

## Examen de Rattrapage de MATHS 1

### Exercice 1. (05 pts)

1. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 3^n \geq 1 + 2n.$$

2. Montrer par contraposition que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x^5 + x < 2 \implies x < 1).$$

### Exercice 2. (10 pts)

I. On définit sur  $\mathbb{R}$  la relation binaire  $\mathfrak{R}$  suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \mathfrak{R} y \Leftrightarrow x \leq y.$$

1. Montrer que  $\mathfrak{R}$  est une relation d'ordre sur  $\mathbb{R}$ .

2. Cet ordre est-il total ?

II. Soit l'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ .

1. Calculer  $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ,  $f(2)$  et  $f(0)$ .

2. Calculer  $f^{-1}(\{-2\})$ .

3. L'application  $f$  est-elle injective ? surjective ? Justifier.

4. Montrer que l'application  $g : [-1, +1] \rightarrow [-1, +1]$  définie par  $g(x) = f(x)$  est une bijection et donner sa réciproque.

### Exercice 3. (05 pts)

1. Calculer les limites suivantes :

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin x}$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$ ,  $a > 0$ .

2. Soit  $f$  une fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3} + 2 & \text{si } x < 1 \\ 4 & \text{si } x = 1 \\ \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Étudier la continuité de  $f$  en  $x_0 = 1$ .

Bon courage