Université A. MIRA-Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie

Juin 2024
Durée : 1 h 30

Corrigé de l'examen de rattrapage MATHS 1

Exercice 1. *(05 pts)*

1. *Montrons par récurrence que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; 3^n \geq 1 + 2n.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons par $P(n)$ la proposition $3^n \geq 1 + 2n$.
- Pour $n = 0$, on a $3^0 = 1 + 2.0 \Longrightarrow 1 \geq 1$ donc $P(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie (i.e $3^{n+1} \geq 1 + 2(n+1)$).
On a:

$$\begin{aligned} 3^n \geq 1 + 2n &\Longrightarrow 3^n.3 \geq 3 + 6n \\ &\Longrightarrow 3^{n+1} \geq 3 + 2n + 4n \\ &\Longrightarrow 3^{n+1} \geq 3 + 2n \\ &\Longrightarrow 3^{n+1} \geq 1 + 2 + 2n \\ &\Longrightarrow 3^{n+1} \geq 1 + 2(1+n) \\ &\Longrightarrow P(n+1) \text{ est vraie.} \end{aligned}$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}, 3^n \geq 1 + 2n$ est vraie.

2. *Montrons par la contraposition que : $\forall x \in \mathbb{R}, \;\; (x^5 + x < 2 \Longrightarrow x < 1)$.*
La contraposée de la proposition est :

$$x \geq 1 \Longrightarrow x^5 + x \geq 2.$$

On a

(1) $$x \geq 1$$

et

(2) $$x \geq 1 \Longrightarrow x^2 \geq 1 \Longrightarrow x^4 \geq 1 \Longrightarrow x^5 \geq 1$$

$(1) + (2) \Longrightarrow x^5 + x \geq 1 + 1 \Longrightarrow x^5 + x \geq 2.$
Par le principe de contraposition, on a montré que : $x^5 + x < 2 \Longrightarrow x < 1$.

Exercice 2. *(10 pts)*
I. On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire $\Re$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \;\; x\Re y \Leftrightarrow x \leq y.$$

1. *Montrons que $\Re$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.*
a) Réflexivité de $\Re$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $x \leq x$, donc $x\Re x$, d'où $\Re$ est réflexive.
b) antisymétrie de $\Re$
Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x\Re y$ et $y\Re x$. On a

$$\left\{\begin{array}{c} x\Re y \\ et \\ y\Re x \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x \leq y \\ et \\ y \leq x \end{array}\right. \Longrightarrow x = y \text{ d'où } \Re \text{ est antisymétrique.}$$

c) Transitivité de $\Re$
Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x\Re y$ et $y\Re z$. On a

$$\left\{\begin{array}{c} x\Re y \\ et \\ y\Re z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x \leq y \\ et \\ y \leq z \end{array}\right. \Longrightarrow x \leq z \Longrightarrow x\Re z \text{ d'où } \Re \text{ est transitive.}$$

Conclusion: de a), b) et c), $\Re$ est une relation d'ordre.

2. *Cette relation est relation d'ordre totale puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, soit $x \leq y$, soit $y \leq x$.*

II. Soit l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

1. *Calculons $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f(2)$ et $f(0)$.*

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}, f(2) = \frac{4}{5}, f(0) = 0.$$

2. *Calculons $f^{-1}(\{-2\})$.*

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\{-2\}) &= \{x \in \mathbb{R}/ f(x) \in \{-2\}\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}/ f(x) = -2\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R}/ \frac{2x}{1+x^2} = -2\right\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}/\, 2x = -2 - 2x^2\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}/\, 2(1 + x + x^2) = 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}/\, 1 + x + x^2 = 0\} \\
&= \varnothing.
\end{aligned}$$

3. *f n'est pas injective car $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = f(2)$ mais $\dfrac{1}{2} \neq 2$.*

   f n'est pas surjective car, car $\nexists x \in \mathbb{R}/f(x) = -2$.

4. *$g : [-1, +1] \longrightarrow [-1, +1] / g(x) = f(x)$.*
   Montrons que : g est injective:

$$\begin{aligned}
g(x_1) = g(x_2) &\Longrightarrow \frac{2x_1}{1+x_1^2} = \frac{2x_2}{1+x_2^2} \\
&\Longrightarrow 2x_1(1+x_2^2) = 2x_2(1+x_1^2) \\
&\Longrightarrow x_1 + x_1x_2^2 = x_2 + x_2x_1^2 \\
&\Longrightarrow x_1 - x_2 = x_2x_1^2 - x_1x_2^2 \\
&\Longrightarrow x_1 - x_2 = x_1x_2(x_1 - x_2) \\
&\Longrightarrow (x_1 - x_2)(1 - x_1x_2) = 0 \\
&\Longrightarrow (x_1 - x_2) = 0 \vee (x_1x_2 = 1) \\
&\Longrightarrow (x_1 = x_2) \vee (x_1 = x_2 = 1 \vee x_1 = x_2 = -1)
\end{aligned}$$

   donc g est injective.
   Montrons que g est surjective.
   Résolvons l'équation $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$, on a :

$$y = \frac{2x}{1+x^2} \Longrightarrow yx^2 - 2x + y = 0.$$

$$\Delta = 4 - 4y^2 = 4(1 - y^2) \geq 0,\ \ car\ y \in [-1, 1].$$

   donc l'équation $y = g(x)$ admet deux solutions ($y \neq 0$):

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{y} \ \ et\ x_2 = \frac{1 + \sqrt{1-y^2}}{y} \notin [-1, +1].$$

   si $y = 0 \Longrightarrow x = 0$
   d'où g est surjective.

comme g est injective et surjective, alors g est bijective, et

$$g^{-1} : [-1, +1] \longrightarrow [-1, +1]$$

et

$$x = g^{-1}(y) = \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y}.$$

Exercice 3. *(5 pts)*

1. *Calculons les limites suivantes :*
   a) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{\sin x}$.
   On a
   $$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{\sin x} = \frac{0}{0} \text{ (Forme indéterminée)}$$
   En appliquant la régle de l'Hôpital, on a :
   $$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{\sin x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{(\ln(1 + x^2))'}{(\sin x)'} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\frac{2x}{1 + x^2}}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0.$$
   b) $\lim\limits_{x \longrightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}, a > 0$. *On a*
   $$\lim_{x \longrightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{0}{0} \text{ (Forme indéterminée)}$$
   On a
   $$\lim_{x \longrightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x \longrightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \lim_{x \longrightarrow a^+} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$
2. *La continuité de f en* $x_0 = 1$.
   On a
   * $f(1) = 4$.
   * $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} \sqrt{x + 3} + 2 = 4$
   * $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \frac{(x^2 + 2x - 3)'}{(x - 1)'} = \lim\limits_{x \longrightarrow 1+} \frac{2x + 2}{1} = 4.$
   Comme $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = f(1)$, *alors f est continue en* $x_0 = 1$.