



SCIENCES SUP

Cours et exercices corrigés

Licence 1^{re} et 2^e années

COURS DE PHYSIQUE
**MÉCANIQUE
DU POINT**

2^e édition

*Alain Gibaud
Michel Henry*

DUNOD

COURS DE PHYSIQUE

MÉCANIQUE DU POINT

Alain Gibaud

Professeur à l'université du Maine (Le Mans)

Michel Henry

Agrégé de physique
Maître de conférences à l'IUFM des Pays de Loire (Le Mans)

2^e édition

DUNOD

Consultez nos catalogues sur le Web



www.dunod.com

Illustration de couverture : *Digital Vision*

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du

Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 1999, 2007 pour la seconde édition
ISBN 978-2-10-050586-9

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^e et 3^e a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

AVANT-PROPOS

Le cours présenté dans ce livre est le fruit de plusieurs années d'enseignement dispensé aux étudiants de première année à l'université du Maine. Il s'agit d'un cours d'introduction à la mécanique du point et des systèmes de points matériels. Notre souci au cours de la rédaction de cet ouvrage a été de nous référer aux connaissances acquises par les étudiants dans les classes du secondaire afin d'assurer une transition la plus continue possible.

La principale difficulté que nous avons rencontrée lors de ce cours a été certainement d'ordre mathématique. La mécanique est une science qui exige de la rigueur et les concepts acquis lors de l'apprentissage dans le secondaire sont ici repris de façon plus formelle et rigoureuse. Nous présentons donc, en annexe 1, les outils mathématiques qui nous semblent nécessaires à la bonne compréhension du cours de physique.

Le premier et le second chapitres sont consacrés à la cinématique du point ainsi qu'aux changements de référentiels. Nous insistons plus particulièrement sur la définition du référentiel ; cette définition conditionne bien souvent la façon de traiter un problème et reste, bien des fois, mal comprise.

Nous présentons ensuite les lois fondamentales de la mécanique en décrivant les forces les plus classiques susceptibles d'intervenir dans les problèmes de mécanique. Nous introduisons alors les concepts d'énergie et de puissance avant de présenter les oscillateurs libres et forcés.

La partie suivante montre que pour traiter un problème de mécanique dans un référentiel non galiléen il est nécessaire d'introduire des pseudos forces appelées forces d'inertie. L'étude du poids d'un corps sur Terre met en évidence le fait que le référentiel terrestre n'est pas galiléen. L'étude du phénomène des marées conduit à la même conclusion pour le référentiel géocentrique.

Les deux derniers chapitres sont consacrés au problème à deux corps. L'accent est mis sur la notion de référentiel barycentrique. L'étude de la trajectoire d'un système à deux corps permet de retrouver les lois de Kepler auxquelles obéissent les planètes du système solaire. Une présentation de la mécanique céleste se trouve à la fin du livre en annexe 2.

Cet ouvrage s'adresse bien sûr aux étudiants du premier cycle universitaire mais aussi à ceux des classes préparatoires, du CAPES et de l'agrégation. Nous espérons qu'il leur sera une aide précieuse dans leur effort de compréhension de cette branche de la physique.

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|---|-----------|
| <i>Avant-propos</i> | III |
| CHAPITRE 1. CINÉMATIQUE DU POINT | 1 |
| 1. De la nécessité du référentiel | 1 |
| 2. Vitesse d'un point matériel | 5 |
| 3. Accélération d'un point matériel | 9 |
| 4. Récapitulatif | 11 |
| 5. Exemples de mouvements | 12 |
| <i>À retenir</i> | 18 |
| <i>Exercice d'application avec solution détaillée</i> | 19 |
| <i>Exercices</i> | 20 |
| <i>Solutions</i> | 23 |
| CHAPITRE 2. CHANGEMENTS DE RÉFÉRENTIELS | 29 |
| 1. Mouvements d'un référentiel par rapport à un autre | 29 |
| 2. Étude de la vitesse | 34 |
| 3. Étude de l'accélération | 41 |
| <i>À retenir</i> | 43 |
| <i>Exercice d'application avec solution détaillée</i> | 44 |
| <i>Exercices</i> | 47 |
| <i>Solutions</i> | 51 |
| CHAPITRE 3. LOIS DE NEWTON ET RÉFÉRENTIELS GALILÉENS | 57 |
| 1. Principe d'inertie : première loi de Newton | 57 |
| 2. Principe de la dynamique : deuxième loi de Newton | 62 |
| 3. Actions réciproques : troisième loi de Newton | 65 |
| 4. Les forces | 66 |
| 5. Applications | 72 |
| <i>À retenir</i> | 77 |
| <i>Exercices d'application avec solution détaillée</i> | 78 |
| <i>Exercices</i> | 83 |
| <i>Solutions</i> | 86 |
| CHAPITRE 4. TRAVAIL, PUISSANCE, ÉNERGIE | 93 |
| 1. Travail d'une force | 93 |
| 2. Exemples de calcul du travail | 95 |
| 3. Puissance d'une force | 98 |
| 4. Énergie | 98 |
| 5. États liés d'un système mécaniquement isolé | 104 |
| <i>À retenir</i> | 107 |

| | |
|--|------------|
| <i>Exercices d'application avec solution détaillée</i> | 109 |
| <i>Exercices</i> | 121 |
| <i>Solutions</i> | 121 |
| CHAPITRE 5. OSCILLATEURS MÉCANIQUES | 125 |
| 1. L'oscillateur harmonique | 125 |
| 2. Équation différentielle | 127 |
| 3. Exemples d'oscillateurs harmoniques | 128 |
| 4. Étude énergétique des oscillateurs | 130 |
| 5. Oscillateur mécanique amorti par frottements visqueux | 132 |
| 6. Analogie électrique | 137 |
| 7. Oscillateur amorti par frottement solide | 137 |
| 8. Portrait de phase d'un oscillateur | 141 |
| <i>À retenir</i> | 143 |
| <i>Exercices d'application avec solution détaillée</i> | 144 |
| <i>Exercices</i> | 152 |
| <i>Solutions</i> | 153 |
| CHAPITRE 6. OSCILLATIONS FORCÉES, RÉSONANCE | 155 |
| 1. Oscillations forcées | 155 |
| 2. Solution de l'équation différentielle | 158 |
| 3. Transfert de puissance | 163 |
| 4. Facteur de qualité | 165 |
| <i>À retenir</i> | 166 |
| <i>Exercices d'application avec solution détaillée</i> | 167 |
| CHAPITRE 7. INTERACTION GRAVITATIONNELLE | 175 |
| 1. Attraction universelle | 175 |
| 2. Champ de gravitation terrestre | 177 |
| 3. Énergie potentielle de gravitation | 179 |
| 4. Applications | 181 |
| <i>À retenir</i> | 185 |
| CHAPITRE 8. RÉFÉRENTIELS NON GALILÉENS | 187 |
| 1. Introduction | 187 |
| 2. Loi de la dynamique dans un référentiel non galiléen | 188 |
| 3. Exemples d'application | 189 |
| 4. Dynamique terrestre | 197 |
| <i>À retenir</i> | 209 |
| <i>Exercices d'application avec solution détaillée</i> | 209 |
| <i>Exercices</i> | 219 |
| <i>Solutions</i> | 221 |
| CHAPITRE 9. SYSTÈMES À DEUX CORPS | 227 |
| 1. Éléments cinétiques | 227 |
| 2. Référentiel du centre de masse | 229 |
| 3. Relation fondamentale de la dynamique | 232 |
| 4. Propriétés du mouvement | 236 |
| <i>À retenir</i> | 241 |

| | |
|--|------------|
| <i>Exercices d'application avec solution détaillée</i> | 242 |
| CHAPITRE 10. TRAJECTOIRES D'UN SYSTÈME À DEUX CORPS | 253 |
| 1. Rappels | 253 |
| 2. Équation polaire de la trajectoire : Formule de Binet. | 254 |
| 3. Résolution de la formule de Binet | 256 |
| 4. Étude des trajectoires | 257 |
| 5. Étude énergétique | 260 |
| 6. Trajectoires elliptiques : lois de Kepler | 261 |
| <i>À retenir</i> | 265 |
| <i>Exercices d'application avec solution détaillée</i> | 265 |
| <i>Exercices</i> | 274 |
| <i>Solutions</i> | 277 |
| ANNEXE 1. RAPPEL DES OUTILS MATHÉMATIQUES | 283 |
| 1. Scalaires et vecteurs | 283 |
| 2. Composantes d'un vecteur | 286 |
| 3. Produit scalaire | 288 |
| 4. Produit vectoriel | 290 |
| 5. Dérivation vectorielle | 293 |
| 6. Différentielle d'une fonction | 294 |
| 7. Vecteur gradient d'une fonction | 302 |
| 8. Intégrales et primitives | 304 |
| 9. Intégrales vectorielles | 306 |
| ANNEXE 2. INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE CÉLESTE | 309 |
| 1. Historique | 309 |
| 2. Définitions | 311 |
| 3. La Voie Lactée | 312 |
| 4. Le Système Solaire | 313 |
| 5. La définition du temps | 316 |
| 6. Temps et repérage de la longitude des étoiles | 318 |
| 7. Repérage de l'altitude du Soleil au cours de l'année | 321 |
| <i>À retenir</i> | 322 |
| BIBLIOGRAPHIE | 325 |
| INDEX | 326 |

CHAPITRE 1

CINÉMATIQUE DU POINT

Pré-requis

- Connaître les systèmes de coordonnées cartésiennes, polaires et cylindriques.
- Savoir dériver les vecteurs de la base polaire ou cylindrique.
- Savoir intégrer quelques fonctions élémentaires (polynômes, fonctions trigonométriques, exponentielle etc.).
- Ces notions sont reprises en annexe, *Rappel des outils mathématiques*.

Objectif

- ▶ À partir du vecteur accélération d'un point, savoir retrouver le vecteur vitesse, les équations horaires du mouvement ainsi que l'équation de la trajectoire de ce point.
- ▶ Connaître l'expression des vecteurs position, vitesse et accélération dans les différents systèmes de coordonnées.
- ▶ Connaître la définition de quelques mouvements particuliers traités en fin de chapitre.
- ▶ L'objet de la cinématique du point est d'étudier le mouvement d'un point au cours du temps indépendamment des causes qui produisent ce mouvement. Les objectifs sont la détermination des grandeurs cinématiques telles que les vecteurs accélération, vitesse, position et l'équation horaire de la trajectoire de ce point par rapport à un référentiel choisi par l'observateur.

1. DE LA NÉCESSITÉ DU RÉFÉRENTIEL

L'étude du mouvement d'un point implique nécessairement la présence simultanée du point et d'un observateur qui analyse le mouvement de ce point. L'observateur est le pilier de l'étude du mouvement car selon sa position par rapport à l'objet en mouvement ses conclusions quant à la nature du mouvement seront très variables. Ainsi, dans un TGV qui se déplace à vitesse constante, un passager qui lâche verticalement une bille conclut que la bille a un mouvement rectiligne. La personne qui est sur le quai et qui observe la même scène conclut que le mouvement n'est pas rectiligne et pourtant il s'agit bien de la même bille. Un mouvement est donc toujours lié à un observateur. On dit qu'il est **relatif**.

Le mouvement d'un objet ne pourra se faire que par rapport à une référence. Il est donc nécessaire de définir ce que l'on appelle un **référentiel** ou **solide de référence** dans lequel l'observateur est fixe. On entend par solide de référence un ensemble de points tous fixes les uns par rapport aux autres. Par exemple, dans le cas cité plus haut, on peut choisir le TGV comme référentiel, l'observateur étant assis à l'intérieur, ou bien le référentiel terrestre (constitué par tout ce qui est fixe par rapport à la Terre) pour la personne restée sur le quai.

La figure 1.1 illustre bien qu'un mouvement est relatif à un référentiel choisi. Ainsi un observateur situé au sommet d'une montagne conclut que le pilote d'un avion se déplace très vite. L'observateur situé sur l'aile conclut de façon très différente que le pilote est bien installé au repos. Nous concluons donc que :

Le mouvement d'un point est toujours relatif à un référentiel.

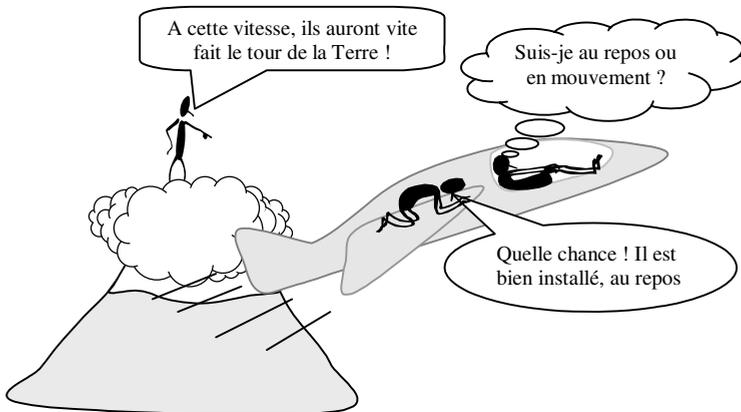


Figure 1.1 • Relativité du mouvement.

Pour caractériser le mouvement de l'objet, l'observateur a ensuite besoin de se repérer dans l'espace \mathbb{R}^3 qui l'entoure. Il lui faut pour déterminer la nature du mouvement connaître la position du point au cours du temps, c'est-à-dire pouvoir répondre aux questions suivantes :

Où se trouve le point ?

Quand est-il passé à cette position ?

Pour pouvoir répondre à la question *où ?*, il se choisit un **repère d'espace**. Le repère d'espace est défini par une **origine O** qui est fixe dans le référentiel et des **axes de référence (x, y, z)** qui permettent à l'observateur de juger dans quelle direction se trouve l'objet. Ces axes sont eux-mêmes liés au référentiel. En toute logique, l'origine O du repère doit être placée sur l'observateur. Aussi dans le cas de la figure 1.1, le référentiel est le référentiel montagne avec une origine O prise sur l'observateur qui s'y trouve. Cet observateur choisit ses axes x, y, z comme il l'entend afin de repérer la position d'un point de l'avion.

Pour un référentiel donné, il existe autant de repères d'espace que de choix d'origine et d'axes possibles, c'est-à-dire une infinité. Par contre, à un repère d'espace donné ne correspond qu'un seul référentiel constitué par tout ce qui est fixe par rapport à ce repère.

Pour pouvoir répondre à la question *quand ?*, il faut ajouter un repère de temps, c'est-à-dire une grandeur qui est la variable de temps. Cette variable est continue et croissante, ce qui traduit l'irréversibilité du temps. Elle est mesurée au moyen d'une horloge ou chronomètre à partir d'une origine des temps fixée par l'observateur et d'une durée unitaire fixant une **chronologie**.

À chaque **instant**, on associe un nombre réel appelé **date** qui correspond à la durée écoulée depuis l'instant origine.

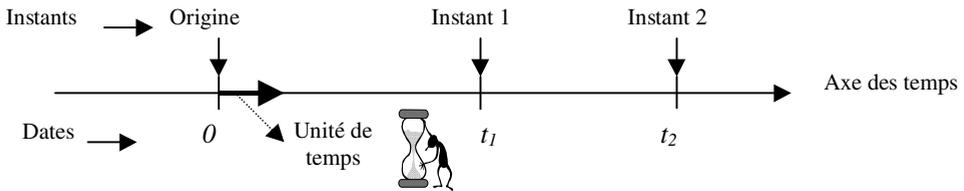


Figure 1.2 • Repère de temps. La durée entre les deux instants 1 et 2 correspond à la différence de leur date $t_2 - t_1$.

En mécanique classique ou newtonienne, on postule que le repère de temps est le même pour tous les référentiels et que le temps s'écoule de la même manière dans des référentiels en mouvement les uns par rapport aux autres. Ce principe d'universalité du temps n'est plus applicable dans le cadre de la mécanique relativiste. Notons que la mécanique relativiste est utilisée dès que la vitesse v d'un objet devient voisine de la célérité c de la lumière dans le vide. La transition entre les deux mécaniques est fixée en général à $v = c/10$.

Pour terminer nous signalons qu'un référentiel peut être caractérisé par son nom. Par exemple, il est très fréquent d'utiliser pour des observations faites à la surface de la Terre le référentiel terrestre. Il est clair alors que l'étude se fera par rapport à la Terre ou par rapport à tout ce qui est fixe sur Terre. On distingue plus particulièrement les référentiels de Copernic (figure 1.3), géocentrique (figure 1.3) et terrestre définis par :

- **Le référentiel de Copernic**

- origine : centre du Système Solaire (voisin du centre d'inertie du Soleil) ;
- axes dirigés vers les étoiles situées dans des directions fixes par rapport au Soleil ;
- propriété : supposé galiléen (voir chapitre 3).

- **Le référentiel géocentrique**

- origine : centre de la Terre ;
- axes dirigés parallèlement à ceux du référentiel de Copernic.

- **Le référentiel terrestre**

- origine : point de la surface de la Terre ;
- axes fixes par rapport à la Terre.

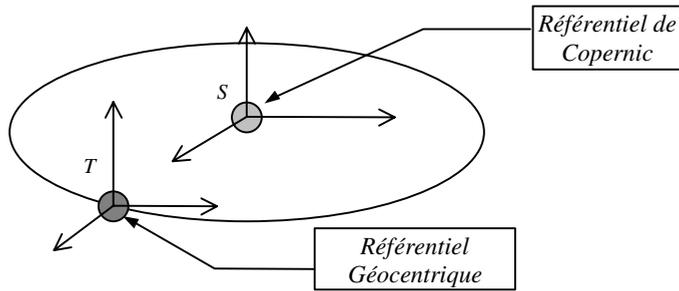


Figure 1.3 • Référentiels de Copernic et géocentrique. Il faut noter que les axes du référentiel géocentrique restent parallèles à ceux du référentiel de Copernic.

Au lieu de caractériser un référentiel par son nom, on convient souvent de le représenter par le symbole R associé à un repère d'espace et de temps. La notation suivante est d'usage courant :

$$\text{référentiel } R(O, x, y, z, t)$$

Pour une étude plus précise du mouvement d'un point mobile dans un référentiel R on est amené à définir sa position mais aussi des grandeurs vectorielles comme le vecteur vitesse ou accélération de ce point. Il faudra donc faire un choix de **système de coordonnées** (voir annexe : rappel des outils mathématiques) et utiliser la **base** correspondante :

- (x, y, z) en coordonnées cartésiennes avec la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ qui est une base dont les vecteurs sont fixes dans le repère.
- (ρ, θ, z) en coordonnées cylindriques avec la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ qui est une base dont les deux premiers vecteurs voient leur direction varier au cours du temps.
- (r, θ, φ) en coordonnées sphériques avec la base mobile $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$.

Il est important de noter que suivant le choix effectué, la base utilisée, comme outil mathématique, peut être fixe ou mobile dans le référentiel donné. Ceci a des conséquences importantes lorsqu'il s'agit de dériver des vecteurs. Pour éviter toute erreur ou confusion, on notera, à chaque fois qu'une étude est entreprise, le choix de la base en précisant si elle est fixe ou pas.

L'association de l'origine d'un repère d'espace, des axes du repère d'espace et de la chronologie définit le **référentiel d'étude**. On notera ensuite la base de projections utilisée en précisant si elle est fixe ou pas dans le référentiel. On notera donc un référentiel d'étude sous la forme présentée sur la figure 1.4.

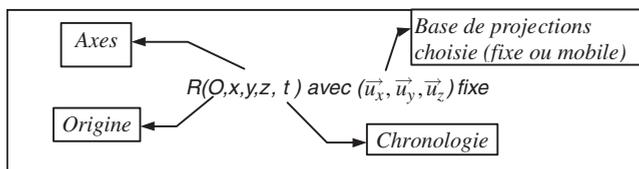


Figure 1.4 • Référentiel d'étude.

On appelle référentiel un solide de référence constitué de l'ensemble des points tous fixes les uns par rapport aux autres.

Un référentiel peut être défini par un de ses repères d'espace muni d'une origine, de trois axes et d'une chronologie : $R(O, x, y, z, t)$

Pour une étude plus précise, on notera, à la suite, la base utilisée en précisant si elle est fixe ou pas : $R(O, x, y, z, t)$ avec (base fixe ou mobile)

Si un référentiel est défini par un de ses repères, on prendra soin de noter :

- l'origine : O ;
- les axes du référentiel : x, y, z ;
- le temps : t .

On précisera ensuite, lorsque l'étude le nécessite, la base de projections dont on indiquera si elle est fixe ou non dans R .

2. VITESSE D'UN POINT MATÉRIEL

2.1. Définition

Soit un point M mobile dans un référentiel $R(O, x, y, z, t)$ avec $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ fixe.

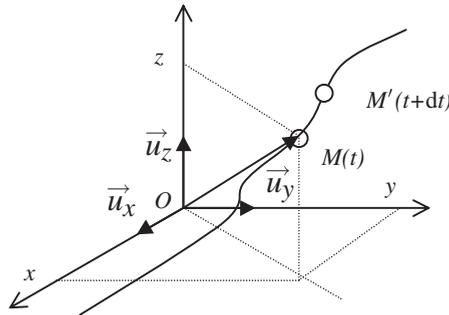


Figure 1.5 • Mouvement d'un point M dans le référentiel R .

On appelle **vitesse** du point M par rapport à R la dérivée du vecteur position \vec{OM} du point M par rapport au temps¹, soit :

$$\vec{v}_{M/R} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$$

Cette définition est la seule qui reste toujours valable quel que soit le problème considéré. D'un point de vue pratique, le calcul du vecteur vitesse se fait en considérant le déplacement élémentaire \vec{MM}' du point M entre les instants t et $t + dt$, qui n'est rien d'autre que le vecteur $d\vec{OM} = \vec{OM}' - \vec{OM} = \vec{MM}'$ (annexe 1, 6.5.).

1. La notation d/dt est qualifiée de notation de Leibniz.

2.2. Expression de la vitesse en coordonnées cartésiennes

Lorsque le repère dans lequel le mouvement est étudié est cartésien, la position du point M s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$$

Les vecteurs $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ sont constants et la dérivée de la position conduit à :

$$\vec{v}_{M/R} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z)}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{u}_x + \frac{dy}{dt} \vec{u}_y + \frac{dz}{dt} \vec{u}_z$$

L'écriture précédente peut être condensée en utilisant les variables surmontées d'un point pour décrire la dérivation temporelle. On écrit alors la vitesse de la façon suivante :

$$\vec{v}_{M/R} = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y + \dot{z} \vec{u}_z$$

2.3. Vitesse en coordonnées polaires ou cylindriques

On appelle coordonnées cylindriques des coordonnées relatives à une base tournante $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ autour de l'axe z dans le référentiel R . Les coordonnées sont dites cylindriques si elles font intervenir une coordonnée z en dehors du plan (O, x, y) et polaires dans le cas contraire.

