec{k}$$

$$+ (at)\vec{k} :$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = -R\omega \sin(\omega t)\vec{i} + R\omega \cos(\omega t)\vec{j} + a\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -R\omega^2 \cos(\omega t)\vec{i} - R\omega^2 \sin(\omega t)\vec{j}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = R; \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \omega t; z = at$$

$$\theta' = \frac{d\theta}{dt} = \omega; \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \theta' \vec{e}_\phi; \frac{d\vec{e}_\phi}{dt} = -\theta' \vec{e}_\theta = -\omega \vec{e}_\theta$$

$$\vec{OM} = y\vec{e}_\theta + z\vec{k} + (at)\vec{k} = R\vec{e}_\theta + (at)\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = R \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + a\vec{k} = R\omega \vec{e}_\phi + a\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -R\omega^2 \vec{e}_\theta$$

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{a}$$

$$\frac{ds}{dt} \vec{e}_t \quad 1, \dots, 1, \dots, 1$$

Exo 8:

1) Vecteur vitesse: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -3\sin(t)\vec{i} + 3\cos(t)\vec{j} + 4\vec{k}$

Vecteur accélération: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -3\cos(t)\vec{i} - 3\sin(t)\vec{j}$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{9\sin^2(t) + 9\cos^2(t) + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{et } \|\vec{a}\| = \sqrt{9\cos^2(t) + 9\sin^2(t)} = \sqrt{9} = 3$$

2) les vecteurs unitaires $\vec{u}_t$ et $\vec{u}_n$.

$$\vec{u}_t = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\vec{a}_t}{a_t} \quad ; \quad \vec{u}_n = \frac{\vec{a}_n}{a_n}$$

$$\vec{u}_t = \frac{\vec{a}_n}{a_n} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = -(\cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j})$$

3) $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = 3$; $\tan \theta = \frac{y}{x} = \tan(t) \rightarrow \theta = t$.

les coordonnées cylindriques de M.

$$\begin{cases} \rho = 3 \\ \theta = t \\ z(t) = (4t - 2)t \end{cases}$$

Vecteur position $\vec{r} = 3\vec{e}_\rho + (4t - 2)t\vec{k}$

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = 1 \\ \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta = \vec{e}_\theta \\ \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\rho = -\vec{e}_\rho \end{cases}$$

Vecteur vitesse

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 3\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + 4\vec{k} = 3\vec{e}_\theta + 4\vec{k}, \quad \boxed{v=5}$$

Vecteur accélération

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 3\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -3\vec{e}_\rho, \quad \boxed{a=3}$$

Exo 9

1) Repère absolu : la rive.

Repère relatif : le courant

le mobile : le nageur.

* La vitesse du nageur par rapport au courant $\vec{v}_1$, est la vitesse relative $\vec{v}_r$

