

Examen de Rattrapage de MATHS 1

Exercice 1. (05 pts)

1. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 3^n \geq 1 + 2n.$$

2. Montrer par contraposition que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x^5 + x < 2 \implies x < 1).$$

Exercice 2. (10 pts)

I. On définit sur \mathbb{R} la relation binaire \mathfrak{R} suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \mathfrak{R} y \Leftrightarrow x \leq y.$$

- Montrer que \mathfrak{R} est une relation d'ordre sur \mathbb{R} .
- Cet ordre est-il total ?

II. Soit l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

- Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(2)$ et $f(0)$.
- Calculer $f^{-1}(\{-2\})$.
- L'application f est-elle injective? surjective? Justifier.
- Montrer que l'application $g : [-1, +1] \longrightarrow [-1, +1]$ définie par $g(x) = f(x)$ est une bijection et donner sa réciproque.

Exercice 3. (05 pts)

1. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin x}$.

b) $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}, \quad a > 0.$

2. Soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3} + 2 & \text{si } x < 1 \\ 4 & \text{si } x = 1 \\ \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f en $x_0 = 1$.

Bon courage