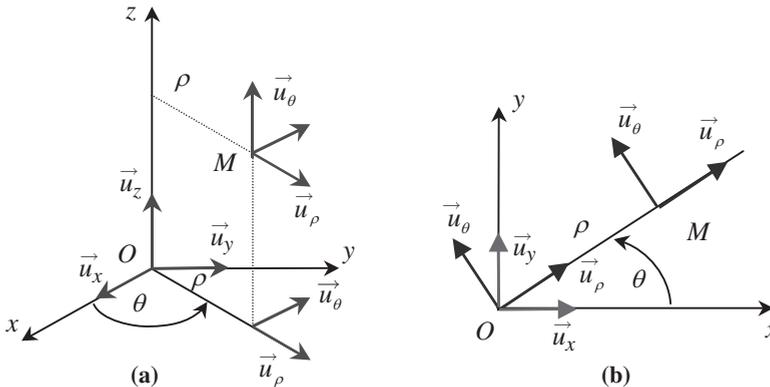


Figure 1.6 • Système de coordonnées cylindriques (a) et polaires (b).

En général, la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ est représentée au point M considéré mais elle peut tout aussi bien être placée en O .

Si le point M se déplace dans le plan xOy (figure 1.6b), il peut être repéré par ses coordonnées polaires $\rho = OM$ et la position angulaire $\theta = (\vec{u}_x, \overrightarrow{OM})$.

Dans la base mobile $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, la position du point M est alors définie par le vecteur :

$$\overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}_\rho$$

Il est impératif de remarquer que la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ est une base orthonormée et que les vecteurs $\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta$ sont des **vecteurs mobiles et donc variables** dans le temps, contrairement aux vecteurs $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ qui eux sont fixes.

En appliquant la définition de la vitesse, il est possible d'exprimer le vecteur vitesse du point M dans la base mobile, soit :

$$\vec{v}_{M/R} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d(\rho\vec{u}_\rho)}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho\frac{d\vec{u}_\rho}{dt}$$

Le calcul de la vitesse peut se faire en utilisant le théorème du vecteur unitaire tournant (annexe 1, 5.2.) qui impose que :

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \vec{u}_\theta \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

ce qui engendre qu'en coordonnées polaires :

$$\vec{v}_{M/R} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

En coordonnées cylindriques (figure 1.6a), il suffit de rajouter la troisième composante suivant l'axe Oz :

$$\vec{OM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{u}_z$$

L'expression du vecteur vitesse est alors obtenue en ajoutant la composante suivant \vec{u}_z :

$$\vec{v}_{M/R} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$$

L'utilisation des coordonnées cylindriques (ou polaires) est appréciable dès que le mouvement du point M est curviligne (circulaire ou elliptique).

Le vecteur vitesse que nous avons calculé et exprimé dans la base polaire représente la vitesse du point par rapport au référentiel R . Il s'agit bien du même vecteur que l'on exprime dans la base cartésienne par :

$$\vec{v}_{M/R} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y$$

2.4. Vitesse dans la base de Frenet

Il est également possible de déterminer la vitesse du point M dans le référentiel R en utilisant une nouvelle base appelée **base de Frenet**. La base de Frenet est une base locale qui se déplace avec le point M . Elle est utilisée lorsque le mouvement du point M est curviligne. Elle fait intervenir le **cercle osculateur** à la trajectoire du point M , c'est-à-dire le cercle qui est tangent localement à la trajectoire du point M . L'un des vecteurs de base est tangent à la trajectoire et est orienté dans le sens positif donné à la trajectoire, l'autre vecteur est dirigé selon le rayon de courbure de la trajectoire, vers le centre du cercle osculateur.

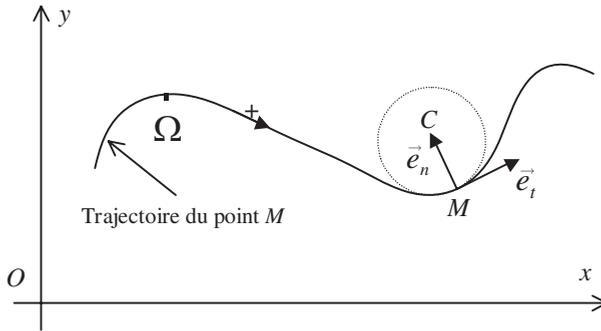


Figure 1.7 • Abscisse curviligne et base de Frenet.

La vitesse du point M est par définition :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \frac{ds}{dt}$$

avec $s = \widehat{\Omega M}$ (mesure algébrique sur la courbe de la distance ΩM).

Lorsque l'on fait varier de façon élémentaire la position du point M en décrivant la trajectoire, l'abscisse curviligne du point M passe de s à $s + ds$ entre l'instant t et l'instant $t + dt$. Le déplacement élémentaire du point M s'écrit donc :

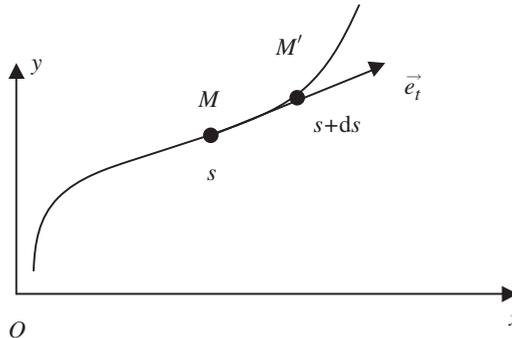


Figure 1.8 • Présentation du déplacement élémentaire sur la trajectoire curviligne.

$$d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = ds \vec{e}_t$$

ce qui permet d'écrire que la vitesse dans la base de Frenet est :

$$\vec{v}_{M/R} = \frac{ds}{dt} \vec{e}_t = \dot{s} \vec{e}_t$$

Remarque. Le vecteur unitaire tangent à la trajectoire peut être déterminé analytiquement à partir de l'équation ci-dessus :

$$\vec{e}_t = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}$$

3. ACCÉLÉRATION D'UN POINT MATÉRIEL

3.1. Définition

On appelle accélération d'un point matériel M par rapport à un référentiel R la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps, soit :

$$\vec{a}_{M/R} = \frac{d\vec{v}_{M/R}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}$$

L'accélération est aussi la dérivée seconde de la position par rapport au temps.

3.2. Expression en coordonnées cartésiennes

Considérons une base orthonormée cartésienne $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ du référentiel R servant à définir la position du point M . L'accélération du point M dans cette base s'écrit, puisque les vecteurs de base $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ sont constants :

$$\vec{a}_{M/R} = \frac{d\vec{v}_{M/R}}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$$

avec la notation suivante : $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$.

3.3. Expression en coordonnées polaires ou cylindriques

Si l'on utilise comme base de référence du référentiel la base polaire $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ qui est une base qui tourne avec la position du point M dans le plan (xOy) , nous avons montré que la vitesse dans cette base s'écrit : $\vec{v}_{M/R} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

L'accélération du point M par rapport au référentiel R s'exprime dans cette base par :

$$\vec{a}_{M/R} = \frac{d\vec{v}_{M/R}}{dt} = \frac{d(\dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta)}{dt} = \ddot{\rho}\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

En utilisant le théorème du vecteur unitaire tournant, il vient :

$$\vec{a}_{M/R} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$$

L'accélération du point M dans cette base a deux composantes : une composante radiale (suivant \vec{u}_ρ) et une composante orthoradiale (suivant \vec{u}_θ).

En coordonnées polaires, le vecteur accélération s'écrit :

$$\vec{a}_{M/R} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$$

En coordonnées cylindriques, il suffit de rajouter la troisième composante suivant l'axe Oz :

$$\vec{v}_{M/R} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$$

L'expression du vecteur accélération est obtenue en ajoutant la composante \ddot{z} suivant \vec{u}_z :

$$\vec{a}_{M/R} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + 2(\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z$$

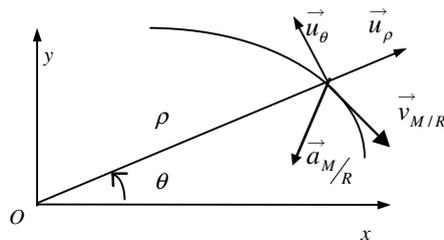


Figure 1.9 • Vecteurs vitesse et accélération en coordonnées polaires.

3.4. Expression dans la base de Frenet

L'accélération du point M peut également s'exprimer dans la base de Frenet. Dans cette base, la vitesse s'écrit :

$$\vec{v}_{M/R} = \dot{s} \vec{e}_t$$

ce qui entraîne pour l'accélération :

$$\vec{a}_{M/R} = \ddot{s} \vec{e}_t + \dot{s} \frac{d\vec{e}_t}{dt}$$

À un instant t , au point M de la trajectoire, le vecteur de base fait un angle α avec la direction de l'axe des x . À l'instant $t + dt$, ce vecteur tourne d'un angle $d\alpha$ (figure 1.10).

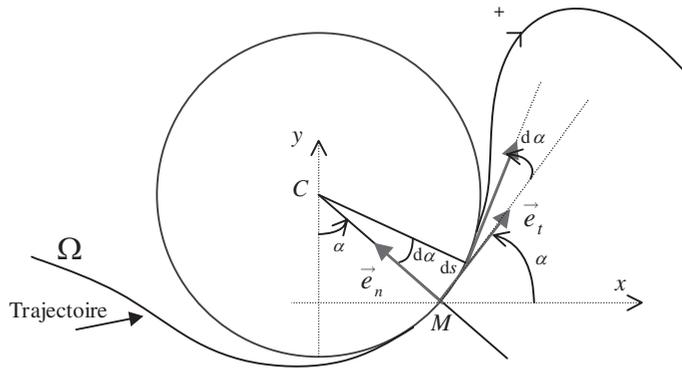


Figure 1.10 • Base de Frenet et déplacement élémentaire.

La dérivée, par rapport au temps, de ce vecteur unitaire est donc donnée par :

$$\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \dot{\alpha} \vec{e}_n$$

De plus on a , avec R = rayon du cercle osculateur :

$$ds = CM d\alpha = R d\alpha$$

soit :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha} = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{R} \dot{s}$$

On obtient donc :

$$\dot{s} \frac{d\vec{e}_t}{dt} = \dot{s} \dot{\alpha} \vec{e}_n = \frac{\dot{s}^2}{R} \vec{e}_n = \frac{v_{M/R}^2}{R} \vec{e}_n$$

ce qui conduit à :

$$\vec{a}_{M/R} = \ddot{s} \vec{e}_t + \frac{v_{M/R}^2}{R} \vec{e}_n$$

Remarques

- On pourra vérifier que ce résultat est toujours vrai quelle que soit la concavité de la trajectoire.
- La composante normale étant toujours positive, le vecteur accélération est toujours tourné vers la concavité de la trajectoire au point considéré.

4. RÉCAPITULATIF

Nous présentons dans le tableau suivant le récapitulatif des expressions que nous avons introduites précédemment.

| Base | Position | Vitesse | Accélération |
|--|---|--|--|
| Cartésienne $O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ | $\vec{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$ | $\vec{v}_{M/R} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$ | $\vec{a}_{M/R} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$ |
| Cylindrique $O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$ | $\vec{M} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{u}_z$ | $\vec{v}_{M/R} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$ | $\vec{a}_{M/R} = \begin{vmatrix} (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho \\ (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta \\ \ddot{z}\vec{u}_z \end{vmatrix}$ |
| Base de Frenet $\Omega; \vec{e}_t, \vec{e}_n$ | $s = \widehat{OM}$ | $\vec{v}_{M/R} = \dot{s}\vec{e}_t = v\vec{e}_t$ | $\vec{a}_{M/R} = \dot{v}\vec{e}_t + \frac{v^2}{R}\vec{e}_n$ |

Remarque. Il est également possible de définir, à partir de la position angulaire d'un point M se déplaçant dans le plan O, x, y , le vecteur *vitesse angulaire* $\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{u}_z$ et le vecteur *accélération angulaire* $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \ddot{\theta}\vec{u}_z$. Ces vecteurs sont perpendiculaires au plan dans lequel se fait le mouvement de M .

Le signe de $\dot{\theta}$ (et donc le sens du vecteur $\vec{\omega}$) permet de savoir dans quel sens le système tourne en appliquant la règle habituelle du tire-bouchon (voir annexe). La figure 1.11 illustre ce propos ; le point M tourne dans le sens trigonométrique et le tire bouchon qui tourne dans ce sens se déplace dans le sens des $z > 0$. Le vecteur vitesse angulaire est donc orienté dans le même sens que \vec{u}_z .

Le mouvement est accéléré si $|\dot{\theta}|$ croît avec le temps c'est-à-dire si $\dot{\theta}^2$ est une fonction croissante du temps. La dérivée $2\dot{\theta}\ddot{\theta}$ doit être positive. L'étude du signe du produit $\dot{\theta}\ddot{\theta}$ indiquera si le mouvement est accéléré ($\dot{\theta}\ddot{\theta} > 0$, les deux vecteurs vitesse et accélération angulaires ont le même sens) ou décéléré ($\dot{\theta}\ddot{\theta} < 0$, les deux vecteurs sont alors de sens contraire).

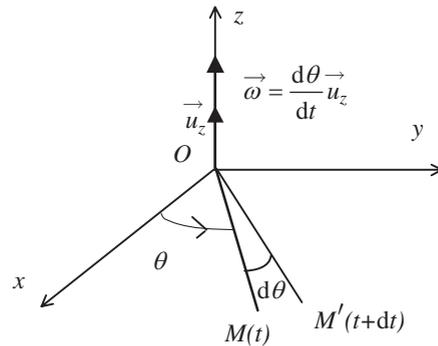


Figure 1.11 • L'angle θ croît au cours du temps donc la valeur algébrique de la vitesse angulaire est positive et le vecteur vitesse angulaire est dirigé dans le sens des z positifs.

Encart 1.1. Les équations différentielles du mouvement

L'étude du mouvement d'un point matériel a pour but de déterminer les équations horaires de la trajectoire, c'est-à-dire la loi d'évolution des composantes de la position du point matériel en fonction du temps. Les équations horaires de la trajectoire ne

peuvent être obtenues que si l'on connaît au préalable l'accélération de ce point. C'est en faisant le bilan des actions qui agissent sur le point matériel que l'on détermine, par la relation fondamentale de la dynamique, l'accélération du point matériel. On obtient alors l'**équation différentielle** du mouvement du point matériel, c'est-à-dire une équation qui relie l'accélération, la vitesse et la position instantanée du point à la variable t . Nous distinguerons plusieurs types d'équations différentielles selon leurs formes. À titre d'exemple non exhaustif, nous trouvons les équations différentielles suivantes :

$$\ddot{x} = 0 ; \quad \dot{x} + ax = 0 ; \quad \ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$$

La dernière équation est sans doute l'une des équations les plus connues de la physique puisqu'on la rencontre dans tous les problèmes d'oscillateurs, que ce soit en mécanique ou en électricité. Cette équation fait intervenir seulement la variable x ainsi que ses dérivées. Elle est qualifiée de linéaire car si la variable x est multipliée par une constante il en va de même pour ses dérivées, ce qui fait que la forme de l'équation n'est pas modifiée si elle est multipliée par une constante. Sa résolution ne pose pas de difficultés particulières. Il faut cependant noter que ce type d'équation résulte d'une modélisation souvent simplifiée de phénomènes physiques et que la réalité est parfois plus complexe. Les problèmes réels font souvent appel à des équations différentielles non linéaires qui associent par exemple la variable x à une puissance $n > 1$ à ses dérivées, comme l'équation suivante :

$$\dot{x} + ax^3 = 0$$

On voit alors que, si la variable x est multipliée par une constante, l'équation change de forme. Dans de tels cas l'utilisation de l'ordinateur devient le seul recours possible pour déterminer la solution qui dépend très fortement des conditions initiales du mouvement (« effet papillon »).

À partir de l'équation différentielle du mouvement du point, on détermine les équations horaires du mouvement. Il importe de noter que généralement il existe autant d'équations différentielles qu'il y a de variables de position dans le problème. L'obtention des équations horaires du mouvement se fait par intégration des équations différentielles.

5. EXEMPLES DE MOUVEMENTS

5.1. Mouvements rectilignes

a) Le mouvement rectiligne uniforme

Un mouvement d'un point matériel est dit **rectiligne uniforme** si le point matériel se déplace à vecteur vitesse constant.

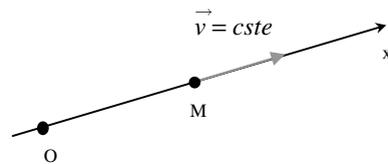


Figure 1.12 • Mouvement rectiligne uniforme ; le point M se déplace sur une droite à vitesse constante.

Mouvement rectiligne uniforme $\iff \vec{v} = \overrightarrow{cste}$

Le vecteur vitesse étant constant, le mouvement est rectiligne car la vitesse est tangente à la trajectoire. La droite sur laquelle le point se déplace est assimilée à l'axe des x . L'équation différentielle du mouvement s'écrit alors :

$$\vec{v} = \dot{x} \vec{u}_x = C \vec{u}_x \Rightarrow \dot{x} = C$$

ce qui conduit à l'équation horaire suivante :

$$x = Ct + x_0$$

b) Le mouvement uniformément varié

Un mouvement est dit rectiligne uniformément varié si le vecteur accélération est constant et la trajectoire rectiligne.

Mouvement rectiligne uniformément varié $\iff \vec{a} = \overrightarrow{cste}$ et trajectoire rectiligne

Si le mouvement est rectiligne, il est commode de se fixer comme axe du mouvement l'axe des x . On aura donc :

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{u}_x \implies \vec{v} = \dot{x} \vec{u}_x \implies \vec{a} = \ddot{x} \vec{u}_x$$

et

$$\vec{a} = \ddot{x} \vec{u}_x = C \vec{u}_x$$

Par intégration de cette équation nous obtenons la vitesse du point M :

$$v = \dot{x} = Ct + B$$

ce qui, par une nouvelle intégration, conduit à l'équation horaire du mouvement :

$$x = \frac{1}{2} Ct^2 + Bt + D$$

Les constantes B et D qui sont apparues dans les deux intégrations successives, sont déterminées par les *conditions initiales* du mouvement du point M . Ainsi, si le point M a une vitesse nulle et est en $x = x_0$ à $t = 0$, les constantes B et D deviennent $B = 0$ et $D = x_0$ et l'équation horaire du mouvement s'écrit alors :

$$x = \frac{1}{2} Ct^2 + x_0$$

Remarques. Le mouvement est uniformément accéléré si la norme du vecteur vitesse est une fonction croissante de t , soit v^2 fonction croissante. La dérivée de v^2 doit donc être positive. La condition sera :

$$\frac{dv^2}{dt} > 0 \implies 2v \cdot \frac{dv}{dt} > 0$$

L'étude du signe du produit de la vitesse par l'accélération permettra de préciser si le mouvement est *accéléré* ($\dot{x} \cdot \ddot{x} > 0$) ou *retardé* ($\dot{x} \cdot \ddot{x} < 0$).

Avoir un vecteur accélération constant ne suffit pas pour dire que le mouvement est rectiligne. Il faut aussi que le vecteur vitesse ait la même direction que le vecteur accélération. Dans le cas contraire, on obtient un mouvement parabolique qui est traité à la fin de ce chapitre.

Encart 1.2. Un mouvement plus complexe

Nous considérons maintenant le cas d'un mouvement rectiligne plus complexe dans lequel nous supposons que l'accélération est de la forme :

$$\ddot{x} = pt$$

où p est une constante.

L'accélération est variable dans le temps et nous recherchons l'équation horaire du mouvement. Nous effectuons donc deux intégrations successives qui nous conduisent d'une part à la vitesse :

$$\ddot{x} = pt \implies dv = pt dt \implies v = \int pt dt$$

soit

$$v = p\frac{t^2}{2} + q = \dot{x}$$

et d'autre part à la position :

$$x = p\frac{t^3}{6} + qt + r$$

Comme toujours les constantes d'intégration q et r sont déterminées par les conditions initiales du mouvement qui, si elles se résument à $x = 0$ et $v = 0$ à $t = 0$, conduisent à :

$$x = p\frac{t^3}{6}$$

c) Mouvement rectiligne sinusoïdal

Le mouvement d'un point M est dit rectiligne sinusoïdal si, se produisant sur un axe Ox , l'abscisse x du point M s'écrit :

$$x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Le terme $\omega t + \varphi$ est appelé **phase à l'instant t** avec φ la phase à l'origine des dates ($t = 0$). Le terme X_m correspond à l'amplitude du mouvement, x variant sinusoïdalement de $-X_m$ à X_m comme le montre la figure 1.13. La vitesse a pour expression :

$$v = \dot{x} = -X_m \sin(\omega t + \varphi)$$

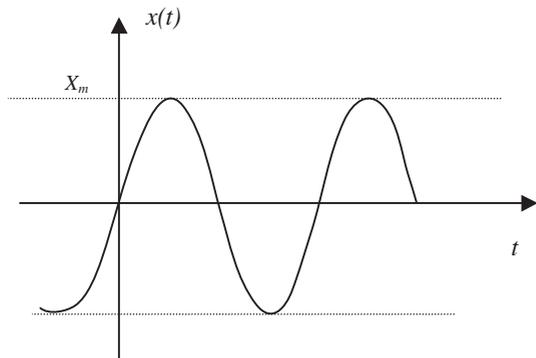


Figure 1.13 • Représentation du mouvement sinusoïdal dans le temps.

et l'accélération :

$$a = \ddot{x} = -\omega^2 X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

L'équation différentielle du mouvement est donc

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Cette équation correspond à l'équation différentielle du second ordre d'un oscillateur harmonique.

Remarque. La solution de cette équation différentielle peut s'écrire de différentes façons, toutes équivalentes. On a :

$$x = X_m \cos(\omega t + \varphi) = X_m \sin(\omega t + \varphi') = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

En utilisant les relations trigonométriques usuelles, on obtient très simplement :

$$\varphi' = \varphi + \pi/2 ; A = -X_m \sin \varphi ; B = X_m \cos \varphi.$$

5.2. Mouvement circulaire uniforme

Le mouvement d'un point est dit **circulaire uniforme** si :

- le point se déplace sur un cercle ;
- sa vitesse angulaire de rotation est constante.

L'équation différentielle du mouvement est donnée par :

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega = \text{cste}$$

ce qui conduit par intégration à

$$\theta = \omega t + \theta_0$$

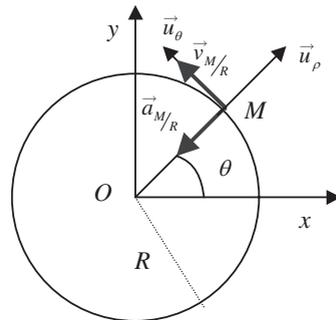


Figure 1.14 • Mouvement circulaire uniforme.