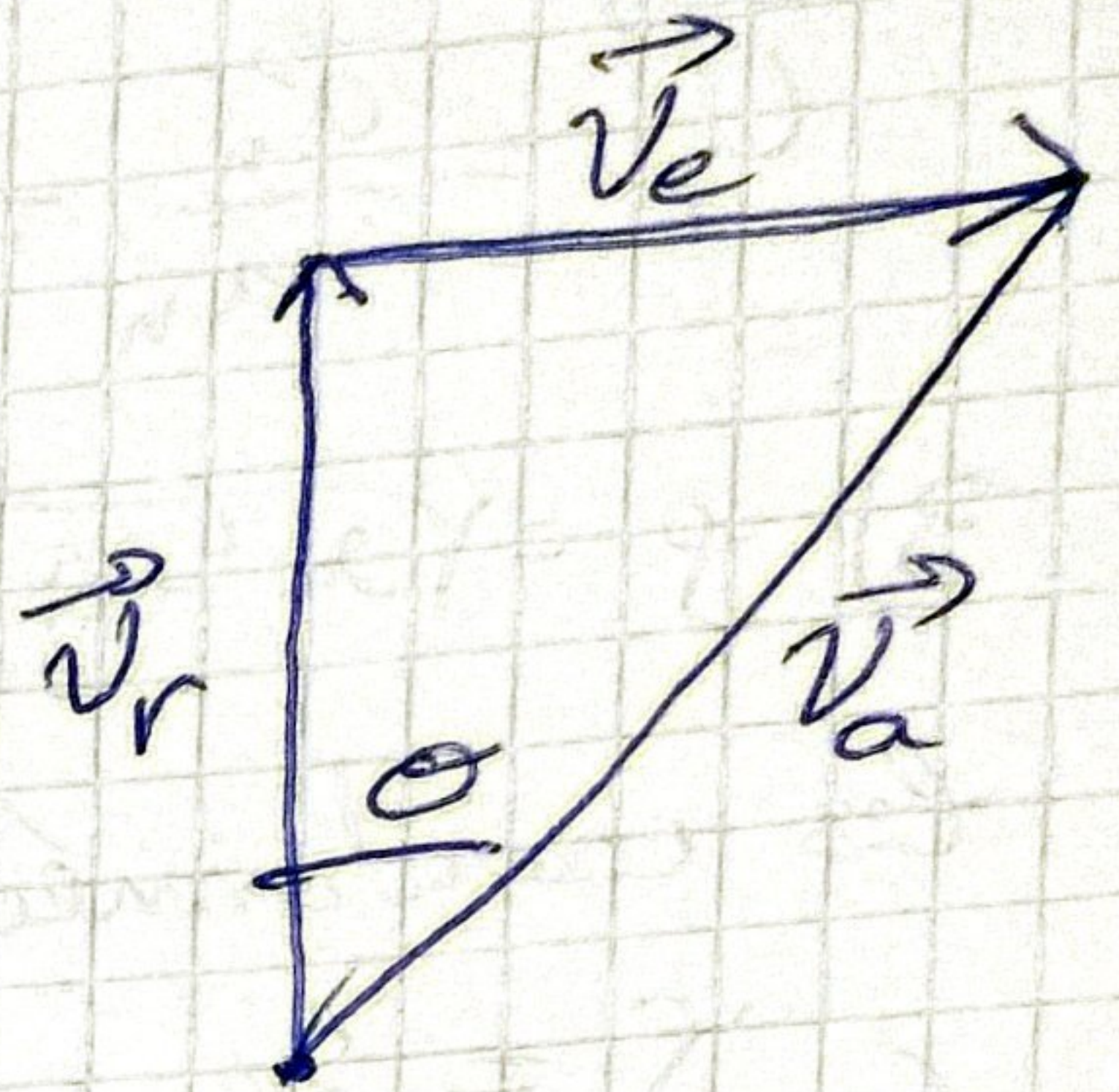
* La vitesse du nageur par rapport à la rive $\vec{v}_3$, est la vitesse absolue $\vec{v}_a$

* La vitesse du courant par rapport à la rive $\vec{v}_2$ la vitesse d'entraînement $\vec{v}_e$

$$2) \vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \rightarrow v_3 = v_2 + v_1$$

$$v_3 = \sqrt{v_2^2 + v_1^2} = 5 \text{ m/s.}$$

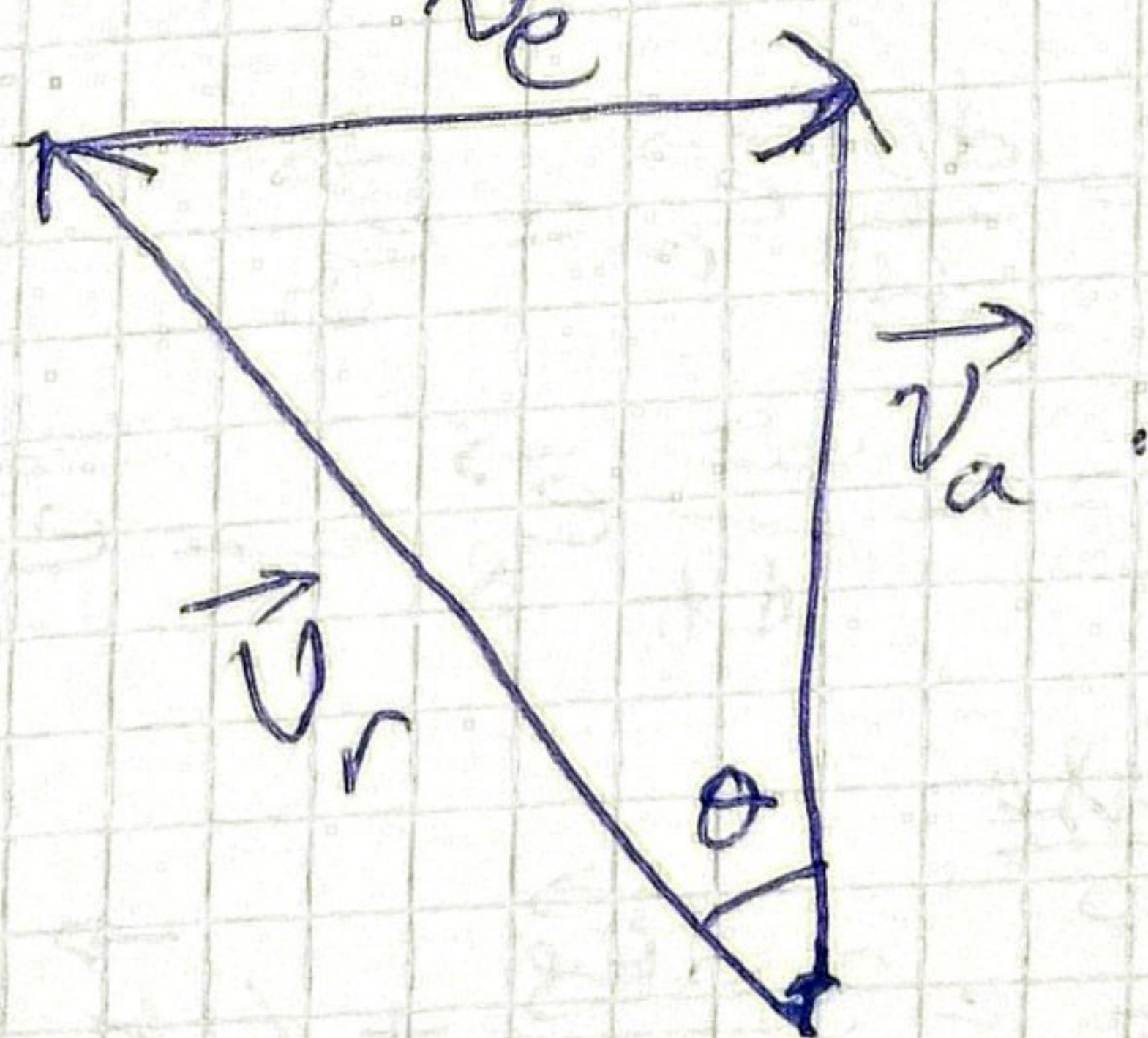
$$\tan \theta = \frac{3}{4} \rightarrow \theta = 37^\circ$$