Les caractéristiques cinématiques du mouvement circulaire uniforme peuvent se déduire du schéma de la figure 1.14 et sont données par :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \rho \overrightarrow{u}_\rho(t) = \rho \cos \theta \overrightarrow{u}_x + \rho \sin \theta \overrightarrow{u}_y$$

$$\overrightarrow{v}(t) = \frac{d(\rho \overrightarrow{u}_\rho(t))}{dt} = \rho \dot{\theta} \overrightarrow{u}_\theta(t)$$

$$\overrightarrow{a}(t) = \frac{d\overrightarrow{v}(t)}{dt} = -\rho \dot{\theta}^2 \overrightarrow{u}_\rho(t)$$

Nous remarquons donc que le mouvement circulaire uniforme est un mouvement accéléré dont l'accélération est centripète. En remarquant que $\overrightarrow{u}_\theta = \overrightarrow{u}_z \wedge \overrightarrow{u}_\rho$ (annexe 1, 4.) on peut donner une expression du vecteur vitesse indépendante de la base choisie. En effet on obtient :

$$\overrightarrow{v}(t) = \rho \dot{\theta} \overrightarrow{u}_\theta(t) = \rho \dot{\theta} \overrightarrow{u}_z \wedge \overrightarrow{u}_\rho(t) = \dot{\theta} \overrightarrow{u}_z \wedge \rho \overrightarrow{u}_\rho(t) = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}(t)$$

Dans cette expression $\vec{\omega}$ est le vecteur vitesse angulaire. Cette relation est valable pour tout mouvement circulaire. On obtient de même pour le vecteur accélération :

$$\vec{a}(t) = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM}(t)) = \vec{\omega} \wedge \vec{v}(t)$$

Ce résultat peut être obtenu directement en dérivant le vecteur vitesse exprimé sous forme d'un produit vectoriel

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \wedge \vec{OM}(t))}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{OM}(t) + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{OM}(t)}{dt}$$

Si le mouvement est circulaire uniforme, le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ est un vecteur constant. Sa dérivée étant nulle, on retrouve bien l'expression du vecteur accélération.

5.3. Le mouvement hélicoïdal

Le mouvement hélicoïdal est la combinaison d'un mouvement de translation rectiligne uniforme selon l'axe des z et d'un mouvement circulaire uniforme dans le plan xOy .

Les équations horaires du mouvement selon les trois axes x, y, z du référentiel cartésien sont :

$$x(t) = R \cos \omega t ; \quad y(t) = R \sin \omega t ; \quad z(t) = v_0 t$$

Il est facile de déterminer par dérivations successives les composantes du vecteur vitesse et du vecteur accélération du point dans cette base :

$$\vec{v}_{M/R} = \begin{vmatrix} -R\omega \sin \omega t \\ R\omega \cos \omega t \\ v_0 \end{vmatrix} \quad \vec{a}_{M/R} = \begin{vmatrix} -R\omega^2 \cos \omega t \\ -R\omega^2 \sin \omega t \\ 0 \end{vmatrix}$$

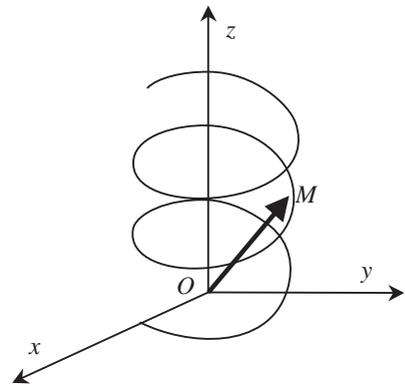


Figure 1.15 • Illustration d'un mouvement hélicoïdal.

De même, les expressions de la vitesse et de l'accélération dans la base cylindrique sont données par :

$$\vec{v}_{M/R} = \begin{vmatrix} 0 \\ R\omega \\ v_0 \end{vmatrix} \quad \vec{a}_{M/R} = \begin{vmatrix} -R\omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

5.4. Le mouvement parabolique

Supposons que le vecteur accélération soit un vecteur constant et qu'à l'instant $t = 0$ le vecteur vitesse \vec{v}_0 soit donné. Le choix du repère étant libre, nous pouvons décider de le définir à partir des données du problème. Nous faisons le choix suivant pour des raisons de bon sens (figure 1.16) :

- origine du repère : position du point à $t = 0$;
- axe z suivant le vecteur accélération, soit $\vec{a} = a_0 \vec{u}_z$;

- axe x perpendiculaire à l'axe z et dans le plan contenant \vec{a} et \vec{v}_o . On aura alors :

$$\vec{v}_o = v_{ox} \vec{u}_x + v_{oz} \vec{u}_z$$

- axe y défini de sorte que $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ forment une base orthonormée directe.

On obtient, par intégrations successives et en tenant compte des conditions initiales :

$$\vec{a}_{M/R} \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ a_o \end{array} \right. \implies \vec{v}_{M/R} \left| \begin{array}{c} v_{ox} \\ 0 \\ a_o t + v_{oz} \end{array} \right.$$

soit

$$\overrightarrow{OM} = \left| \begin{array}{l} x = v_{ox}t + x_o = v_{ox}t \\ y = y_o = 0 \\ z = \frac{1}{2}a_o t^2 + v_{oz}t + z_o = \frac{1}{2}a_o t^2 + v_{oz}t \end{array} \right.$$

Dans le cas où $\vec{v}_o = 0$, on retrouve le mouvement rectiligne uniformément varié suivant l'axe des z .

Pour $v_{ox} \neq 0$, le mouvement est un mouvement plan, dans le plan défini par le vecteur accélération et le vecteur vitesse à l'instant $t = 0$.

Le mouvement projeté suivant l'axe des x est un mouvement uniforme de vitesse v_{ox} .

Le mouvement projeté suivant l'axe des z est uniformément varié, d'accélération constante a_o .

En éliminant la variable t entre les deux équations horaires du mouvement, on obtient l'équation de la trajectoire :

$$t = \frac{x}{v_{ox}} \quad \text{et} \quad z = \frac{1}{2}a_o \frac{x^2}{v_{ox}^2} + v_{oz} \frac{x}{v_{ox}}$$

Si α est l'angle que fait le vecteur vitesse \vec{v}_o avec l'axe des x et v_o la norme de ce vecteur vitesse, on peut encore écrire :

$$z = \frac{1}{2}a_o \frac{x^2}{v_o^2 \cos^2 \alpha} + x \tan \alpha \quad (1.1)$$

La trajectoire est une portion de parabole.

La figure 1.16 représente la trajectoire d'un projectile pour lequel le vecteur accélération vaut :

$$\vec{a} = \vec{g} = -g \vec{u}_z \implies a_o = -g$$

où g est l'accélération de la pesanteur.

La **flèche** h correspond à l'altitude maximale que peut atteindre le point mobile. La **portée** d correspond à la distance maximale que peut atteindre le point lorsque qu'il revient à l'ordonnée $z = 0$.

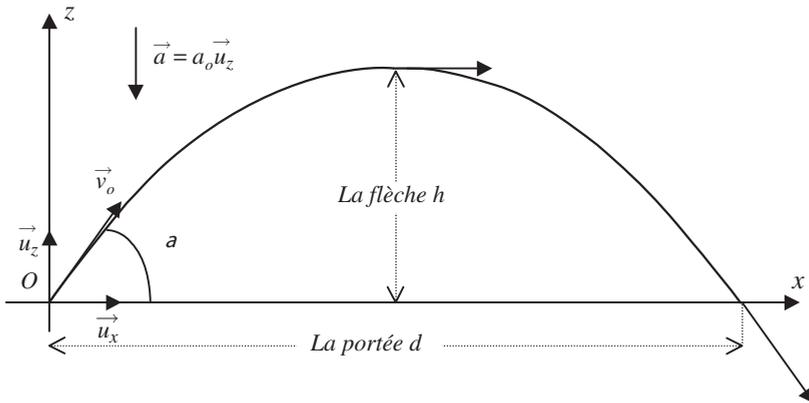


Figure 1.16 • Chute parabolique. L'accélération correspond ici à l'accélération de la pesanteur.

a) Calcul de la portée

$$z = 0 \implies x = 0 \text{ et } x = d = \frac{v_0^2}{a_0} 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

La portée est maximale pour $2\alpha = \pi/2$, soit pour un angle $\alpha = \pi/4 = 45^\circ$ (il importe de noter que ce résultat n'est valide que si l'on part d'une altitude de lancement $z = 0$).

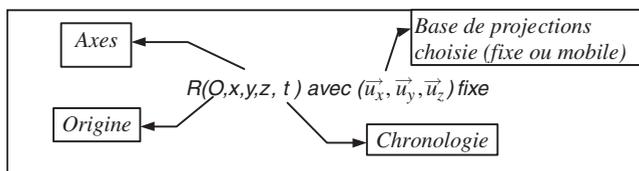
b) Calcul de la flèche

Elle peut être obtenue de différentes façons. On peut rechercher, par exemple, l'ordonnée correspondant à l'abscisse $x = d/2$. On obtient alors :

$$h = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha$$

À RETENIR

► L'étude du mouvement d'un point nécessite un référentiel caractérisé par :



► Expressions des vecteurs position \vec{OM} , vitesse $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$ et accélération $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}$ dans les différents systèmes de coordonnées.

| Coordonnées | Cartésiennes | Cylindriques | Frenet |
|------------------------------|--|---|--|
| Base | $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ | $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ | (\vec{e}_t, \vec{e}_n) |
| Position \vec{OM} | $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{bmatrix}$ | $s = \widehat{OM}$ |
| Vitesse $\vec{v}_{M/R}$ | $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \rho\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{bmatrix}$ | $\dot{s}\vec{e}_t = v\vec{e}_t$ |
| Accélération $\vec{a}_{M/R}$ | $\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) \\ (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}) \\ \ddot{z} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \dot{s}\vec{e}_t \\ \frac{v^2_{M/R}}{R}\vec{e}_n \end{bmatrix}$ |

► Différents mouvements simples :

- Mouvement rectiligne uniforme $\Rightarrow \vec{v} = cste$.
- Mouvement rectiligne uniformément varié $\Rightarrow \vec{a} = cste$ et \vec{a} et \vec{v} ont même direction.
- Mouvement circulaire uniforme $\Rightarrow \omega = \dot{\theta} = cste$ et accélération normale et centripète $a = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$.

EXERCICE D'APPLICATION AVEC SOLUTION DÉTAILLÉE

Cinématique

Dans un repère cartésien (O, x, y, z) , muni de la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, un point M en mouvement a pour équations horaires

$$\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \\ z = 0 \end{cases} \quad (\text{unités du système international})$$

- 1) Déterminer l'équation de la trajectoire et montrer que c'est un cercle dont le centre C est sur l'axe Ox ($OC = +1$ m) et dont le rayon est $R = 1$ m.
- 2) Exprimer le vecteur vitesse \vec{V} . Préciser sa direction par rapport à la trajectoire. Donner la valeur de la vitesse V du point M et montrer que le mouvement est uniforme.
- 3) Exprimer le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ (ou vecteur rotation). Donner la valeur de ω .
- 4) Exprimer le vecteur accélération \vec{a} . Le comparer avec le vecteur \vec{CM} . Que peut-on dire de ce vecteur par rapport au vecteur vitesse \vec{V} et par rapport à la trajectoire. Donner la valeur de a .

5) Représenter la trajectoire, le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$, le vecteur vitesse \vec{V} ainsi que le vecteur accélération \vec{a} en un point M quelconque.

Solution

1) $(x - 1)^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \Rightarrow$ trajectoire est un cercle de centre $x_0 = 1$ m et $y_0 = 0$ soit $\vec{OC} = \vec{u}_x$ et de rayon $R = 1$ m (dans le plan Oxy).

2) $\begin{cases} \dot{x} = -\sin t \\ \dot{y} = \cos t \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{V} = -\sin t \vec{u}_x + \cos t \vec{u}_y \Rightarrow \|\vec{V}\| = \sin^2 t + \cos^2 t = 1 \text{ m.s}^{-1}$.

La vitesse est constante, le mouvement est donc uniforme. Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire circulaire (perpendiculaire au rayon correspondant).

3) $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{u}_z, \Rightarrow \omega = \frac{V}{R} = 1 \text{ rad.s}^{-1}$

4) $\begin{cases} \ddot{x} = -\cos t \\ \ddot{y} = -\sin t \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = -(\cos t) \vec{u}_x - (\sin t) \vec{u}_y$.

Ce vecteur est normal et centripète (mouvement circulaire uniforme) dirigé de M vers C . Ce vecteur est perpendiculaire au vecteur vitesse.

$$\vec{CM} = \vec{OM} - \vec{OC} = \vec{OM} - \vec{u}_x$$

$$\vec{CM} = (1 + \cos t - 1) \vec{u}_x + (\sin t) \vec{u}_y = -\vec{a}$$

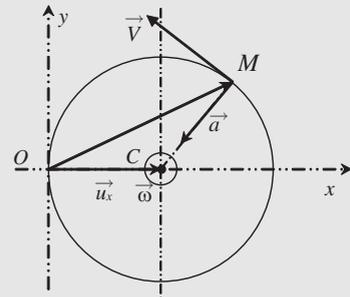


Figure 1.17

EXERCICES CORRIGÉS

1) **Mouvement rectiligne uniforme.** À l'instant $t = 0$, deux navires, N' et N , sont situés sur un même méridien. Le navire N' est à une distance a au nord de N .

1) N se dirige vers le nord à la vitesse v , N' vers l'est avec la vitesse constante v' . Quelle sera la distance minimale entre les deux navires ?

2) N' se dirige vers l'est avec la vitesse v' , constante. Quelle direction doit prendre N pour atteindre N' en ligne droite ? Calculer la durée correspondante.

2) **Mouvement rectiligne uniforme.** Un tracteur partant d'un point A situé sur une route rectiligne doit atteindre un point B situé dans un champ à la distance $d = CB$ de la route, et ce, dans un temps minimal (voir figure 1.18). On suppose les trajets successifs AD et DB rectilignes et parcourus à vitesse constante par le tracteur qui va deux fois moins vite dans le champ que sur la route. On pose $AC = l$ et $AD = x$.

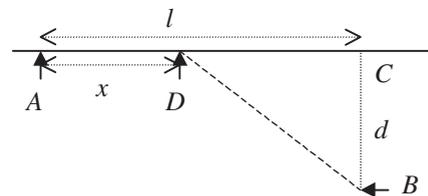


Figure 1.18

- 1) Exprimer la durée t du trajet ADB en fonction de x .
- 2) En quel point D le tracteur doit-il quitter la route ?

3 Mouvement rectiligne uniformément varié. Sur le quai d'une gare, une voyageuse, en retard court, pour essayer de prendre son train, à une vitesse constante $v = 8 \text{ m.s}^{-1}$.

Le train démarre alors qu'elle est encore à 100 mètres du dernier wagon. L'accélération constante du train est de $a = 0,5 \text{ m.s}^{-2}$.

- 1) La voyageuse rejoindra-t-elle son train? Sinon, à quelle distance minimale s'en trouvera-t-elle ?
- 2) Reprendre la question 1 dans le cas où le démarrage du train a lieu lorsque le dernier wagon est à 40 m de la voyageuse.
- 3) Quelle devrait être, à l'instant du démarrage, la distance minimale entre le train et la voyageuse pour que celle-ci atteigne effectivement le dernier wagon ?

4 Mouvement rectiligne sinusoïdal. Deux points mobiles A et B se déplacent tous les deux, le long d'un segment, d'un mouvement sinusoïdal d'amplitude 10 cm. Le point A a une pulsation $\omega_A = 10 \text{ rad.s}^{-1}$ et B une pulsation $\omega_B = 11 \text{ rad.s}^{-1}$.

- 1) À la date $t = 0$ s, ils passent dans le même sens à l'origine des abscisses. À quelle date se rencontrent-ils à nouveau, avec chacun une vitesse de même signe ?
- 2) Quelle distance aura parcouru le moins rapide ? le plus rapide ?

5 Échelle double. Une échelle double OAB est appuyée au bas d'un mur en O (figure 1.19). Le deuxième point d'appui B glisse sur le sol à la vitesse \vec{v}_B . On précise que $OA = AB = 2,5 \text{ m}$ et que la vitesse angulaire de OA garde la valeur constante de 10 degrés par seconde. À l'instant $t = 0$, $\theta = \theta_0 = 15^\circ$.

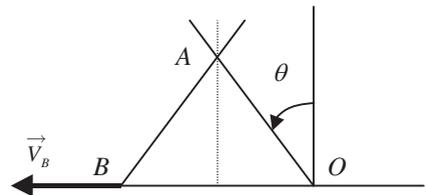


Figure 1.19

- 1) Donner l'équation $\theta = f(t)$
- 2) À quel instant t_1 l'angle \widehat{OAB} vaut-il 100° ?
- 3) À cet instant t_1 , donner les caractéristiques (direction, sens, module) du vecteur vitesse \vec{v}_{A1} et du vecteur accélération \vec{a}_{A1} du point A : faire un schéma représentant ces deux vecteurs.
- 4) Calculer en fonction de t la longueur OB .
- 5) En déduire les équations horaires de la vitesse v_B et de l'accélération a_B du point B .
- 6) Faire l'application numérique pour $t = t_1$.
- 7) Quelle est la nature du mouvement de B ?

6 Mouvement circulaire uniforme. Un pilote de chasse fait un looping. La trajectoire circulaire est située dans un plan vertical. La vitesse est supposée constante et égale à 1800 km.h^{-1} .

Sachant que le corps humain ne peut pas supporter une accélération supérieure à $10g$ ($g = 10 \text{ m.s}^{-1}$), calculer le rayon minimal que le pilote peut donner à la trajectoire.

- 7 Mouvement d'un point d'une roue.** Une roue circulaire, de rayon a et de centre C , roule sans glisser sur Ox , tout en restant dans le plan Oxy (figure 1.20). Un point A de la roue coïncide à l'instant $t = 0$ avec l'origine O du repère. Le centre C a une vitesse constante V_o .

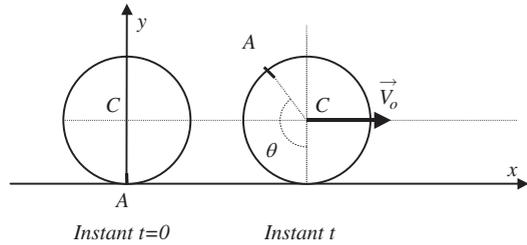


Figure 1.20

- 1) Déterminer les coordonnées de A à l'instant t .
 - 2) Calculer le module du vecteur vitesse de A et étudier ses variations au cours du temps.
 - 3) Pour quelles positions de A ce vecteur vitesse est-il nul ?
- 8 Rotation.** Le rotor d'une machine tourne à $1200 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$. À l'instant $t = 0$, il est soumis à une accélération angulaire $\ddot{\alpha}$ supposée constante jusqu'à l'arrêt complet. Il s'arrête en 300 tours.

- 1) Donner les équations horaires de $\dot{\alpha}$ et α .
- 2) Calculer la durée du freinage. Que vaut $\ddot{\alpha}$?

- 9 Rotation.** On considère un système de deux poulies reliées par une courroie (figure 1.21). La première poulie a un rayon $R_1 = 5 \text{ cm}$ et tourne à la vitesse angulaire constante $\omega_o = 180 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, la seconde a un rayon $R_2 = 30 \text{ cm}$.

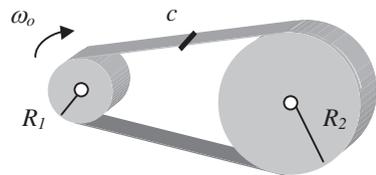


Figure 1.21

- 1) Calculer la vitesse angulaire de la seconde poulie.
 - 2) La courroie porte une marque C . Calculer l'accélération du point C au cours du mouvement.
- 10 Mouvement curviligne.** Un ballon sonde a une vitesse d'ascension verticale v_o indépendante de son altitude. Le vent lui communique une vitesse horizontale $v_x = \frac{z}{7}$ proportionnelle à l'altitude z atteinte. z est une constante.

- 1) Déterminer les lois du mouvement $x(t)$ et $z(t)$ ainsi que l'équation de la trajectoire $x(z)$.
- 2) Calculer le vecteur accélération, ses composantes tangentielle et normale.

- 11 Mouvement curviligne.** Une mouche M parcourt d'un mouvement uniforme, avec la vitesse V_o , l'aiguille des secondes d'une horloge située sur un mur vertical (figure 1.22). À l'instant $t = 0$, la mouche est au centre O de l'horloge qui indique « 0 secondes ». Au bout d'une minute elle atteint l'extrémité de l'aiguille qui mesure 20 cm.

- 1) Par rapport au mur, exprimer le vecteur vitesse $\vec{V}(M)$ de la mouche sur la base mobile $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ liée à M . Calculer les composantes de $\vec{V}(M)$ pour $t = 0$ s, 15 s, 30 s, 45 s et 60 s.
- 2) Représenter $\vec{V}(M)$ aux points M correspondants aux instants ci-dessus. Donner l'allure de la trajectoire sur le mur.

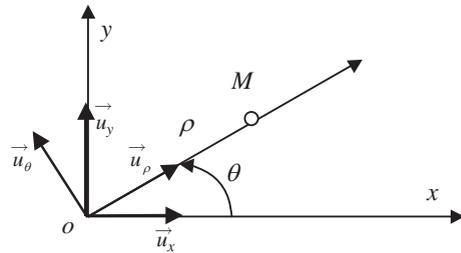


Figure 1.22

- 3) Calculer les composantes de l'accélération de M , $\vec{a}(M)$, sur la base mobile. Représenter $\vec{a}(M)$ aux cinq positions précédentes.

12 **Mouvement curviligne.** Une particule M se déplace dans le plan xOy . Sa vitesse est définie par $\vec{v} = a\vec{u}_\theta + b\vec{u}_y$, où a et b sont deux constantes.

- 1) Déterminer l'équation $\rho(\theta)$ de la trajectoire en coordonnées polaires.
- 2) On choisit $a = 3b$. Sachant que pour $\theta = 0$ l'abscisse du point M est +1 m, donner l'expression de $\rho(\theta)$. Quelle est l'allure de la trajectoire dans le plan xOy ?

13 **Mouvement curviligne.** Un point M se déplace sur une spirale logarithmique d'équations polaires paramétriques : $\rho = \rho_0 e^\theta$, $\theta = \omega t$ avec ω constant.

- 1) Dessiner schématiquement une spirale logarithmique. Représenter les axes des coordonnées polaires et le repère de Frenet en un point M quelconque de cette trajectoire.
- 2) Calculer les composantes des vecteurs vitesse et accélération de M en coordonnées polaires. En déduire les normes de ces vecteurs. Que vaut l'angle α que fait la vitesse avec le vecteur unitaire \vec{u}_ρ ?
- 3) Calculer le rayon de courbure de la trajectoire.
- 4) Le point M décrit la même spirale $\rho = \rho_0 e^\theta$ mais cette fois-ci c'est la vitesse linéaire v qui est constante. Comment varie alors la vitesse angulaire au cours du temps ?

Solutions

1 Positions initiales des navires : N_0, N'_0 . Axes fixes liés à la Terre : N_0x vers l'est et N_0, N'_0y vers le nord (voir figure 1.23a).

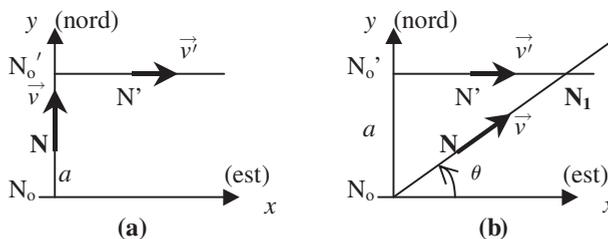


Figure 1.23

1) Date t : $\overrightarrow{N_oN} = vt\overrightarrow{u}_y$, $\overrightarrow{N'_oN'} = v't\overrightarrow{u}_x$ et leur distance est $D = \|\overrightarrow{NN'}\| = \sqrt{v'^2t^2 + (a - vt)^2}$.

La dérivée $\frac{dD}{dt}$ est égale à $\frac{1}{2D}(2v'^2t - 2v(a - vt))$ et s'annule pour $t_m = \frac{av'}{v^2 + v'^2}$. À cet instant, la distance est minimale et sa valeur est :

$$D(t_m) = \left[\frac{v'^2v^2a^2}{(v^2 + v'^2)^2} + \left(a - \frac{av'^2}{(v^2 + v'^2)} \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{av'}{\sqrt{v^2 + v'^2}}.$$

2) Soit θ la direction prise par le navire N (figure 1.23b). On a alors :

$$\overrightarrow{N_oN} = (vt \cos \theta)\overrightarrow{u}_x + (vt \sin \theta)\overrightarrow{u}_y ; \quad \overrightarrow{N'_oN'} = v't\overrightarrow{u}_x.$$

Les navires se croisent en N_1 s'il existe un instant t pour lequel on a simultanément $vt \cos \theta = v't$ et $vt \sin \theta = a \Rightarrow \cos \theta = \frac{v'}{v}$. N ne peut atteindre N' que si $v > v'$. La direction qu'il doit prendre est donnée par : $\cos \theta = \frac{v'}{v}$ et le croisement a lieu à l'instant $t_1 = \frac{a}{v \sin \theta} = \frac{a}{\sqrt{v^2 - v'^2}}$.

2) Distance $AD = d_1 = x$ parcourue à la vitesse constante v . Temps $t_1 = \frac{x}{v}$.

Distance $DB = d_2 = \sqrt{(l-x)^2 + d^2}$ parcourue à la vitesse constante $v/2$. Temps $t_2 = \frac{2\sqrt{(l-x)^2 + d^2}}{v}$.

Temps mis pour aller de A à B : $t = t_1 + t_2 = \frac{1}{v}(x + 2\sqrt{(l-x)^2 + d^2})$. Ce temps est minimal lorsque la dérivée s'annule, soit : $\frac{dt}{dx} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{2(l-x)}{\sqrt{(l-x)^2 + d^2}} = 0 \Rightarrow x = l - \frac{d}{\sqrt{3}}$.

3) Repère : axe Ox dans la direction du mouvement du train et de la voyageuse ; origine O position de la voyageuse lorsque le train démarre. À $t = 0$ il se trouve à $D = 100$ m de O .

Voyageuse : mouvement rectiligne uniforme d'équation horaire $x = vt = 8t$.

Train : mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération $a = 0,5 \text{ m.s}^{-2}$.

La vitesse horaire est $v_t = at = 0,5t$ et l'équation horaire : $x_t = \frac{1}{2}at^2 + D = 0,25t^2 + 100$. La voyageuse rejoint le train si pour une même date t on a : $x = x_t \Rightarrow 0,25t^2 - 8t + 100 = 0$.

Le discriminant $\Delta = -36 < 0 \Rightarrow$ pas de solution. La distance qui sépare la voyageuse et le train est $x_t - x = \frac{1}{2}at^2 + D - vt$. Cette distance est minimale quand sa dérivée s'annule soit quand $at - v = 0 \Rightarrow t = \frac{v}{a}$. On a donc $t = 8/0,5 = 16$ s et la distance minimale est $d_m = \frac{1}{2}at^2 + D - vt = 36$ m.

Pour $D = 40$ m, $x = x_t \Rightarrow 0,25t^2 - 8t + 40 = 0$. Le discriminant $\Delta = 24 > 0$. Les solutions sont :

$t_1 = 16 - \sqrt{96} = 6,2$ s et la voyageuse a parcouru $x_1 = vt_1 = 49,6$ m (le train a effectué 9,6 m et sa vitesse est alors de $3,1 \text{ m.s}^{-1}$. La voyageuse est plus rapide et commence à remonter le train.)

$t_2 = 16 + \sqrt{96} = 25,8$ s et la voyageuse a parcouru $x_1 = vt_1 = 206,4$ m (le train accélérant, il deviendra plus rapide que la voyageuse et la dépassera si elle n'a pas pu monter en marche. Elle a pour cela 19,6 s.)

Distance minimale D_m pour que la voyageuse atteigne le train : $x = x_t \Rightarrow 0,25t^2 - 8t + D = 0$. Le discriminant doit être positif ou nul soit $64 - D \geq 0 \Rightarrow D_m = 64$ m. On a alors $t = 16$ s et la distance parcourue est de $x = 128$ m. Le train a parcouru 28 m et sa vitesse est de $8 \text{ m.s}^{-1} = v$.

$$4 \quad A : \omega_A = 10 \text{ rad.s}^{-1} \Rightarrow T_A = \frac{2\pi}{\omega_A}; B : \omega_B = 11 \text{ rad.s}^{-1} \Rightarrow T_B = \frac{2\pi}{\omega_B} < T_A.$$

La période de A est supérieure à celle de B qui est donc le plus rapide. Lors de la première coïncidence, B aura effectué une oscillation de plus que A . On peut donc écrire que la rencontre se fera à l'instant $t = nT_A = (n + 1)T_B$ où n représente le nombre d'oscillations effectuées par A jusqu'à la coïncidence.

$$n = \frac{T_B}{T_A - T_B} = \frac{1}{\frac{\omega_B}{\omega_A} - 1} = \frac{1}{1,1 - 1} = 10 \Rightarrow t = 10T_A = 6,28 \text{ s.}$$

Le moins rapide aura effectué 10 oscillations soit une distance de 10 fois $4X_m$ c'est-à-dire 4 m. Le plus rapide effectue une oscillation de plus et a donc parcouru 4,4 m.

$$5 \quad \text{Vitesse angulaire constante de } OA : \omega_o = \dot{\theta} = 10^\circ \text{s}^{-1} = \frac{\pi}{18} \text{ rad.s}^{-1}.$$

$$1) \theta = \omega_o t + \theta_o = 10t + 15 \text{ (en degrés)} = \frac{\pi}{18}t + \frac{\pi}{12} \text{ (en radians)}$$

$$2) 2\theta_1 = 100^\circ \Rightarrow t_1 = \frac{\theta_1 - \theta_o}{\omega_o} = \frac{50 - 15}{10} = 3,5 \text{ s}$$

3) A a un mouvement circulaire uniforme de rayon $OA = 2,5 \text{ m} = l$ et de vitesse angulaire $\omega_o = \frac{\pi}{18} \text{ rad.s}^{-1}$. On a donc $v_A = l\omega_o = 0,436 \text{ m.s}^{-1}$, et $\vec{v}_A \perp \vec{OA}$ vers B . L'accélération est centripète, direction OA , sens de A vers O et a pour expression : $a = \frac{v_A^2}{l} = \omega_o^2 l = 0,076 \text{ m.s}^{-2}$.

$$4) OB = 2OA \sin \theta = 5 \sin(10t + 15)^\circ = 5 \sin\left(\frac{\pi}{18}t + \frac{\pi}{12}\right).$$

$$5) \vec{v}_B = \frac{d\vec{OB}}{dt} = \vec{u}_x 2OA\omega_o \cos(\omega_o t + \theta_o) = \vec{u}_x \frac{5\pi}{18} \cos\left(\frac{\pi}{18}t + \frac{\pi}{12}\right)$$

$$\vec{a}_B = -\vec{u}_x 2OA\omega_o^2 \sin(\omega_o t + \theta_o) = -\vec{u}_x 5\left(\frac{\pi}{18}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{18}t + \frac{\pi}{12}\right).$$

$$\text{Pour } t = t_1 \Rightarrow v_B = \frac{5\pi}{18} \cos 50^\circ = 0,5609 \text{ m.s}^{-1} \text{ et } a_B = -0,1523 \sin 50^\circ = -0,1166 \text{ m.s}^{-2}$$

6) B a un mouvement rectiligne sinusoïdal d'amplitude $2OA = 5 \text{ m}$ et de pulsation ω_o .

6) Mouvement circulaire uniforme de vitesse constante $v = 1800 \text{ km.h}^{-1} = 0,5 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$. L'accélération est normale et centripète et a pour expression $a = \frac{v^2}{r} < 10g \Rightarrow r \geq \frac{v^2}{10g} = 2,5 \text{ km}$.

7) Roulement sans glissement : pendant la durée dt , le point C effectue $v_o dt$ et la roue a tourné de $d\theta$. On a donc $a d\theta = v_o dt \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{v_o}{a} \Rightarrow \theta = \frac{v_o}{a}t$ (en orientant θ comme sur le schéma).

$$\vec{OA} = \vec{OC} + \vec{CA} = [(v_o t) \vec{u}_x + a \vec{u}_y] + [-a \sin \theta \vec{u}_x - a \cos \theta \vec{u}_y]$$

$$\vec{OA} = [v_o t - a \sin \frac{v_o}{a}t] \vec{u}_x + a [1 - \cos \frac{v_o}{a}t] \vec{u}_y$$

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{OA}}{dt} = v_o [(1 - \cos \frac{v_o}{a}t) \vec{u}_x + \vec{u}_y \sin \frac{v_o}{a}t]$$

$$\Rightarrow \|\vec{v}_A\| = v_o \sqrt{(1 - \cos \frac{v_o}{a}t)^2 + \sin^2 \frac{v_o}{a}t}$$

$\|\vec{v}_A\| = v_o \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \frac{v_o}{a}t}$. Fonction périodique de période $T = \frac{2\pi a}{v_o}$ (temps mis pour faire un tour de roue complet $\theta = 2\pi$). Elle s'annule pour $t = nT$ (avec n nombre entier correspondant au nombre de tours effectués). Le point A est alors en contact avec le sol. Elle est maximale pour $t = nT + \frac{T}{2}$ et prend alors la valeur de $2v_o$. Le point A est alors au sommet de la roue.

- 8** Rotation de $1200 \text{ tr.min}^{-1} \Rightarrow \dot{\alpha}_o = 40\pi \text{ rad.s}^{-1}$. Arrêt en $300 \text{ tr} \Rightarrow \alpha_1 = 600\pi$. Accélération angulaire constante $\ddot{\alpha} \Rightarrow \dot{\alpha} = \ddot{\alpha}t + \dot{\alpha}_o$ et $\alpha = \frac{1}{2}\ddot{\alpha}t^2 + \dot{\alpha}_o t \Rightarrow \ddot{\alpha} = \frac{\dot{\alpha} - \dot{\alpha}_o}{t}$ et $\alpha = \frac{1}{2}\frac{\dot{\alpha} - \dot{\alpha}_o}{t}t^2 + \dot{\alpha}_o t$.

L'arrêt s'effectue pour :

$$\alpha = \alpha_1 \text{ et } \dot{\alpha} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{1}{2}\ddot{\alpha}_o t + \dot{\alpha}_o t = \frac{1}{2}\ddot{\alpha}_o t \Rightarrow t = 2\frac{\alpha_1}{\ddot{\alpha}_o} = 2\frac{600\pi}{40\pi} = 30 \text{ s.}$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{\dot{\alpha} - \dot{\alpha}_o}{t} = -\frac{\dot{\alpha}_o}{30} = -\frac{4}{3}\pi \text{ rad.s}^{-2}.$$

- 9** Un point C de la courroie se déplace avec une vitesse constante. La courroie ne glissant pas sur les roues, on peut exprimer la vitesse du point lorsqu'il est en contact avec la roue de rayon R_1 ($v_c = R_1\omega_o$) et lorsqu'il est en contact avec la roue de rayon R_2 ($v_c = R_2\omega_2$). On a donc $R_1\omega_o = R_2\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \omega_o \frac{R_1}{R_2} = 30 \text{ rad.s}^{-1}$.

Sur les roues, le point C a un mouvement circulaire uniforme. L'accélération est donc normale et centripète (vers le centre des roues) et a pour valeur :

Roue n°1 : $a_1 = R_1\omega_o^2 = 1620 \text{ rad.s}^{-2}$. Roue n°2 : $a_2 = R_2\omega_2^2 = a_1 \frac{R_1}{R_2} = 270 \text{ rad.s}^{-2}$. Entre les deux roues, le mouvement est rectiligne uniforme et l'accélération est donc nulle.

- 10** La vitesse d'ascension verticale v_o étant constante, on peut écrire que le mouvement projeté sur l'axe des z est rectiligne uniforme. On a : $\frac{d^2z}{dt^2} = 0$; $\frac{dz}{dt} = v_o$; $z = v_o t$ (avec $z = 0$ pour $t = 0$).

Suivant l'axe des x , on a : $v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{z}{\tau} = v_o \frac{t}{\tau}$ et $x = v_o \frac{t^2}{2\tau}$ (le mouvement est uniformément accéléré).

L'équation de la trajectoire est $x = \frac{z^2}{2\tau v_o}$ et correspond à une portion de parabole.

Le vecteur accélération est donné par $\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{u}_x + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{u}_y = \frac{v_o}{\tau} \vec{u}_x$.

Le vecteur vitesse est donné par $\vec{v} = \frac{z}{\tau} \vec{u}_x + v_o \vec{u}_y$. Le vecteur vitesse étant tangent à la trajectoire, on en déduit l'expression du vecteur unitaire tangent :

$$\vec{u}_t = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \tau(z^2 + v_o^2 \tau^2)^{-1/2} \left(\frac{z}{\tau} \vec{u}_x + v_o \vec{u}_y \right).$$

Le vecteur normal à la trajectoire se déduit de \vec{u}_t par :

$$\vec{u}_t \cdot \vec{u}_n = 0 \Rightarrow \vec{u}_n = \tau(z^2 + v_o^2 \tau^2)^{-1/2} (v_o \vec{u}_x - \frac{z}{\tau} \vec{u}_y).$$

$$a_t = \vec{a} \cdot \vec{u}_t = \tau(z^2 + v_o^2 \tau^2)^{-1/2} \frac{v_o z}{\tau^2} = (z^2 + v_o^2 \tau^2)^{-1/2} \frac{v_o z}{\tau}.$$

$$a_n = \vec{a} \cdot \vec{u}_n = (z^2 + v_o^2 \tau^2)^{-1/2} v_o^2.$$

- 11** $\vec{OM} = \rho \vec{u}_\rho \Rightarrow \vec{V}(M) = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta$. M parcourt l'aiguille d'un mouvement uniforme avec la vitesse V_o constante. On a donc $\dot{\rho} = V_o \Rightarrow \rho = V_o t$ (à $t = 0$, $\rho = 0$) et $\dot{\theta} = \omega = -\frac{\pi}{30} \text{ rad.s}^{-1}$ (mouvement de l'aiguille des secondes : un tour en 60 secondes dans le sens inverse du sens trigonométrique).

En 60 secondes la mouche effectue 20 cm. On a donc $V_o = \frac{20}{60} = \frac{1}{3} \text{ cm.s}^{-1}$.

$$\vec{V}(M) = V_o (\vec{u}_\rho - \frac{\pi}{30} t \vec{u}_\theta)$$

$$\Rightarrow \vec{V}(t=0) = V_o \vec{u}_\rho = \frac{1}{3} \vec{u}_y ; \quad \vec{V}(t=15) = V_o (\vec{u}_\rho - \frac{\pi}{2} \vec{u}_\theta) = \frac{1}{3} (\vec{u}_x - \frac{\pi}{2} \vec{u}_y).$$

$$\vec{V}(t = 30) = V_o(\vec{u}_\rho - \pi \vec{u}_\theta) = \frac{1}{3}(-\vec{u}_y - \pi \vec{u}_x); \quad \vec{V}(t = 45) = V_o(\vec{u}_\rho - \frac{3}{2} \pi \vec{u}_\theta) = \frac{1}{3}(-\vec{u}_x + \frac{3}{2} \pi \vec{u}_y).$$

$$\vec{V}(t = 60) = V_o(\vec{u}_\rho - 2\pi \vec{u}_\theta) = \frac{1}{3}(\vec{u}_y + 2\pi \vec{u}_x).$$

Il est alors possible de tracer les différents vecteurs vitesse tous tangents à la trajectoire. L'allure de la trajectoire est une spirale.

$$\vec{a}(M) = V_o(\vec{u}_\rho + \omega t \vec{u}_\theta)' = V_o(\omega \vec{u}_\theta + \omega \vec{u}_\theta + \omega t(-\omega \vec{u}_\rho)) = V_o(-\omega^2 t \vec{u}_\rho + 2\omega \vec{u}_\theta).$$

$$\vec{a}(M) = \frac{\pi}{30} V_o(-\frac{\pi}{30} t \vec{u}_\rho - 2\vec{u}_\theta) = \pi \frac{1}{90}(-\frac{\pi}{30} t \vec{u}_\rho - 2\vec{u}_\theta) \text{ (en cm.s}^{-2}\text{)}.$$

$$\vec{a}(t = 0) = 2V_o \omega \vec{u}_\theta = -2V_o \omega \vec{u}_x = \frac{\pi}{45} \vec{u}_x;$$

$$\vec{a}(t = 15) = V_o(-\omega^2 15 \vec{u}_x + 2\omega \vec{u}_y) = -\frac{\pi}{90}(\frac{\pi}{2} \vec{u}_x + 2\vec{u}_y).$$

$$\vec{a}(t = 30) = V_o(\omega^2 30 \vec{u}_y + 2\omega \vec{u}_x) = -\frac{\pi}{90}(-\pi \vec{u}_y + 2\vec{u}_x).$$

$$\vec{a}(t = 45) = V_o(+\omega^2 45 \vec{u}_x - 2\omega \vec{u}_y) = \frac{\pi}{90}(\frac{3}{2} \pi \vec{u}_x + 2\vec{u}_y).$$

$$\vec{a}(t = 60) = V_o(-\omega^2 60 \vec{u}_y - 2\omega \vec{u}_x) = \frac{\pi}{90}(-2\pi \vec{u}_y + 2\vec{u}_x).$$

12 $\vec{v} = a\vec{u}_\theta + b\vec{u}_y$ et $\vec{u}_y = \sin \theta \vec{u}_\rho + \cos \theta \vec{u}_\theta$
 $\Rightarrow \vec{v} = b \sin \theta \vec{u}_\rho + (a + b \cos \theta) \vec{u}_\theta = \rho \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta.$
 $\frac{d\rho}{dt} = b \sin \theta$ et $\rho \frac{d\theta}{dt} = a + b \cos \theta$
 $\Rightarrow \frac{\rho d\theta}{d\rho} = \frac{a + b \cos \theta}{b \sin \theta} \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = \frac{b \sin \theta}{a + b \cos \theta} d\theta.$

On intègre chaque membre de l'égalité (avec $C = -\ln \rho_o$ une constante d'intégration).

On obtient :

$$\ln \rho + C = \int \frac{b \sin \theta}{a + b \cos \theta} d\theta = \ln \rho - \ln \rho_o$$

$$= -\ln(a + b \cos \theta) = \ln \frac{\rho}{\rho_o}$$

L'équation de la trajectoire est : $\rho(\theta) = \frac{\rho_o}{a + b \cos \theta}.$

Avec $a = 3b$ et pour $\theta = 0$ on a : $\rho(0) = 1 = \frac{\rho_o}{3b + b} \Rightarrow \rho_o = 4b.$

$\rho(\theta) = \frac{4}{3 + \cos \theta} = \frac{4/3}{1 + \frac{1}{3} \cos \theta}.$ Ceci est l'équation d'une ellipse en coordonnées polaires (allure de la trajectoire : voir figure 1.24).

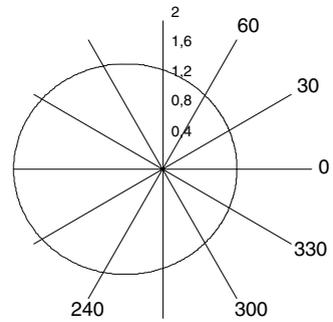


Figure 1.24

13 1) Voir figure 1.25.

2) $\rho = \rho_o e^{\omega t} \Rightarrow \dot{\rho} = \omega \rho$ et $\ddot{\rho} = \omega^2 \rho.$

La vitesse angulaire est constante : $\dot{\theta} = \omega \Rightarrow \ddot{\theta} = 0.$

$$\vec{v} = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta = \rho \omega (\vec{u}_\rho + \vec{u}_\theta)$$

$$\Rightarrow \text{angle } \alpha = (\vec{v}, \vec{u}_\rho) = 45^\circ = \text{angle}(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \vec{u}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \vec{u}_\theta$$

$$= (\omega^2 \rho - \omega^2 \rho) \vec{u}_\rho + 2\rho \omega^2 \vec{u}_\theta$$

$$= 2\rho \omega^2 \vec{u}_\theta.$$

L'angle entre \vec{a} et $(\vec{u}_\rho$ ou $\vec{u}_n)$ est donc aussi de 45° (voir figure 1.25).

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{2} \rho \omega \text{ et } \|\vec{a}\| = 2\rho \omega^2.$$

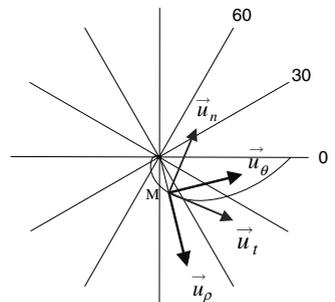


Figure 1.25

$$3) a_n = \vec{a} \cdot \vec{u}_n = \|\vec{a}\| \cos 45^\circ = \sqrt{2}\rho\omega^2 = \frac{\|\vec{v}\|^2}{R} = \frac{2\rho^2\omega^2}{R} \Rightarrow R = \sqrt{2}\rho.$$

$$4) \|\vec{v}\| = \sqrt{2}\rho\dot{\theta} = v = cste \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{\rho_0\sqrt{2}e^\theta} \Rightarrow e^\theta d\theta = \frac{v}{\rho_0\sqrt{2}} dt.$$

$$e^\theta = \frac{v}{\rho_0\sqrt{2}}t + C. \text{ Si pour } t = 0, \theta = 0 \text{ alors } e^\theta = \frac{v}{\rho_0\sqrt{2}}t + 1.$$

$$\text{On a donc } \theta = \ln\left(\frac{v}{\rho_0\sqrt{2}}t + 1\right) \text{ et } \dot{\theta} = \frac{v}{\rho_0\sqrt{2}} \left(\frac{v}{\rho_0\sqrt{2}}t + 1\right)^{-1}.$$

CHAPITRE 2

CHANGEMENTS DE RÉFÉRENTIELS

Pré-requis

- Avoir compris ce qu'est un référentiel.
- Savoir dériver un vecteur unitaire tournant.