$$3) \vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

D'après le schéma on a $v_3 = \sqrt{v_1^2 - v_2^2} = 2,64 \text{ m/s}$

$$\sin \theta = \frac{3}{4} \rightarrow \theta = 39^\circ$$



Exo 10

On a $\frac{d\vec{e}_1}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_1$ et $\frac{d\vec{e}_2}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_2$ et

$$\vec{e}_1 = \cos(\omega t) \vec{i} + \sin(\omega t) \vec{j}$$

$$\vec{e}_2 = -\sin(\omega t) \vec{i} + \cos(\omega t) \vec{j}$$

Le Mvt de M dans R_1 est rectiligne sinusoïdal

On a $\vec{OM} = b \cos(\omega t) \vec{e}_1$ et $\vec{\omega} = \omega \vec{k}_1$

* la vitesse relative.

$$\vec{v}_r(M) = \frac{d\vec{OM}}{dt} = -b\omega \sin(\omega t) \vec{e}_1$$

* l'accélération relative.

$$\vec{a}_r(M) = \frac{d\vec{v}_r(M)}{dt} = -b\omega^2 \cos(\omega t) \vec{e}_1$$

La vitesse d'entraînement

$$\vec{v}_e(M) = \frac{d\vec{OO}_1}{dt} + \vec{\omega}(R_1/R) \wedge \vec{OO}_1 = \vec{\omega}(R_1/R) \wedge \vec{OO}_1$$

puisque $\frac{d\vec{OO}_1}{dt} = \vec{0}$,

$$\vec{v}_e = \omega \vec{k}_1 \wedge b \cos(\omega t) \vec{e}_1 = \omega b \cos(\omega t) \vec{e}_2$$

Accélération d'entraînement:

$$\vec{a}_e(M) = \frac{d^2\vec{OO}_1}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{OO}_1 + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OO}_1)$$

$$\frac{d^2\vec{OO}_1}{dt^2} = \vec{0} \text{ et } \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{0} \text{ donc:}$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_e(M) &= \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OO}_1) = \omega \vec{k}_1 \wedge \omega b \cos(\omega t) \vec{e}_1 \\ &= -b\omega^2 \cos(\omega t) \vec{e}_1 \end{aligned}$$

Accélération de Coriolis:

$$\begin{aligned} \vec{a}_c(M) &= 2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r = 2 \omega \vec{k}_1 \wedge (-b\omega \sin(\omega t) \vec{e}_1) \\ \vec{a}_c(M) &= -2b\omega^2 \sin(\omega t) \vec{e}_2 \end{aligned}$$

La vitesse absolue:

$$\vec{v}_a(M) = \vec{v}_r(M) + \vec{v}_e(M) = -b\omega \sin(\omega t) \vec{i}_1 + \omega b \cos(\omega t) \vec{j}_1 \\ = \omega b \vec{j}$$

Accélération absolue:

$$\vec{a}_a(M) = \vec{a}_r(M) + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M) = -b\omega^2 \cos(\omega t) \vec{i}_1 \\ + -b\omega^2 \cos(\omega t) \vec{i}_1 + -2b\omega^2 \sin(\omega t) \vec{j}_1$$

$$\boxed{\vec{a}_a(M) = -2b\omega^2 \vec{i}}$$