Objectif

- ▶ Savoir reconnaître le type de mouvement que peut avoir un référentiel par rapport à un autre.
- ▶ Savoir dériver un vecteur dans des référentiels différents.
- ▶ Connaître la loi de composition des vitesses.
- ▶ Connaître la loi de composition des accélérations.

Dans les mouvements de rotation que nous allons étudier, nous ne considérerons que la rotation autour d'un seul axe.

1. MOUVEMENTS D'UN RÉFÉRENTIEL PAR RAPPORT À UN AUTRE

Dans ce qui va suivre, nous considérons deux référentiels R et R' . Le premier est caractérisé par un de ses repères (O, x, y, z) avec la base correspondante $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, et le second par (O', x', y', z') avec la base $(\vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z)$. Les axes $O'x', O'y', O'z'$ sont choisis de sorte à être parallèles respectivement aux axes Ox, Oy, Oz à un instant quelconque qui peut être un instant origine. Cette condition valide à $t = 0$ n'est plus vraie en général quand le temps s'écoule puisque nous considérons que R' se déplace par rapport à R . Nous allons cependant préciser ce que devient l'orientation des axes de ces deux référentiels dans quelques cas importants.

1.1. Le mouvement de translation

a) Définition

Nous dirons que le référentiel R' est en **mouvement de translation** par rapport au référentiel R si les axes du référentiel R' restent parallèles à ceux du référentiel R au cours du mouvement. Si le point O' est en mouvement par rapport à R , tous les points constituant le référentiel R' se déplacent de la même quantité vectorielle que O' . Conséquences :

- À tout instant, on a les égalités $\vec{u}_x = \vec{u}'_x$, $\vec{u}_y = \vec{u}'_y$, $\vec{u}_z = \vec{u}'_z$. La base $(\vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z)$ est donc une base fixe dans R' mais aussi dans R . Le vecteur \vec{OO}' correspond au vecteur translation.
- Le mouvement de translation de R' par rapport à R peut être rectiligne, circulaire ou quelconque selon la nature du mouvement de l'origine O' du référentiel R' .

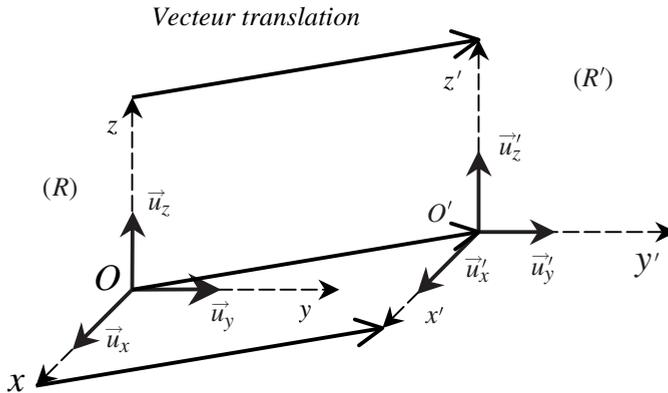


Figure 2.1 • Translation d'un référentiel R' par rapport à un référentiel R .

b) Translation rectiligne

Le point O' suit une trajectoire rectiligne par rapport au référentiel R . Un exemple simple est celui où le référentiel R' est lié à un tapis roulant, R étant lié à la Terre. Dans ces conditions, on peut écrire la vitesse du point O' par rapport à R en choisissant l'axe Ox dans la direction du mouvement de translation :

$$\vec{V}_{O'/R} = V_{O'} \vec{u}_x = V_{O'} \vec{u}'_x$$

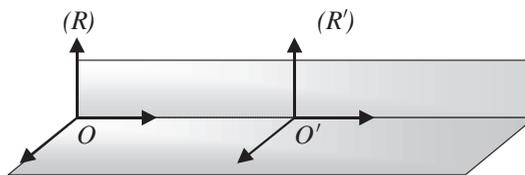


Figure 2.2 • Mouvement de translation rectiligne d'un référentiel R' par rapport à un référentiel R .

La vitesse $V_{O'}$ peut varier au cours du temps.

Encart 2.1. Translation rectiligne uniforme

Le mouvement du point O' est un mouvement rectiligne et uniforme. On a donc :

$$\vec{V}_{O'/R} = \vec{cste} = \frac{d\vec{OO}'}{dt} \implies \vec{OO}' = V_{O'} t \vec{u}_x + \vec{C}$$

Le vecteur \vec{C} est une constante qui dépend des conditions initiales du mouvement. En particulier, si à $t = 0$ le point O' est confondu avec le point O , ce vecteur est nul.

c) Translation circulaire

Le point O' décrit un cercle autour d'un point fixe de R qui peut être choisi comme origine O du repère de R . Son mouvement est caractérisé par le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}_{O'/R}$. L'expression du vecteur vitesse du point O' par rapport au référentiel R est donc :

$$\vec{V}_{O'/R} = \vec{\omega}_{O'/R} \wedge \overrightarrow{OO'}$$

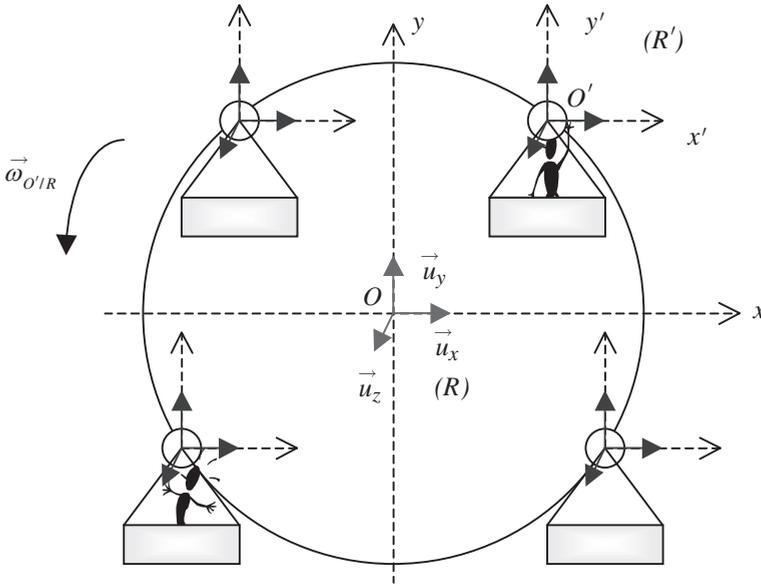


Figure 2.3 • Translation circulaire d'un référentiel R' par rapport à un référentiel R . Les axes de R' restent parallèles à ceux de R , l'origine O' décrit un mouvement circulaire.

Exemple : Si on considère la nacelle d'une grande roue d'une fête foraine, elle constitue un référentiel qui est en translation circulaire par rapport au référentiel terrestre, le fond de la nacelle restant toujours horizontal (figure 2.3).

Translation circulaire uniforme : Le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}_{O'/R}$ est un vecteur constant.

d) Translation quelconque

Le point O' a un mouvement quelconque, curviligne uniforme ou varié mais les axes du repère de R' restent parallèles à ceux du référentiel R (figure 2.4).

1.2. Le mouvement de rotation

Nous dirons qu'un référentiel R' est en **rotation** par rapport à un référentiel R si les axes du référentiel R' tournent par rapport à ceux du référentiel R .

Le point O' , origine du repère du référentiel R' , est immobile par rapport à R . Nous considérerons la rotation autour d'un seul axe, cette rotation étant caractérisée par le vecteur vitesse angulaire de rotation du référentiel R' par rapport à R : $\vec{\Omega}_{R'/R}$.

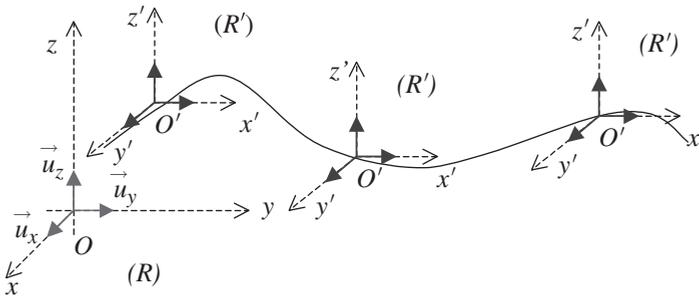


Figure 2.4 • Mouvement de translation quelconque.

Dans ces conditions, on peut choisir l'origine O confondue avec le point O' et choisir un repère (O, x, y, z) de sorte que le vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}_{R'/R}$ soit de la forme :

$$\vec{\Omega}_{R'/R} = \Omega_{R'/R} \vec{u}_z$$

L'axe $O'z'$ peut être confondu avec l'axe Oz et donc $\vec{u}_z = \vec{u}'_z$. Les axes $O'x'$ et $O'y'$ sont alors en rotation autour de l'axe Oz . Dans ces conditions, la base $(\vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z)$, qui est la base fixe du référentiel R' , est une base mobile dans R . Les vecteurs \vec{u}'_x et \vec{u}'_y tournent autour de l'axe Oz au cours du temps.

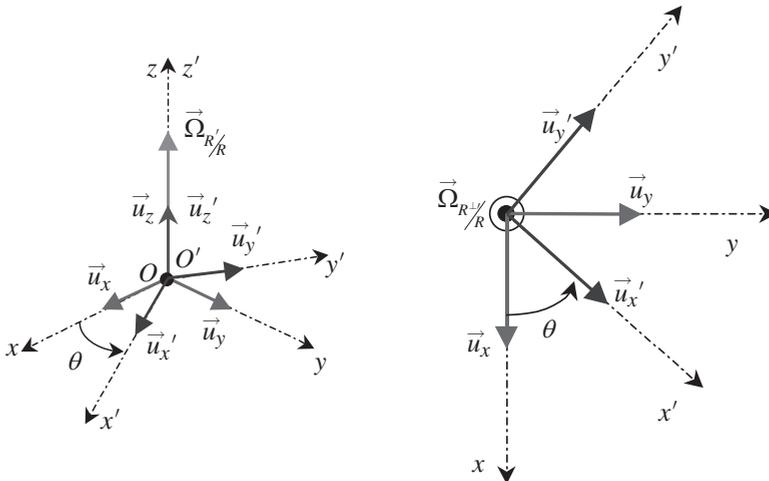


Figure 2.5 • Mouvement de rotation d'un référentiel R' par rapport à un référentiel R .

Si θ est l'angle que fait \vec{u}'_x avec l'axe Ox du référentiel R (figure 2.5), nous avons alors :

$$\dot{\theta} = \Omega_{R'/R}$$

La dérivation du vecteur unitaire tournant \vec{u}'_x conduit à (voir 5. de l'annexe 1) :

$$\frac{d\vec{u}'_x}{d\theta} = \vec{u}'_y \implies \left. \frac{d\vec{u}'_x}{dt} \right)_R = \dot{\theta} \vec{u}'_y = \Omega_{R'/R} \vec{u}'_y$$

Si nous nous plaçons dans le référentiel R , la dérivation des vecteurs de la base donne :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{u}'_x}{dt}\right)_R &= \Omega_{R'/R} \vec{u}'_y = \Omega_{R'/R} (-\vec{u}'_x \wedge \vec{u}'_z) = \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{u}'_x \\ \left(\frac{d\vec{u}'_y}{dt}\right)_R &= -\Omega_{R'/R} \vec{u}'_x = \Omega_{R'/R} (\vec{u}'_z \wedge \vec{u}'_y) = \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{u}'_y \\ \left(\frac{d\vec{u}'_z}{dt}\right)_R &= \vec{0} \end{aligned}$$

Dans le référentiel R' nous aurions :

$$\left(\frac{d\vec{u}'_x}{dt}\right)_{R'} = 0; \left(\frac{d\vec{u}'_y}{dt}\right)_{R'} = 0; \left(\frac{d\vec{u}'_z}{dt}\right)_{R'} = 0.$$

Il est donc important de préciser à chaque fois si la dérivation est effectuée dans R ou dans R' . Ceci peut être spécifié en indice au niveau du symbole de dérivation.

Enfin on peut remarquer que la base $(\vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z)$ du référentiel R' se confond avec la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, base mobile des coordonnées cylindriques du repère (O, x, y, z) .

1.3. Mouvement quelconque

Un mouvement quelconque peut être considéré comme une combinaison d'un mouvement de translation et de rotation. On peut prendre l'exemple suivant de la roue d'une bicyclette qui se déplace le long d'un axe Ox (figure 2.6) et définir trois référentiels possibles :

- le référentiel R terrestre, lié à la Terre sur laquelle se déplace la bicyclette ;
- le référentiel R_1 lié à la bicyclette ;
- enfin un référentiel R_2 lié aux rayons de la roue et à la valve de la chambre à air.

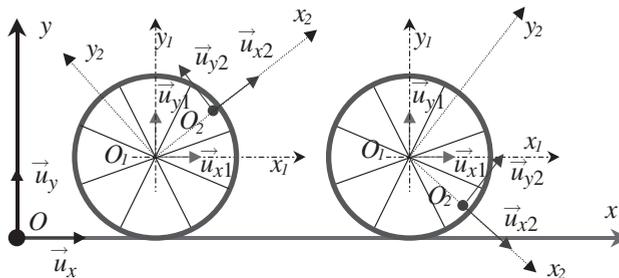


Figure 2.6 • Mouvement d'une roue de bicyclette.

Le référentiel R_1 (bicyclette) est en translation rectiligne par rapport au référentiel R terrestre. Le référentiel R_2 (rayon de la roue) peut être caractérisé par le repère (O_1, x_2, y_2) . Ce repère est en rotation par rapport à R_1 . Le mouvement du référentiel R_2 , par rapport au référentiel R , peut donc se décomposer en un mouvement de translation rectiligne et un mouvement de rotation.

Avec cet exemple simple, on s'aperçoit que :

Le mouvement quelconque d'un référentiel par rapport à un autre peut toujours se ramener à une composition de mouvement de translation et de rotation.

D'où l'importance de ces deux cas que nous allons étudier maintenant.

2. ÉTUDE DE LA VITESSE

2.1. Référentiel R' en translation par rapport à R

a) Position d'un point M

Le repère du référentiel R' , en translation par rapport à un référentiel R , est choisi de sorte que les axes $O'x'$, $O'y'$ et $O'z'$ soient respectivement parallèles aux axes Ox , Oy et Oz du repère caractérisant le référentiel R . L'origine O' , liée à R' , a un mouvement quelconque par rapport à R .

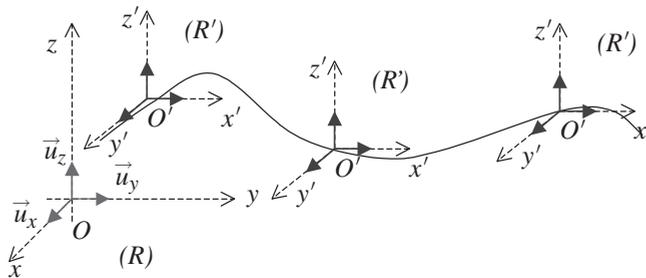


Figure 2.7 • Mouvement de translation quelconque.

La base fixe de R , $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, est aussi une base fixe de R' .

Dans le référentiel R , les coordonnées du point M sont (x, y, z) . Dans le référentiel R' , elles sont (x', y', z') . La relation de Chasles appliquée aux vecteurs \overrightarrow{OM} et $\overrightarrow{O'M}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

avec :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z \quad \text{et} \quad \overrightarrow{O'M} = x'\vec{u}'_x + y'\vec{u}'_y + z'\vec{u}'_z$$

Encart 2.2. Transformation de Galilée

Considérons le cas particulier où R' est en mouvement de translation rectiligne par rapport à un référentiel R . Nous pouvons alors choisir les axes des repères de sorte que le mouvement de translation soit colinéaire à l'axe des y . Dans ces conditions, le vecteur vitesse du point O' , par rapport au référentiel R , peut s'écrire :

$$\vec{v}_{O'/R} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = V_{O'}\vec{u}_y = V_{O'}\vec{u}'_y$$

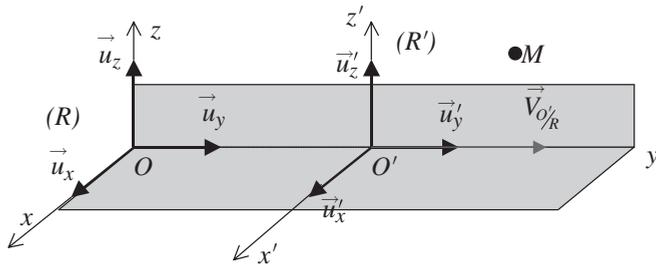


Figure 2.8 • Mouvement de translation rectiligne.

Si le référentiel R' est en translation rectiligne uniforme par rapport à R , on peut écrire que :

$$\overrightarrow{OO'} = v_0 t \vec{u}_y$$

On en déduit donc que les coordonnées du point M dans R s'expriment en fonction des coordonnées du point M dans R' par la transformation suivante dite **transformation de Galilée** :

$$x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z = v_0 t \vec{u}_y + x' \vec{u}_x + y' \vec{u}_y + z' \vec{u}_z$$

Cette relation peut s'écrire en utilisant la notion de **quadrivecteur** (position, temps) et en se rappelant que le temps en mécanique classique est une grandeur absolue sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & v_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix}$$

b) Loi de composition des vitesses

Par définition nous pouvons écrire que :

$$\vec{v}_{M/R} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Bigg|_R = \frac{d(x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z)}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{u}_x + \frac{dy}{dt} \vec{u}_y + \frac{dz}{dt} \vec{u}_z$$

$$\vec{v}_{M/R'} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \Bigg|_{R'} = \frac{d(x' \vec{u}_x + y' \vec{u}_y + z' \vec{u}_z)}{dt} = \frac{dx'}{dt} \vec{u}_x + \frac{dy'}{dt} \vec{u}_y + \frac{dz'}{dt} \vec{u}_z$$

et

$$\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \Bigg|_R = \vec{v}_{O'/R} = \vec{v}_{R'/R}$$

En dérivant par rapport au temps dans le référentiel R la relation de Chasles qui donne la position du point M , il vient :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Bigg|_R = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \Bigg|_R + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \Bigg|_R$$

Comme les axes de R' restent parallèles à ceux de R , la dérivée de $\overrightarrow{O'M}$ dans R est identique à la dérivée de $\overrightarrow{O'M}$ dans R'

$$\left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right)_{R'}$$

ce qui conduit à la relation suivante :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \right)_R + \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right)_{R'}$$

soit :

$$\vec{v}_{M/R} = \vec{v}_{O'/R} + \vec{v}_{M/R'}$$

Cette relation entre les vitesses est formellement analogue à la relation de Chasles sur l'addition des vecteurs et est connue sous l'appellation **loi de composition des vitesses**. On peut remarquer que si le point M était fixe dans R' on aurait :

$$\vec{v}_{M/R} = \vec{v}_{O'/R}$$

Pour cette raison, $\vec{v}_{O'/R} = \vec{v}_{R'/R}$ est aussi appelée **vitesse d'entraînement** et notée \vec{v}_e .

2.2. Référentiel R' en rotation par rapport à R

Considérons maintenant le cas où le référentiel $R'(O, x', y', z', t)$ avec $(\vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z)$ fixe de R' est en mouvement de rotation par rapport au référentiel $R(O, x, y, z, t)$ avec $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ fixe de R . Nous supposons comme l'indique la figure 2.9 que le point O' est confondu avec O .

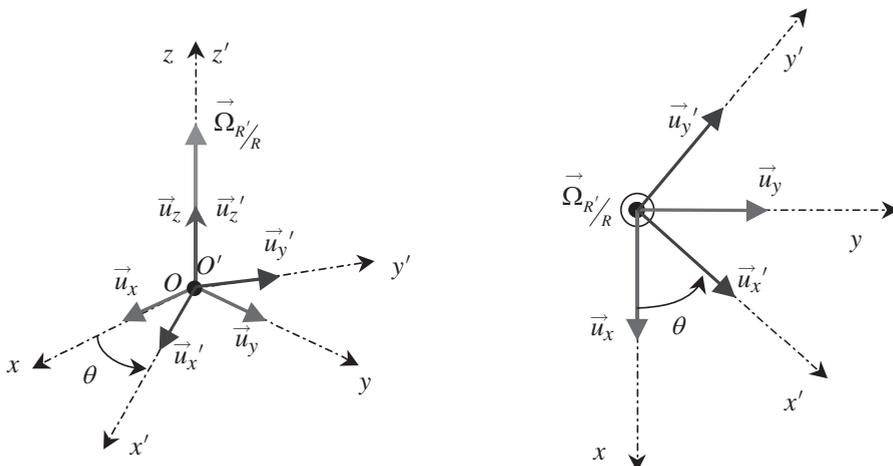


Figure 2.9 • Mouvement de rotation d'un référentiel R' par rapport à un référentiel R .

Nous faisons en outre l'hypothèse que l'axe de rotation de R' par rapport à R est l'axe des z , ce qui permet d'écrire que la vitesse angulaire de rotation de R' par rapport à R est :

$$\vec{\Omega}_{R'/R} = \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_z$$

Il est alors très important de comprendre que dans le référentiel R' les vecteurs de base $(\vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z)$ sont constants puisqu'ils tournent avec les axes du référentiel. Pour s'en assurer il suffit de déterminer à tout instant l'angle fait par ces vecteurs et les axes du référentiel et de constater qu'il est toujours nul. Les vecteurs $(\vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z)$ sont donc fixes dans R' . D'autre part le référentiel R peut être rapporté soit à la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ fixe de R soit à la base $(\vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z)$ mobile de R . Dans ce cas, les vecteurs \vec{u}'_x, \vec{u}'_y correspondent, comme nous l'avons vu au paragraphe 1.2. aux vecteurs $\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta$ de la base polaire de R . Ils ne sont plus constants dans R puisqu'ils tournent à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}_{R'/R}$ par rapport à R . Toute la difficulté du calcul qui suit repose sur la compréhension de ce point.

Quel que soit le référentiel d'étude, la position du point M peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z \\ \vec{OM} &= x' \vec{u}'_x + y' \vec{u}'_y + z \vec{u}'_z \end{aligned}$$

La vitesse du point M de coordonnées (x, y, z) dans $R(O, x, y, z, t)$ est :

$$\vec{v}_{M/R} = \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_R = \frac{dx}{dt} \vec{u}_x + \frac{dy}{dt} \vec{u}_y + \frac{dz}{dt} \vec{u}_z$$

alors que la vitesse du même point M dans $R'(O', x', y', z', t)$ s'écrit :

$$\vec{v}_{M/R'} = \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{R'} = \frac{d(x' \vec{u}'_x + y' \vec{u}'_y + z \vec{u}'_z)}{dt}$$

Dans R' , les vecteurs de base $(\vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z)$ sont constants, ce qui conduit à :

$$\vec{v}_{M/R'} = \frac{dx'}{dt} \vec{u}'_x + \frac{dy'}{dt} \vec{u}'_y + \frac{dz'}{dt} \vec{u}'_z$$

Nous nous replaçons maintenant dans R mais nous exprimons la position du point M dans la base $(\vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z)$. La vitesse du point M s'écrit alors :

$$\vec{v}_{M/R} = \frac{d(x' \vec{u}'_x + y' \vec{u}'_y + z \vec{u}'_z)}{dt}$$

soit :

$$\vec{v}_{M/R} = \frac{dx'}{dt} \vec{u}'_x + \frac{dy'}{dt} \vec{u}'_y + \frac{dz'}{dt} \vec{u}'_z + x' \frac{d\vec{u}'_x}{dt} + y' \frac{d\vec{u}'_y}{dt} + z' \frac{d\vec{u}'_z}{dt}$$

En utilisant les résultats du paragraphe 1.2. de ce chapitre, on obtient :

$$\vec{v}_{M/R} = \frac{dx'}{dt} \vec{u}'_x + \frac{dy'}{dt} \vec{u}'_y + \frac{dz'}{dt} \vec{u}'_z + x' \dot{\theta} \vec{u}'_y - y' \dot{\theta} \vec{u}'_x$$

En remarquant que :

$$\dot{\theta} \vec{u}'_y = \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{u}'_x \quad \text{et} \quad -\dot{\theta} \vec{u}'_x = \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{u}'_y$$

on obtient finalement :

$$\vec{v}_{M/R} = \frac{dx'}{dt} \vec{u}'_x + \frac{dy'}{dt} \vec{u}'_y + \frac{dz'}{dt} \vec{u}'_z + x' \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{u}'_x + y' \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{u}'_y$$

Nous constatons ensuite que :

$$\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge x' \vec{u}'_x + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge y' \vec{u}'_y = \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge (x' \vec{u}'_x + y' \vec{u}'_y)$$

Comme le vecteur vitesse instantané de rotation est dirigé selon \vec{u}'_z , nous avons aussi :

$$\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge (x' \vec{u}'_x + y' \vec{u}'_y) = \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge (x' \vec{u}'_x + y' \vec{u}'_y + z' \vec{u}'_z) = \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{OM}$$

Nous pouvons donc conclure que :

$$\left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{OM} \quad (2.1)$$

ce qui montre que :

Dériver le vecteur \vec{OM} dans R n'est pas équivalent à le dériver dans R' .

En posant $\vec{v}_{R'/R} = \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{OM}$, la loi de composition des vitesses dans deux référentiels en rotation s'écrit :

$$\vec{v}_{M/R} = \vec{v}_{R'/R} + \vec{v}_{M/R'}$$

avec $\vec{v}_{R'/R}$ appelée vitesse d'entraînement, c'est-à-dire la vitesse, par rapport à R , qu'aurait le point M s'il était fixe dans R' .

La loi précédente a été appliquée au vecteur position \vec{OM} . Elle est tout à fait générale et peut s'appliquer à n'importe quel vecteur \vec{X} . Ainsi, si \vec{X} est un vecteur quelconque, on a d'après (2.1) :

$$\left(\frac{d\vec{X}}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\vec{X}}{dt} \right)_{R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{X} \quad (2.2)$$

Nous insistons très fortement sur cette dernière relation qui montre que :

**Si un vecteur \vec{X} appartient à deux référentiels R et R' en rotation l'un par rapport à l'autre, la dérivée du vecteur \vec{X} dans R est différente de sa dérivée dans R' .
Par contre il est clair que si deux référentiels R et R' sont en mouvement de translation l'un par rapport à l'autre ($\vec{\Omega}_{R'/R} = \vec{0}$), la dérivée d'un vecteur \vec{X} dans l'un est égale à la dérivée de ce même vecteur \vec{X} dans l'autre.**

2.3. Cas général

Cette relation peut être généralisée à un mouvement combinant une translation et une rotation en faisant intervenir la vitesse de O' par rapport à R ainsi que le vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}_{R'/R}$ caractérisant la rotation de R' par rapport à R . En partant de :

$$\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$$

on voit que :

$$\left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\vec{OO'}}{dt} \right)_R + \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt} \right)_R$$

Or la dérivée de $\vec{O'M}$ dans R peut s'exprimer à partir de la dérivée de ce même vecteur dans R' , d'où :

$$\left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\vec{OO'}}{dt} \right)_R + \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt} \right)_{R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M}$$

Nous obtenons ainsi la loi de composition des vitesses dans un cas général :

$$\vec{v}_{M/R} = \vec{v}_{O'/R} + \vec{v}_{M/R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M}$$

On distingue dans cette expression deux termes :

- $\vec{v}_{M/R'}$ qui représente la vitesse de M par rapport à R' et que l'on appelle **vitesse relative** de M par rapport à R' .
- $\vec{v}_{O'/R} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M}$ qui est la **vitesse d'entraînement** de M dans son mouvement par rapport à R . Cette vitesse est la somme de deux termes. Le premier terme correspond à la vitesse d'entraînement due au déplacement de l'origine O' (terme de translation) et le deuxième correspond à la vitesse d'entraînement due à la rotation de R' par rapport à R (terme de rotation).

Encart 2.3. Le mouvement cycloïdal

Notre but est de montrer comment il est possible d'utiliser la loi de composition des vitesses afin de prédire la vitesse d'un point dans un référentiel R connaissant sa vitesse dans un référentiel R' . À ce titre nous considérons le mouvement de la valve M de la roue d'une bicyclette de rayon R . Ce mouvement est le résultat de la composition d'un

mouvement de translation de la fourche et d'un mouvement de rotation de la roue. Le mouvement étant composé, il est difficile d'écrire l'expression de la vitesse de la valve dans le référentiel R fixe. C'est pourquoi il est utile de décomposer le mouvement en faisant intervenir un autre référentiel dans lequel le mouvement de la valve est simple. Nous allons à ce titre donner deux exemples qui montrent comment il est possible de tirer les avantages de la loi de composition des vitesses.

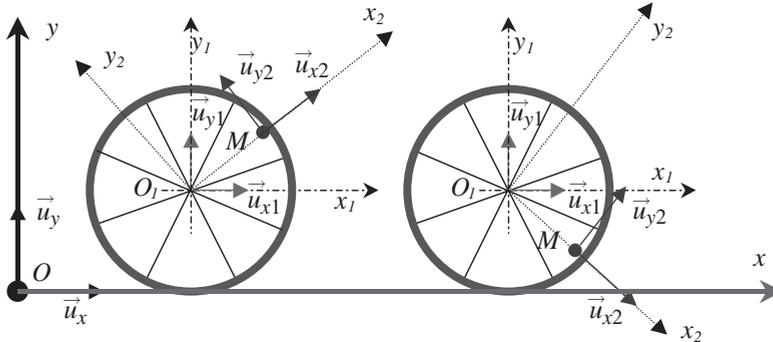


Figure 2.10 • Mouvement de la valve d'une roue de bicyclette.

Nous considérons dans les exemples qui suivent les référentiels suivants (figure 2.10) :

- $R(O, x, y, z, t)$ avec $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$;
- $R_1(O_1, x_1, y_1, z_1, t)$ avec $(\vec{u}_{x2}, \vec{u}_{y2})$ base polaire mobile de R_1 ;
- $R_2(O_1, x_2, y_2, z_2, t)$ avec $(\vec{u}_{x2}, \vec{u}_{y2})$ base fixe de R_2 .

Nous observons que la position du point M est définie par

$$\overrightarrow{O_1M} = R \vec{u}_{x2}; \left(\widehat{\vec{u}_{x1}, \vec{u}_{x2}} \right) = \theta(t)$$

Avant de faire un bon usage de la loi de composition des vitesses, il est utile de se poser les questions suivantes :

- que fait le référentiel R' par rapport au référentiel R ?
- que fait le point M dans le référentiel R' ?

Considérons tout d'abord que R' s'identifie au référentiel R_1 . En réponse à la première question nous observons que le référentiel R_1 se déplace avec le centre de la roue O_1 (fourche) et est en mouvement de *translation rectiligne uniforme* de vitesse $\vec{v}_{O_1/R}$. Nous concluons donc que $\vec{\Omega}_{R_1/R} = \vec{0}$.

À la deuxième question nous répondons que le point M est en mouvement de rotation uniforme dans R_1 .

En appliquant la loi de composition des vitesses qui se résume à :

$$\vec{v}_{M/R} = \vec{v}_{M/R_1} + \vec{v}_{O_1/R} + \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

nous voyons que le dernier terme est nul. En utilisant la base mobile $(\vec{u}_{x2}, \vec{u}_{y2})$ de R_1 dans laquelle $\overrightarrow{O_1M} = R \vec{u}_{x2}$, nous voyons que

$$\begin{aligned}\vec{v}_{M/R} &= \vec{v}_{M/R_1} + \vec{v}_{O_1/R} = \vec{v}_{O_1/R} + \left. \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right)_{R_1} \\ \vec{v}_{M/R} &= \vec{v}_{O_1/R} + \frac{d(R\vec{u}_{x_2})_{R_1}}{dt} = \vec{v}_{O_1/R} + R\dot{\theta}\vec{u}_{y_2}\end{aligned}$$

Considérons maintenant le référentiel R_2 lié à la valve. Ce référentiel est en rotation translation par rapport à R , donc dans ce cas

$$\vec{\Omega}_{R_2/R} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{\Omega}_{R_2/R} = \dot{\theta}\vec{u}_z$$

De plus la valve M est immobile dans R_2 , donc $\vec{v}_{M/R_2} = \vec{0}$

On obtient donc :

$$\vec{v}_{M/R} = \vec{v}_{O_1/R} + \vec{\Omega}_{R_2/R} \wedge \overrightarrow{O_1M} = \vec{v}_{O_1/R} + \Omega_{R_2/R}\vec{u}_z \wedge R\vec{u}_{x_2} = \vec{v}_{O_1/R} + R\dot{\theta}\vec{u}_{y_2}$$

Nous retrouvons bien évidemment la même expression puisqu'en utilisant le référentiel R_1 nous nous sommes placés dans la même base $(\vec{u}_{x_2}, \vec{u}_{y_2})$.

3. ÉTUDE DE L'ACCÉLÉRATION

3.1. Loi de composition des accélérations

Nous cherchons à exprimer l'accélération du point M par rapport à R connaissant les caractéristiques du mouvement par rapport à R' . Nous supposons que le référentiel R' est en mouvement de translation rotation par rapport à R . La loi de composition des vitesses nous donne :

$$\vec{v}_{M/R} = \vec{v}_{M/R'} + \vec{v}_{O'/R} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

et par définition nous avons :

$$\vec{a}_{M/R} = \left. \frac{d\vec{v}_{M/R}}{dt} \right)_R$$

Il en résulte que :

$$\vec{a}_{M/R} = \left. \frac{d\left(\vec{v}_{M/R'} + \vec{v}_{O'/R} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)}{dt} \right)_R$$

On obtient donc :

$$\vec{a}_{M/R} = \vec{a}_{O'/R} + \left. \frac{d\vec{v}_{M/R'}}{dt} \right)_R + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \left. \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right)_R + \frac{d\vec{\Omega}_{R'/R}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} \quad (2.3)$$

Il importe à ce stade de commenter les règles de dérivation. Nous voyons que par définition nous dérivons, pour obtenir l'accélération de M par rapport à R , la vitesse de

M dans R par rapport au temps. En faisant cette opération, il apparaît dans le second membre des vecteurs qui sont manifestement des vecteurs liés au référentiel R' comme par exemple le vecteur $\overrightarrow{O'M}$ ou encore le vecteur $\overrightarrow{v}_{M/R'}$. Nous souhaitons faire apparaître leur dérivée dans R' et nous utilisons donc à cette fin la règle de dérivation (2.2) :

$$\left. \frac{d\overrightarrow{X}}{dt} \right)_R = \left. \frac{d\overrightarrow{X}}{dt} \right)_{R'} + \overrightarrow{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{X}$$

Appliquée aux vecteurs $\overrightarrow{O'M}$ et $\overrightarrow{v}_{M/R'}$ cette règle conduit à :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right)_R &= \left. \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right)_{R'} + \overrightarrow{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M} \\ \left. \frac{d\overrightarrow{v}_{M/R'}}{dt} \right)_R &= \left. \frac{d\overrightarrow{v}_{M/R'}}{dt} \right)_{R'} + \overrightarrow{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{v}_{M/R'} \end{aligned}$$

Nous concluons donc que :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right)_R &= \overrightarrow{v}_{M/R'} + \overrightarrow{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M} \\ \left. \frac{d\overrightarrow{v}_{M/R'}}{dt} \right)_R &= \overrightarrow{a}_{M/R'} + \overrightarrow{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{v}_{M/R'} \end{aligned}$$

Le report de ces expressions dans l'équation (2.3) conduit à écrire le vecteur accélération de M par rapport à R sous la forme :

$$\overrightarrow{a}_{M/R} = \overrightarrow{a}_{M/R'} + \overrightarrow{a}_e + \overrightarrow{a}_c \quad (2.4)$$

avec : $\overrightarrow{a}_e = \overrightarrow{a}_{O'/R} + \overrightarrow{\Omega}_{R'/R} \wedge (\overrightarrow{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}) + \frac{d\overrightarrow{\Omega}_{R'/R}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M}$

$$\overrightarrow{a}_c = 2\overrightarrow{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{v}_{M/R'}$$

Le résultat ci-dessus constitue la loi de composition des accélérations.

Il est alors possible de distinguer trois termes dans cette expression :

- le premier terme du second membre $\overrightarrow{a}_{M/R'}$ qui représente l'accélération de M dans R' ou **accélération relative** ;
- le dernier terme du second membre qui représente l'**accélération de Coriolis ou accélération complémentaire** $\overrightarrow{a}_c = 2\overrightarrow{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{v}_{M/R'}$. Elle n'existe que si le point est M en mouvement dans R' et si R' est un référentiel en rotation par rapport à R ;
- le terme intermédiaire qui représente l'**accélération d'entraînement** \overrightarrow{a}_e . Cette accélération correspondrait à l'accélération qu'aurait le point M par rapport à R s'il était fixe dans R' . Dans ce cas les accélérations relative et complémentaire sont nulles.

Encart 2.4. Application de la loi de composition des accélérations

Nous cherchons à comprendre comment utiliser l'équation (2.4). Reprenons l'exemple du mouvement cycloïdal illustré par la figure 2.10 et considérons les trois référentiels suivants :

- $R(O, x, y, z, t)$ avec $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ fixe de R ;
- $R_1(O_1, x_1, y_1, z_1, t)$ avec $(\vec{u}_{x_2}, \vec{u}_{y_2})$ base polaire mobile de R_1 ;
- $R_2(O_2 \equiv O_1, x_2, y_2, z_2, t)$ avec $(\vec{u}_{x_2}, \vec{u}_{y_2})$ base fixe de R_2 .

Nous supposons que la roue se déplace d'un mouvement rectiligne uniforme, ce qui impose $\vec{a}_{O'/R} = \vec{0}$.

Nous commençons par utiliser les référentiels R et R_1 . Puisque R_1 est en translation par rapport à R , le vecteur $\vec{\Omega}_{R_1/R}$ et le terme d'accélération de Coriolis sont nuls. Il en va de même de l'accélération d'entraînement. Nous en déduisons que :

$$\vec{a}_{M/R} = \vec{a}_{M/R_1}$$

Comme nous avons :

$$\vec{O_1M} = \vec{O_2M} = R \vec{u}_{x_2}$$

il est facile de voir que :

$$\vec{a}_{M/R} = \vec{a}_{M/R_1} = -R\dot{\theta}^2 \vec{u}_{x_2}$$

Dans le cas où nous considérons les référentiels R et R_2 lié à la valve, l'accélération de Coriolis est nulle car le point M (valve) est fixe dans R_2 , ainsi que l'accélération relative. Par contre R_2 est en mouvement de rotation par rapport à R et

$$\vec{\Omega}_{R_2/R} = \dot{\theta} \vec{u}_z$$

Nous obtenons alors le résultat suivant :

$$\vec{a}_{M/R} = \vec{\Omega}_{R_2/R} \wedge (\vec{\Omega}_{R_2/R} \wedge \vec{O'M}) = -R\dot{\theta}^2 \vec{u}_{x_2}$$

Comme dans le cas de l'étude de la vitesse, nous retrouvons bien les mêmes expressions, que l'on utilise le référentiel R_1 ou le référentiel R_2 , en raison de l'identité de la base de ces deux référentiels.

À RETENIR

► Mouvement de translation d'un référentiel R' par rapport à un référentiel R :

Les axes du référentiel R' restent parallèles à ceux du référentiel R .

La translation peut être rectiligne, circulaire ou quelconque suivant le mouvement de l'origine O' du référentiel R' .

► **Mouvement de rotation d'un référentiel R' par rapport à un référentiel R :**

Les axes du référentiel R' tournent par rapport à ceux du référentiel R (vitesse angulaire $\vec{\Omega}_{R'/R}$).

► **Loi de composition des vitesses :**

$$\vec{v}_{M/R} = \vec{v}_{R'/R} + \vec{v}_{M/R'}$$

$$\text{avec } \vec{v}_{R'/R} = \vec{v}_{O'/R} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M} \text{ (vecteur vitesse d'entraînement)}$$

► **Loi de composition des accélérations :**

$$\vec{a}_{M/R} = \vec{a}_{M/R'} + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

avec $\vec{a}_e = \vec{a}_{O'/R} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge (\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M}) + \frac{d\vec{\Omega}_{R'/R}}{dt} \wedge \vec{O'M}$ (vecteur accélération d'entraînement)

et $\vec{a}_c = 2\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_{M/R'}$ (vecteur accélération complémentaire ou de Coriolis)

EXERCICE D'APPLICATION AVEC SOLUTION DÉTAILLÉE

Cinématique et changement de référentiel

Une charrette se déplace à vitesse constante $V_o = 1,8 \text{ km.h}^{-1}$. Ces roues à rayons ont un diamètre de $D = 47,75 \text{ cm}$.

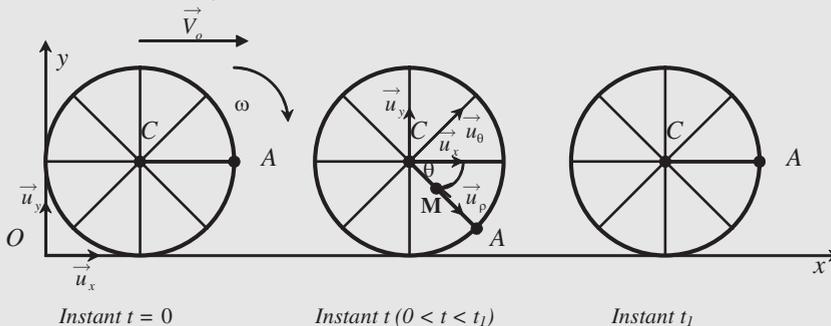


Figure 2.11

À l'instant $t = 0$, on considère un rayon CA horizontal avec C centre d'une roue et A l'autre extrémité du rayon. À l'instant t_1 ce même rayon se retrouve pour la première fois dans la même position (la roue a effectué un tour complet).

I. Question préliminaire : Cinématique.

- 1) Exprimer la vitesse angulaire ω en fonction de V_o et D . En déduire l'expression du vecteur vitesse angulaire ω . Calculer ω .
- 2) Exprimer le temps t_1 au bout duquel la roue a effectué un tour complet. Calculer t_1 .
- 3) Une petite coccinelle M située au centre C à l'instant $t = 0$ part avec une vitesse constante v sur le rayon CA . Quelle doit être sa vitesse pour atteindre A à l'instant t_1 ?

II. Référentiels en mouvement

On considère les référentiels suivants caractérisés par leur repère :

- Référentiel $R(O, x, y, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$,
 - Référentiel $R'(C, x, y, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$
 - Référentiel R'' lié au rayon CA avec sa base fixe $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ qui correspond à la base polaire du repère $R'(C, x, y)$.
- Quel est le mouvement de R' par rapport à R ? (préciser les caractéristiques du mouvement)
- Quel est le mouvement de R'' par rapport à R' ? (préciser les caractéristiques du mouvement)
- Quel est le mouvement de R'' par rapport à R ? (préciser les caractéristiques du mouvement)

III. On se place dans le référentiel R'' (lié au rayon CA , base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$).

- 1) La coccinelle se déplaçant à vitesse constante v dans ce repère, donner l'équation horaire du mouvement de M ($CM = \rho(t)$).
- 2) Exprimer le vecteur vitesse \vec{v} du point M dans la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$
- 3) Que vaut le vecteur accélération \vec{a} du point M dans ce référentiel ?

IV. On se place dans le référentiel $R'(C, x, y, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ et on utilisera sa base mobile $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$.

- 1) Donner l'expression du vecteur position \overrightarrow{CM}
- 2) Exprimer le vecteur vitesse $\vec{v}_{M/R'}$ du point M par rapport au référentiel R' .
- 3) Exprimer le vecteur accélération $\vec{a}_{M/R'}$ du point M par rapport au référentiel R' .

V. Loi de composition des vitesses et accélérations

- 1) Exprimer, pour le point M , le vecteur vitesse d'entraînement \vec{v}'_e du référentiel R'' par rapport au référentiel R' . Énoncer la loi de composition des vitesses et retrouver l'expression de $\vec{v}_{M/R'}$ à partir de celles de \vec{v} et de \vec{v}'_e .
- 2) De même, exprimer :
 - a) Le vecteur accélération d'entraînement \vec{a}'_e du point M .
 - b) Le vecteur accélération de Coriolis ou complémentaire \vec{a}_c de M .
 - c) Énoncer la loi de composition des accélérations et retrouver l'expression de $\vec{a}_{M/R'}$ à partir de celles de \vec{a} , \vec{a}_e et \vec{a}_c .

VI. On se place maintenant dans le référentiel $R(O, x, y, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$.

1) Comment, à partir de $\vec{v}_{M/R'}$, peut-on obtenir l'expression du vecteur $\vec{v}_{M/R}$ vitesse de M par rapport à R ? Donner son expression.

2) Même question pour l'accélération $\vec{a}_{M/R'}$.

Solution

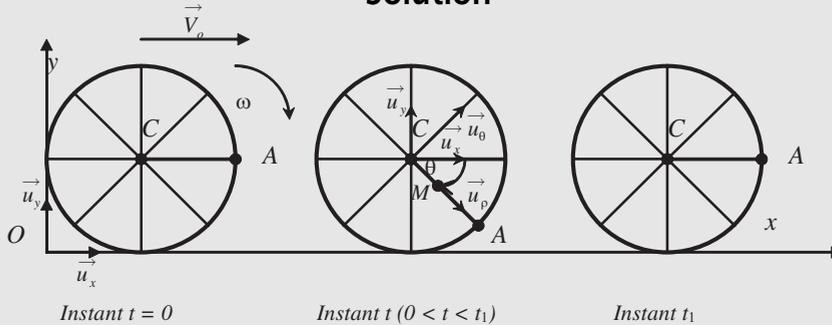


Figure 2.12

I. 1) $\omega = \frac{2V_o}{D} = \frac{2 \cdot 0,5}{0,4775} = 2,094 \text{ rad.s}^{-1} \Rightarrow \vec{\omega} = \omega \cdot \vec{u}_z = -2,094 \vec{u}_z$ attention $\omega < 0$

2) Pour un tour : $2\pi = |\omega| t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{2\pi}{|\omega|} = \frac{2 \cdot 3,14}{2,094} = 3 \text{ s}$

3) $\frac{D}{2} = vt_1 \Rightarrow v = \frac{D}{2t_1} = \frac{47,75}{6} = 7,96 \approx 8 \text{ cm.s}^{-1}$

II. R' est en translation rectiligne uniforme par rapport à R avec la vitesse V_o

R'' est en rotation uniforme par rapport à R' avec la vitesse angulaire

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{u}_z = -2,094 \vec{u}_z$$

R'' est en mouvement de translation (vitesse \vec{V}_o) plus rotation autour axe \vec{u}_z par rapport à R ($\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{u}_z = -2,094 \vec{u}_z$)

III. On se place dans le référentiel R'' (lié au rayon CA , base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$).

1) $CM = \rho(t) = vt + \text{constante} \Rightarrow \rho(t) = vt$

2) $\vec{v} = v \vec{u}_\rho$

3) $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{u}_\rho)}{dt} = \vec{0}$ (M a un mouvement rectiligne uniforme sur le rayon CA).

IV. On se place dans le référentiel R' ($C, x, y, \vec{u}_x, \vec{u}_y$) et on utilisera la base mobile $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$.

1) $\vec{CM} = \rho \vec{u}_\rho$

$$\begin{aligned} 2) \vec{v}_{M/R'} &= \frac{d(\rho \vec{u}_\rho)}{dt} \Bigg|_{R'} = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta = v \cdot \vec{u}_\rho + \rho \omega \cdot \vec{u}_\theta \\ &= v \cdot \vec{u}_\rho + v \omega t \cdot \vec{u}_\theta = v(\vec{u}_\rho + \omega t \cdot \vec{u}_\theta). \end{aligned}$$

$$\vec{v}_{M/R'} = v(\vec{u}_\rho + \omega t \cdot \vec{u}_\theta) = 0,08(\vec{u}_\rho - 2,094t \cdot \vec{u}_\theta)$$

$$\begin{aligned} 3) \vec{a}_{M/R'} &= \frac{d \vec{v}_{M/R'}}{dt} \Bigg|_{R'} = v(\dot{\theta} \vec{u}_\theta + \omega \cdot \vec{u}_\theta - \omega t \dot{\theta} \vec{u}_\rho) \\ &= v(2\omega \cdot \vec{u}_\theta - \omega^2 t \vec{u}_\rho) = \omega \cdot v(-\omega t \cdot \vec{u}_\rho + 2 \vec{u}_\theta) \end{aligned}$$

$$\vec{a}_{M/R'} = -0,35t \vec{u}_\rho - 0,333 \vec{u}_\theta$$

$$\text{V. 1) } \vec{v}'_e = \vec{v}_{C/R'} + \vec{\omega} \wedge \vec{CM} = \vec{0} + \omega \cdot \vec{u}_z \wedge \rho \vec{u}_\rho = \rho \omega \cdot \vec{u}_\theta = v \omega t \cdot \vec{u}_\theta = -0,167t \cdot \vec{u}_\theta$$

Le point M aurait un mouvement circulaire uniforme s'il ne bougeait pas dans R' .
Donc $\vec{v}'_e = \rho \omega \cdot \vec{u}_\theta$. D'après la loi de composition des vitesses :

$$\vec{v}_{M/R'} = \vec{v}_{M/R''} + \vec{v}'_e = v \vec{u}_\rho + v \omega t \cdot \vec{u}_\theta = 0,08(\vec{u}_\rho - 2,094t \cdot \vec{u}_\theta)$$

même résultat que pour 3) b).

$$2) \text{ a) } \vec{a}_e = \vec{a}_{\frac{C}{R'}} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{CM}) + \frac{d \vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{CM} = \vec{0} + \omega \cdot \vec{u}_z \wedge (\omega \cdot \vec{u}_z \wedge \rho \cdot \vec{u}_\rho) = -\omega^2 \rho \vec{u}_\rho.$$

$$\vec{a}_e = -\omega^2 \rho \vec{u}_\rho = -\omega^2 v t \vec{u}_\rho = -0,349t \cdot \vec{u}_\rho$$

Le point M aurait un mouvement circulaire uniforme s'il ne bougeait pas dans R' .
Donc l'accélération est normale centripète $\vec{a}_e = -\omega^2 \rho \vec{u}_\rho = -0,349t \cdot \vec{u}_\rho$.

$$\text{b) } \vec{a}_c = 2 \vec{\omega} \wedge \vec{v} = 2\omega \cdot \vec{u}_z \wedge v \vec{u}_\rho = 2v\omega \cdot \vec{u}_\theta$$

$$\text{c) } \vec{a}_{M/R'} = \vec{a}_{M/R''} + \vec{a}_e + \vec{a}_c = \vec{0} - \rho \omega^2 \cdot \vec{u}_\rho + 2v\omega \cdot \vec{u}_\theta = v\omega(-\omega t \cdot \vec{u}_\rho + 2 \vec{u}_\theta)$$

même résultat que pour 3)c).

VI. On se place maintenant dans le référentiel $R(O, x, y, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$.

1) R' est en translation par rapport à R . On a donc :

$$\vec{v}_{M/R} = \vec{v}_{M/R'} + \vec{V}_o = v(\vec{u}_\rho + \omega t \cdot \vec{u}_\theta) + V_o \vec{u}_z$$

$$2) \vec{a}_{M/R} = \vec{a}_{M/R'} + \vec{a}_{C/R} = \vec{a}_{M/R'} = -\rho \omega^2 \cdot \vec{u}_\rho + 2v\omega \cdot \vec{u}_\theta = v\omega(-\omega t \cdot \vec{u}_\rho + 2 \vec{u}_\theta)$$

EXERCICES CORRIGÉS

1 À un instant pris comme origine des dates ($t = 0$), un autobus prend un virage à vitesse angulaire constante ω_o . O est le centre du virage et la distance $OA = R$.

À ce moment précis, un passager P , immobile en A , se précipite directement vers une place assise libre en B , d'un mouvement d'accélération constante a_o (voir figure 2.13).

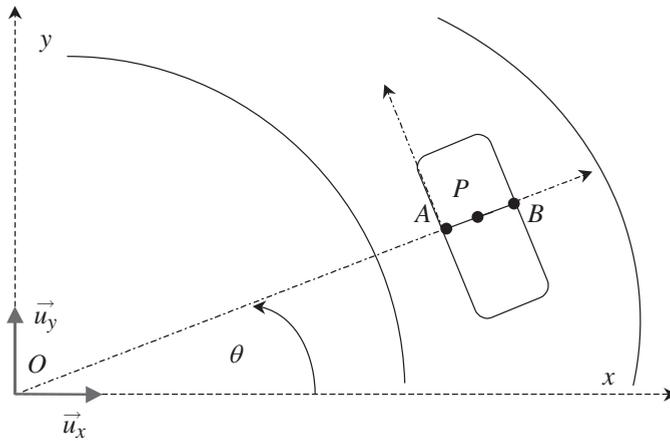


Figure 2.13

- 1) Étude dans le référentiel lié à l'autobus R_A . Préciser le repère choisi et la nature du mouvement de P . Déterminer, en fonction des données et de t , le vecteur accélération \vec{a}_r et le vecteur vitesse \vec{v}_r du point P , ainsi que l'équation horaire du mouvement.
- 2) Étude dans le référentiel terrestre R_T . Préciser le repère choisi. Déterminer le vecteur vitesse \vec{v}_T et le vecteur accélération \vec{a}_T du point P . Donner l'équation de la trajectoire du point P en coordonnées polaires ($\rho = OP$ en fonction de θ).
- 3) En utilisant les lois de composition des vitesses et des accélérations, retrouver les vecteurs \vec{v}_T et \vec{a}_T à partir des vecteurs \vec{v}_r et \vec{a}_r . Indiquer clairement les différents termes intervenant dans ces lois en précisant leur signification et leur expression.
- 4) Applications numériques : $a_o = 6 \text{ m.s}^{-2}$, $\omega_o = 1/6 \text{ rad.s}^{-1}$, $R = 120 \text{ nm}$ et $AB = 3 \text{ m}$.

Avec quelle vitesse, P atteint le siège B et en combien de temps ? Quelle distance a parcouru l'autobus, et de quel angle a-t-il tourné ?

- 2 Le repère d'espace $G\vec{x}_1, G\vec{y}_1$ du référentiel R_1 tourne autour de l'axe Oz du référentiel R d'axes Ox, Oy, Oz . Le point G décrit un cercle de rayon a constant, à la vitesse angulaire constante ω_o . Dans R_1 le point A_1 décrit un cercle de rayon r et de centre G , avec la vitesse angulaire constante ω_1 (figure 2.14). Exprimer la vitesse d'entraînement de A_1 , son accélération d'entraînement et son accélération complémentaire.

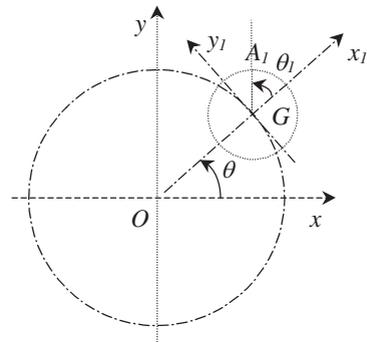


Figure 2.14

- 3 Soit dans un plan un référentiel R et un référentiel R_1 dont les repères d'espace sont formés respectivement des axes Ox, Oy et des axes Ox_1, Oy_1 . Le repère Ox_1, Oy_1 tourne à la vitesse angulaire ω constante, autour de l'axe Oz perpendiculaire au plan. Un point M est mobile sur Ox_1 selon la loi :

$$\vec{OM} = \rho(t) \vec{u}_{x1} = (\rho_o \cos \omega t) \vec{u}_{x1}$$

- 1) Calculer en fonction de ρ_0 et ω le vecteur vitesse \vec{v}_{R_1} de M dans le référentiel R_1 ainsi que le vecteur vitesse d'entraînement \vec{v}_e du point M .
- 2) En déduire le module du vecteur vitesse \vec{v}_R de M dans R et l'angle φ défini par $\varphi = (\vec{OM}, \vec{v}_R)$
- 3) Calculer le vecteur accélération \vec{a}_{R_1} de M dans R_1 , le vecteur accélération d'entraînement \vec{a}_e du point M , le vecteur accélération complémentaire \vec{a}_c et l'accélération \vec{a}_R de M dans R . Quelle est la valeur de l'angle $\Psi = (\vec{OM}, \vec{a}_R)$?

4 Un manège de chevaux de bois tourne à la vitesse angulaire constante $\vec{\omega}_0 = \omega_0 \cdot \vec{u}_z$. Pour aider un enfant en difficulté sur un cheval de bois représenté par le point C , le patron (point P) du manège part du centre O et se dirige vers C d'un mouvement d'accélération constante a_0 (figure 2.15).

Notation : R_t référentiel terrestre ($O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ repère fixe dans R_t) et R_m référentiel lié au manège.

Origine des dates : à $t = 0$, P est en O et part avec une vitesse nulle ; OC coïncide avec l'axe Ox .

On utilisera les coordonnées polaires (ρ, θ) pour repérer P ainsi que la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ pour exprimer les différents vecteurs.

On prendra : $a = 1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ $\omega = 15 \text{ tours/min}$ $OC = \rho_0 = 2 \text{ m}$.

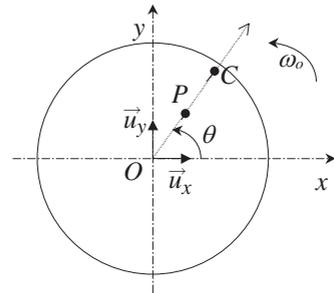


Figure 2.15

- 1) Étude dans le référentiel R_m
 - a) Quelle est la nature du mouvement de P ?
 - b) Déterminer le vecteur vitesse de P : \vec{V}_{P/R_m} .
 - c) Déterminer l'équation horaire du mouvement de P : $\rho(t)$.
 - d) Temps mis pour atteindre C .
- 2) Mouvement du référentiel R_m par rapport au référentiel R_t
 - a) Préciser quel est ce mouvement.
 - b) Donner l'équation horaire $\theta(t)$.
- 3) Mouvement dans le référentiel R_t
 - a) Donner l'expression du vecteur vitesse de P , \vec{V}_{P/R_t} en fonction de a , ω_0 et t .
 - b) Même chose pour le vecteur accélération \vec{a}_{P/R_t} .
 - c) Donner l'équation de la trajectoire en coordonnées polaires.
 - d) Faire une représentation (on prendra les valeurs pour $t = 0 \text{ s}$; $t = 0,5 \text{ s}$; $t = 1 \text{ s}$; $t = 1,5 \text{ s}$ et $t = 2 \text{ s}$). Représenter les vecteurs vitesses.
- 4) Utilisation des lois de composition des vitesses et des accélérations :
 - a) Écrire la loi de composition des vitesses.
 - b) Exprimer le vecteur vitesse d'entraînement de R_m/R_t pour le point P .
 - c) Vérifier que cette loi redonne bien \vec{V}_{P/R_t} (3- a).
 - d) Exprimer la loi de composition des accélérations.
 - e) Déterminer l'accélération d'entraînement.

- f) Déterminer l'accélération de Coriolis ou accélération complémentaire.
 g) Vérifier que cette loi redonne bien \vec{a}_{P/R_t} (3- c).

5 Une mouche M parcourt l'aiguille des secondes d'une horloge avec une accélération constante a_0 et, à l'instant $t = 0$, elle est au centre O de l'horloge avec une vitesse nulle, alors que l'aiguille indique « 0 seconde ».

R est le référentiel terrestre (ou le référentiel du mur de l'horloge). Il est défini par (O, x, y, z) , repère fixe de R . R' est le référentiel lié à l'aiguille des secondes OX . À $t = 0$, OX coïncide avec Oy .

On utilisera les coordonnées polaires de M , (ρ, θ) , et pour exprimer les différents vecteurs, la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$.

1) Mouvement de M dans R'

- a) Déterminer le vecteur vitesse de M : $\vec{V}_{M/R'}$.
 b) Déterminer l'équation horaire $\rho(t)$ du mouvement de M .
 c) La mouche atteint l'extrémité de l'aiguille qui mesure 20 cm en 60 s. Quelle est la valeur de a_0 ?

2) Mouvement de M dans R

- a) Donner l'équation de la trajectoire en coordonnées polaires.
 b) Donner l'expression du vecteur vitesse de M , $\vec{V}_{M/R}$, en utilisant la loi de composition des vitesses.
 c) Donner l'expression de son vecteur accélération $\vec{a}_{M/R}$ en utilisant la loi de composition des accélérations.

6 Une roue circulaire de centre C , de rayon a , roule sans glisser sur Ox , tout en restant dans le plan Ox, Oz (figure 2.16).

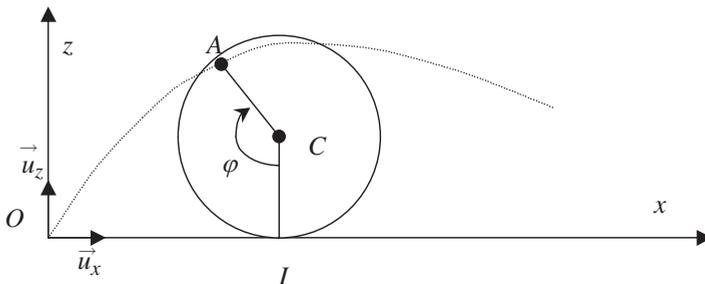


Figure 2.16

Un point A de la roue coïncide à l'instant $t = 0$ avec l'origine O du repère. Le centre C a une vitesse constante V_0 .

1) Déterminer les coordonnées de A à l'instant t .

2) Calculer \vec{V} le vecteur vitesse de A par rapport au sol et étudier ses variations au cours du temps. Pour quelles positions de A ce vecteur est-il nul ?

3) Soit le vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ caractérisant la rotation de la roue. Donner l'expression de $\vec{\Omega}$. Calculer le produit vectoriel $\vec{\Omega} \wedge \vec{IA}$ (figure 2.16). Le comparer à \vec{V} et commenter.

4) Représenter \vec{V} sur la figure. Montrer que \vec{V} peut être décomposé en deux vecteurs de même module, l'un parallèle à Ox , l'autre tangent à la roue.

Calculer \vec{a} , le vecteur accélération de A par rapport au sol.

5) On peut considérer que le mouvement de A est le résultat de la composition de deux mouvements :

- un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe Cy de la roue (caractérisé par le vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}$);
- un mouvement de translation rectiligne uniforme de la roue (vitesse $V_o \vec{u}_x$).

Retrouver \vec{V} et \vec{a} en utilisant les lois de compositions des vitesses et des accélérations.

Solutions

1 Référentiel R lié à l'autobus, repère $(A, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ base fixe dans l'autobus. P a un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération a_o dans la direction de $A \rightarrow B$ (direction de \vec{u}_ρ). À $t = 0$, P est en A .

$$a_r = a_o \Rightarrow v_r = a_o t \Rightarrow AP = x = \frac{1}{2} a_o t^2.$$

2) Référentiel terrestre R_T : repère $(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ base mobile des coordonnées polaires.

$$\vec{OP} = r\vec{u}_\rho = (R + x)\vec{u}_\rho \Rightarrow \vec{v}_T = \dot{x}\vec{u}_\rho + (R + x)\dot{\theta}\vec{u}_\theta = a_o t\vec{u}_\rho + (R + \frac{1}{2}a_o t^2)\omega_o\vec{u}_\theta.$$

$$\vec{a}_T = \ddot{x}\vec{u}_\rho + \dot{x}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{x}\dot{\theta}\vec{u}_\theta - (R + x)\dot{\theta}^2\vec{u}_\rho = (a_o - (R + \frac{1}{2}a_o t^2)\omega_o^2)\vec{u}_\rho + 2a_o t\omega_o\vec{u}_\theta.$$

On a l'équation de la trajectoire : $r = R + \frac{1}{2}a_o t^2$ et $\theta = \omega_o t \Rightarrow r = R + \frac{1}{2}\frac{a_o}{\omega_o^2}\theta^2$ (équation d'une spirale).

3) Loi de composition des vitesses :

Le référentiel R est en mouvement de rotation par rapport à R_T avec un vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}_{R/R_T} = \omega_o \vec{u}_z$.

$$\vec{v}_T = \vec{v}_r + \vec{v}_e \text{ avec } \vec{v}_r = a_o t\vec{u}_\rho \text{ et}$$

$$\vec{v}_e = \frac{d\vec{OA}}{dt} + (\vec{\Omega}_{R/R_T} \wedge \vec{AP}) = (\vec{\Omega}_{R/R_T} \wedge \vec{OA}) + (\vec{\Omega}_{R/R_T} \wedge \vec{AP})$$

$\vec{v}_e = (\vec{\Omega}_{R/R_T} \wedge \vec{OP}) = (R + x)\omega_o\vec{u}_\theta = (R + \frac{1}{2}a_o t^2)\omega_o\vec{u}_\theta$. La vitesse d'entraînement correspond à la vitesse du point P par rapport à R_T s'il était fixe dans l'autobus à ce moment-là. Il a alors un mouvement circulaire uniforme de rayon $(R + x)$ et de vitesse angulaire ω_o , d'où l'expression du vecteur vitesse.

$$\text{On a donc } \vec{v}_T = \vec{v}_r + \vec{v}_e \Rightarrow \vec{v}_T = a_o t\vec{u}_\rho + (R + \frac{1}{2}a_o t^2)\omega_o\vec{u}_\theta.$$

Loi de composition des accélérations :

$$\vec{a}_T = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c \text{ avec } \vec{a}_r = a_o\vec{u}_\rho \text{ et } \vec{a}_c = 2\vec{\Omega}_{R/R_T} \wedge \vec{v}_r = 2\omega_o \vec{u}_z \wedge a_o t\vec{u}_\rho = 2a_o t\omega_o\vec{u}_\theta.$$

$$\begin{aligned}\vec{a}_e &= \frac{d^2 \vec{OA}}{dt^2} + \frac{d \vec{\Omega}_{R/R_T}}{dt} \wedge \vec{AP} + \vec{\Omega}_{R/R_T} \wedge (\vec{\Omega}_{R/R_T} \wedge \vec{AP}) \\ &= \vec{\Omega}_{R/R_T} \wedge (\vec{\Omega}_{R/R_T} \wedge \vec{OA}) + \vec{\Omega}_{R/R_T} \wedge (\vec{\Omega}_{R/R_T} \wedge \vec{AP}).\end{aligned}$$

$$\vec{a}_e = \vec{\Omega}_{R/R_T} \wedge (\vec{\Omega}_{R/R_T} \wedge \vec{OP}) = \omega_o \vec{u}_z \wedge (\omega_o \vec{u}_z \wedge (R+x)\vec{u}_\rho).$$

$\vec{a}_e = -\omega_o^2 (R + \frac{1}{2}a_o t^2) \vec{u}_\theta$. L'accélération d'entraînement correspond à l'accélération du point P par rapport à R_T s'il était fixe dans l'autobus à ce moment-là. Il a alors un mouvement circulaire uniforme de rayon $(R+x)$ et de vitesse angulaire ω_o d'où l'expression du vecteur accélération qui est normale à la trajectoire et centripète.

$$\vec{a}_T = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c \Rightarrow (a_o - (R + \frac{1}{2}a_o t^2)\omega_o^2)\vec{u}_\rho + 2a_o t \omega_o \vec{u}_\theta.$$

$$4) AB = 3 \text{ m} = \frac{1}{2}a_o t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2AB}{a_o}} = 1 \text{ s} \Rightarrow v_b = a_o t = 6 \text{ m.s}^{-1}.$$

L'autobus a tourné d'un angle $\theta = \omega_o t = \frac{1}{6} \text{ rad} = 9,55^\circ$ et a parcouru $l = R\theta = 20 \text{ m}$.

2

Le référentiel R_1 a un mouvement combiné de rotation uniforme par rapport au référentiel R avec un vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}_{R_1/R} = \omega_o \vec{u}_z$ et de translation circulaire uniforme (G décrit un cercle de rayon a avec une vitesse angulaire $\omega_o \vec{u}_z$ et donc une vitesse linéaire $\omega_o \vec{u}_z \wedge \vec{OG}$). Vitesse d'entraînement de A_1 :

$$\vec{v}_e = \frac{d \vec{OG}}{dt} + \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \vec{GA}_1 = \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \vec{OG} + \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \vec{GA}_1 = \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \vec{OA}_1$$

$$\vec{OA}_1 = \vec{OG} + \vec{GA}_1 = a \vec{u}_\rho + r \cos \theta_1 \vec{u}_\rho + r \sin \theta_1 \vec{u}_\theta = (a + r \cos \theta_1) \vec{u}_\rho + r \sin \theta_1 \vec{u}_\theta$$

Ceci peut aussi s'exprimer dans la base (\vec{u}_x, \vec{u}_y) en utilisant :

$$\vec{u}_\rho = \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y; \quad \vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y.$$

$$\vec{v}_e = \omega_o \vec{u}_z \wedge ((a + r \cos \theta_1) \vec{u}_\rho + r \sin \theta_1 \vec{u}_\theta) = -\omega_o r \sin \theta_1 \vec{u}_\rho + \omega_o (a + r \cos \theta_1) \vec{u}_\theta.$$

Le point A_1 a un mouvement circulaire de rayon r et de vitesse angulaire $\omega_1 = cste$. On a donc le vecteur vitesse de A_1 dans R_1 :

$$\vec{v}_{A_1} = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{GA}_1 = \vec{\omega}_1 \wedge (r \cos \theta_1 \vec{u}_\rho + r \sin \theta_1 \vec{u}_\theta) = -\omega_1 r \sin \theta_1 \vec{u}_\rho + \omega_1 r \cos \theta_1 \vec{u}_\theta.$$

On a le vecteur accélération complémentaire :

$$\vec{v}_c = 2 \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \vec{v}_{A_1} = 2 \omega_o \vec{u}_z \wedge (-\omega_1 r \sin \theta_1 \vec{u}_\rho + \omega_1 r \cos \theta_1 \vec{u}_\theta)$$

$$\vec{v}_c = -2 \omega_o \omega_1 r \cos \theta_1 \vec{u}_\rho - 2 \omega_o \omega_1 r \sin \theta_1 \vec{u}_\theta = -2 \omega_o \omega_1 \vec{GA}_1$$

$$\vec{v}_c = -2 \omega_o \omega_1 r (\cos \theta_1 \vec{u}_\rho + \sin \theta_1 \vec{u}_\theta).$$

On a le vecteur accélération d'entraînement :

$$\vec{v}_e = \frac{d^2 \vec{OG}}{dt^2} + \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge (\vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \vec{GA}_1) + \frac{d \vec{\Omega}_{R_1/R}}{dt} \wedge \vec{GA}_1$$

$$\vec{v}_e = \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge (\vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \vec{OG}) + \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge (\vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \vec{GA}_1) = \omega_o \vec{u}_z \wedge (\omega_o \vec{u}_z \wedge \vec{OA}_1)$$

$$\vec{v}_e = \omega_o \vec{u}_z \wedge (\omega_o \vec{u}_z \wedge ((a + r \cos \theta_1) \vec{u}_\rho + r \sin \theta_1 \vec{u}_\theta)) = -\omega_o^2 (a + r \cos \theta_1) \vec{u}_\rho - \omega_o^2 r \sin \theta_1 \vec{u}_\theta.$$

3 1) Dans le référentiel R_1 , $\vec{u}_{x1} = \vec{u}_\rho$ est un vecteur fixe
 $\Rightarrow \vec{v}_{R_1} = \dot{\rho} \vec{u}_{x1} = -(\rho_0 \omega \sin \omega t) \vec{u}_{x1}$.

Le référentiel R_1 est en rotation par rapport à R avec une vitesse angulaire constante $\vec{\Omega}_{R_1/R} = \omega \vec{u}_z$. La vitesse d'entraînement \vec{v}_e s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{v}_e &= \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \vec{OM} \\ &= \omega \vec{u}_z \wedge \rho_0 \cos \omega t \vec{u}_\rho = (\omega \rho_0 \cos \omega t) \vec{u}_\theta = \omega \rho \vec{u}_{y1} \end{aligned}$$

(le point M , s'il était fixe dans R_1 , aurait un mouvement circulaire uniforme de rayon ρ et de vitesse angulaire ω).

2) $\vec{v}_R = \vec{v}_{R_1} + \vec{v}_e = -(\rho_0 \omega \sin \omega t) \vec{u}_\rho + (\omega \rho_0 \cos \omega t) \vec{u}_\theta$
 $\vec{v}_R = \omega \rho_0 [-(\sin \omega t) \vec{u}_\rho + (\cos \omega t) \vec{u}_\theta] \Rightarrow \|\vec{v}_R\| = \omega \rho_0$
 et $\vec{v}_R \cdot \vec{u}_\rho = \|\vec{v}_R\| \|\vec{u}_\rho\| \cos \varphi$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{\vec{v}_R \cdot \vec{u}_\rho}{\omega \rho_0} = -\sin \omega t = -\sin \theta = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + \theta$$

3) $\vec{a}_{R_1} = \ddot{\rho} \vec{u}_{x1} = -(\rho_0 \omega^2 \cos \omega t) \vec{u}_\rho = -\rho \omega^2 \vec{u}_\rho$.

Accélération complémentaire :

$$\vec{a}_c = 2 \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \vec{v}_{R_1} = 2 \omega \vec{u}_z \wedge (-\rho_0 \omega \sin \omega t) \vec{u}_\rho = -2(\rho_0 \omega^2 \sin \omega t) \vec{u}_\theta$$

Accélération d'entraînement : $\vec{a}_e = \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge (\vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \vec{OM}) = -\rho \omega^2 \vec{u}_\rho$

$\vec{a}_R = \vec{a}_{R_1} + \vec{a}_c + \vec{a}_e = -2\rho_0 \omega^2 [(\cos \omega t) \vec{u}_\rho + (\sin \omega t) \vec{u}_\theta] \Rightarrow \|\vec{a}_R\| = 2\rho_0 \omega^2$

$\vec{a}_R \cdot \vec{u}_\rho = \|\vec{a}_R\| \cos \Psi = -2\rho_0 \omega^2 (\cos \omega t) \Rightarrow \cos \Psi = -\cos \omega t = -\cos \theta = \cos(\pi - \theta)$

$\Psi = \pi - \theta$.

Remarque :

$$\vec{OM} = \rho_0 \cos \omega t \vec{u}_\rho = \rho_0 \cos \omega t (\cos \omega t \vec{u}_x + \sin \omega t \vec{u}_y)$$

$$\vec{OM} = \rho_0 [(\cos^2 \omega t) \vec{u}_x + (\cos \omega t \sin \omega t) \vec{u}_y]$$

$$\vec{OM} = \rho_0 \left[\frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega t) \vec{u}_x + \frac{1}{2}(\sin 2\omega t) \vec{u}_y \right] \Rightarrow \left(x - \frac{\rho_0}{2}\right) = \frac{\rho_0}{2} \cos 2\omega t \text{ et } y = \frac{\rho_0}{2}$$

L'équation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes est $(x - \frac{\rho_0}{2})^2 + y^2 = (\frac{\rho_0}{2})^2$.

Le point M décrit un cercle de rayon $\frac{\rho_0}{2}$ et de centre C de coordonnées $(\frac{\rho_0}{2}, 0)$ (figure 2.17).

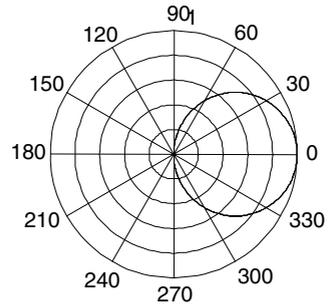


Figure 2.17

4 1) Étude dans R_m

Repère axe OC avec base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ fixe dans R_m . Le point P a un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération $a_0 \Rightarrow \vec{V}_{P/R_m} = (a_0 t) \vec{u}_\rho$ ($t = 0, \vec{V}_{P/R_m}(0) = \vec{0}$)

A.N. : $\vec{V}_{P/R_m} = t \cdot \vec{u}_\rho$.

À $t = 0, \vec{OP}(0) = \vec{0} \Rightarrow \vec{OP} = \rho \vec{u}_\rho = \frac{1}{2} a_0 t^2 \vec{u}_\rho$. A.N. : $\vec{OP} = 0, 5t^2 \vec{u}_\rho$

$OC = \rho_0 = \frac{1}{2} a_0 t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2\rho_0}{a_0}}$. A.N. : $t = \sqrt{4} = 2$ s

2) R_m a un mouvement de rotation par rapport à R_l avec une vitesse angulaire

$$\vec{\Omega}_{R_m/R_l} = \omega_o \vec{u}_z = \dot{\theta} \vec{u}_z = \frac{\pi}{2} \vec{u}_z.$$

$$\dot{\theta} = \omega_o \Rightarrow \theta = \omega_o t \quad (t = 0, \theta(0) = 0)$$

$$\text{A.N. : } \theta = \frac{\pi}{2} t = 1,57t$$

3) Étude dans R_l

Repère (O, x, y) avec la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ mobile dans R_l .

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \rho \vec{u}_\rho \Rightarrow \vec{V}_{P/R_l} = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta \\ &= (a_o t) \vec{u}_\rho + \frac{1}{2} a_o t^2 \omega_o \vec{u}_\theta. \end{aligned}$$

$$\text{A.N. : } \vec{V}_{P/R} = t \cdot \vec{u}_\rho + \frac{\pi}{4} t^2 \vec{u}_\theta.$$

$$\vec{a}_{P/R_l} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \vec{u}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \vec{u}_\theta = (a_o - \frac{1}{2} a_o t^2 \omega_o^2) \vec{u}_\rho + (2a_o \omega_o t) \vec{u}_\theta$$

$$\text{A.N. : } \vec{a}_{P/R_l} = (1 - \frac{\pi^2}{8} t^2) \vec{u}_\rho + \pi t \vec{u}_\theta = (1 - 1,234t^2) \vec{u}_\rho + 3,14t \vec{u}_\theta.$$

$$\rho = \frac{1}{2} a_o t^2 \text{ et } \theta = \frac{\pi}{2} t \Rightarrow \rho = \frac{1}{2} \frac{a_o}{\omega_o^2} \theta^2 \text{ équation d'une spirale.}$$

$$\text{A.N. : } \rho = \frac{2}{\pi^2} \theta^2 \simeq 0,2 \theta^2.$$

| | | | | | |
|--|---|-------------------------------|-----------------------------|-------------------------------|-------------------|
| t | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 |
| ρ | 0 | 0,125 | 0,5 | $\frac{9}{8} = 1,125$ | 2 |
| θ | 0 | $\frac{\pi}{4} \simeq 0,78$ | $\frac{\pi}{2} \simeq 1,57$ | $\frac{3\pi}{4} \simeq 2,36$ | $\pi \simeq 3,14$ |
| $\vec{V}_{P/R_l} \cdot \vec{u}_\rho$ | 0 | $\frac{1}{2} = 0,5$ | 1 | 1,5 | 2 |
| $\vec{V}_{P/R_l} \cdot \vec{u}_\theta$ | 0 | $\frac{\pi}{16} \simeq 0,196$ | $\frac{\pi}{4} \simeq 0,78$ | $\frac{9\pi}{16} \simeq 1,77$ | $\pi \simeq 3,14$ |

(voir figure 2.18)

4) Loi de composition des vitesses : $\vec{V}_{P/R_l} = \vec{V}_{P/R_m} + \vec{V}_e$.

$$\vec{V}_e = \vec{\Omega}_{R_m/R_l} \wedge \vec{OP} = \rho \omega_o \vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho = \rho \omega_o \vec{u}_\theta = \frac{1}{2} a_o \omega_o t^2 \vec{u}_\theta \Rightarrow \text{A.N. : } \vec{V}_e = \frac{\pi}{4} t^2 \vec{u}_\theta.$$

$$\vec{V}_{P/R_l} = (a_o t) \vec{u}_\rho + \frac{1}{2} a_o \omega_o t^2 \vec{u}_\theta : \text{ même résultat que celui obtenu à la question 3.}$$

Loi de composition des accélérations : $\vec{a}_{P/R_l} = \vec{a}_{P/R_m} + \vec{a}_e + \vec{a}_c$.

$$\vec{a}_e = \vec{\Omega}_{R_m/R_l} \wedge (\vec{\Omega}_{R_m/R_l} \wedge \vec{OP}) = -\rho \omega_o^2 \vec{u}_\rho = -\frac{1}{2} a_o \omega_o^2 t^2 \vec{u}_\rho.$$

$$\vec{a}_c = 2 \vec{\Omega}_{R_m/R_l} \wedge \vec{V}_{P/R_m} = 2 a_o \omega_o t \vec{u}_\theta.$$

$$\vec{a}_{P/R_m} = a_o \vec{u}_\rho.$$

$$\vec{a}_{P/R_l} = (a_o - \frac{1}{2} a_o t^2 \omega_o^2) \vec{u}_\rho + (2 a_o \omega_o t) \vec{u}_\theta : \text{ même résultat que celui obtenu à la question 3.}$$

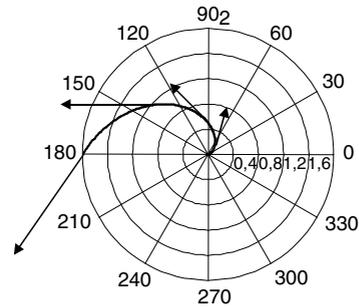


Figure 2.18

5 Le référentiel R' (aiguille) est en rotation uniforme par rapport au référentiel R (mur). Le vecteur vitesse angulaire est $\vec{\Omega} = \omega \vec{u}_z = -\frac{\pi}{30} \vec{u}_z$.

1) Étude dans $R'(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ base fixe dans ce référentiel. À $t = 0$, $OM = \rho(0) = 0$ et $\vec{v}_{M/R'}(0) = \vec{0}$

$$\vec{a}_{M/R'} = a_o \vec{u}_\rho \Rightarrow \vec{v}_{M/R'} = a_o t \vec{u}_\rho \Rightarrow \vec{OM} = \rho \vec{u}_\rho = \frac{1}{2} a_o t^2 \vec{u}_\rho \Rightarrow \rho(t) = \frac{1}{2} a_o t^2.$$

$$l = 20 \text{ cm parcourue en } t = 60 \text{ s} \Rightarrow a_o = \frac{2l}{t^2} = \frac{0,40}{3600} = 1,11 \cdot 10^{-4} \text{ m.s}^{-2} = 0,11 \text{ mm.s}^{-2}.$$

2) Étude dans $R(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$

$\dot{\theta} = \omega \Rightarrow \theta = \omega t + \frac{\pi}{2}$ ($\lambda t = 0$, l'aiguille est suivant l'axe Oy) et $\rho(t) = \frac{1}{2} a_o t^2$. L'équation de la trajectoire est :

$$\rho(\theta) = \frac{1}{2} \frac{a_o}{\omega^2} (\theta - \frac{\pi}{2})^2 \Rightarrow \rho(\theta) = 3,38 \cdot 10^{-4} (\theta - \frac{\pi}{2})^2 : \text{équation d'une spirale.}$$

Loi de composition des vitesses : $\vec{v}_{M/R} = \vec{v}_{M/R'} + \vec{v}_e$.

$$\vec{v}_e = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM} = \rho \omega \vec{u}_\theta = \frac{1}{2} a_o \omega t^2 \vec{u}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{M/R} = a_o t \vec{u}_\rho + \frac{1}{2} a_o \omega t^2 \vec{u}_\theta = 0,11 t \vec{u}_\rho - 0,576 \cdot 10^{-2} t^2 \vec{u}_\theta (\text{mm.s}^{-1})$$

Loi de composition des accélérations : $\vec{a}_{M/R} = \vec{a}_{M/R'} + \vec{a}_e + \vec{a}_c$.

$$\vec{a}_c = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/R'} = 2\omega a_o t \vec{u}_\theta.$$

$$\vec{a}_e = \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}) = -\omega^2 \rho \vec{u}_\rho = -\frac{1}{2} a_o \omega^2 t^2 \vec{u}_\rho.$$

$$\vec{a}_{M/R} = (a_o - \frac{1}{2} a_o \omega^2 t^2) \vec{u}_\rho + 2\omega a_o t \vec{u}_\theta.$$

6 La roue de rayon a roule sans glisser. On a donc $OI = a\varphi$ et $\vec{OC} = \vec{OI} + \vec{IC} = a\varphi \vec{u}_x + a \vec{u}_z$. La vitesse du point C est donc, dans le référentiel terrestre :

$$\vec{V}(C) = \vec{V}_o = a\dot{\varphi} \vec{u}_x = V_o \vec{u}_x \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{V_o}{a}.$$

1) $\vec{OA} = \vec{OC} + \vec{CA} = (a\varphi \vec{u}_x + a \vec{u}_z) + (-a \sin \varphi \vec{u}_x - a \cos \varphi \vec{u}_z).$

$$\vec{OA} = a [(\varphi - \sin \varphi) \vec{u}_x + (1 - \cos \varphi) \vec{u}_z].$$

2) $\vec{V} = a\dot{\varphi} [(1 - \cos \varphi) \vec{u}_x + \sin \varphi \vec{u}_z] = V_o [(1 - \cos \varphi) \vec{u}_x + \sin \varphi \vec{u}_z].$

$\|\vec{V}\| = \sqrt{2} V_o \sqrt{1 - \cos \varphi} \Rightarrow \|\vec{V}\| = 0$ pour $\varphi = 2n\pi$ (n entier). Chaque fois que le point A touche le sol (A confondu avec I), sa vitesse est nulle. Elle est maximale quand le point est à l'opposé de I par rapport à C .

3) $\vec{\Omega} = \dot{\varphi} \vec{u}_y$ et $\vec{IA} = \vec{IC} + \vec{CA} = a \vec{u}_z + (-a \sin \varphi \vec{u}_x - a \cos \varphi \vec{u}_z) = -a \sin \varphi \vec{u}_x + a(1 - \cos \varphi) \vec{u}_z.$

$\vec{\Omega} \wedge \vec{IA} = a\dot{\varphi} [(1 - \cos \varphi) \vec{u}_x + \sin \varphi \vec{u}_z] = \vec{V}$. À l'instant considéré, le point A a un mouvement circulaire autour du point I avec un vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}$.

4) $\vec{V} = V_o \vec{u}_x + V_o [-\cos \varphi \vec{u}_x + \sin \varphi \vec{u}_z] = \vec{V}_o + V_o \vec{u}$ avec $\vec{u} = [-\cos \varphi \vec{u}_x + \sin \varphi \vec{u}_z].$

Ce vecteur \vec{u} est un vecteur tangent à la roue (figure 2.19). En effet, on a : $\vec{CA} \cdot \vec{u} = 0$. Le vecteur vitesse peut donc se décomposer en deux vecteurs de même module (V_o), l'un parallèle à Ox (\vec{V}_o) et l'autre tangent à la roue ($V_o \vec{u}$).

$$\vec{a} = V_o \dot{\varphi} (\sin \varphi \vec{u}_x + \cos \varphi \vec{u}_z) = -(\frac{V_o}{a})^2 \vec{CA}. \text{ Ce vecteur est dirigé de } A \text{ vers } C \text{ et } \|\vec{a}\| = \frac{V_o^2}{a}.$$

5) Loi de composition des vitesses : $\vec{V} = \vec{V}' + \vec{V}_e$.

Dans le référentiel lié au vélo, repère de centre C , A décrit un cercle de rayon a d'un mouvement uniforme. On a donc :

$$\vec{V}' = \vec{\Omega} \wedge \vec{CA} = \dot{\varphi} \vec{u}_y \wedge (-a \sin \varphi \vec{u}_x - a \cos \varphi \vec{u}_z) = V_o [-\cos \varphi \vec{u}_x + \sin \varphi \vec{u}_z] = V_o \vec{u}.$$

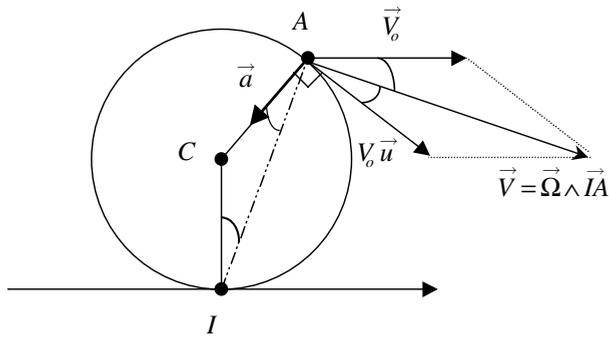


Figure 2.19

Le référentiel étant en translation rectiligne uniforme par rapport au sol, on a : $\vec{V}_e = \vec{V}_o$.

Conclusion : on retrouve $\vec{V} = V_o \vec{u}_x + V_o [-\cos \varphi \vec{u}_x + \sin \varphi \vec{u}_z]$.

Il n'y a pas d'accélération complémentaire (le référentiel n'est pas en rotation) ni d'accélération d'entraînement (la translation est rectiligne uniforme). On a donc $\vec{a} = \vec{a}'$. Pour un mouvement circulaire uniforme, le vecteur accélération est un vecteur normal centripète et a pour expression $\vec{a}' = \frac{v'^2}{a} \frac{\vec{CA}}{a} = -\left(\frac{V_o}{a}\right)^2 \vec{CA} = \vec{a}$.

CHAPITRE 3

LOIS DE NEWTON ET RÉFÉRENTIELS GALILÉENS

Pré-requis

- Connaître les notions de masse et centre d'inertie d'un système matériel.
- Connaître la notion de moment d'une force (se reporter à l'annexe 1 *Rappel des outils mathématiques*).
- Savoir projeter un vecteur sur une base donnée.
- Avoir assimilé le chapitre sur la cinématique du point.

Objectif

- ▶ Savoir résoudre un problème de dynamique.
- ▶ Savoir faire un bilan des forces s'appliquant sur un système défini au préalable.

1. PRINCIPE D'INERTIE : PREMIÈRE LOI DE NEWTON

La mécanique, comme de nombreuses branches de la physique, prend ses fondements dans des principes ou des postulats que l'on ne démontre pas. Vérifiés expérimentalement, ils restent valables tant qu'il n'existe pas d'expériences les mettant en défaut. Parmi ceux-ci nous trouvons le **principe d'inertie** qui est à la base de l'étude du mouvement des systèmes matériels. Ce principe, déjà entrevu par Galilée¹, a été repris par Newton² et constitue ce que l'on appelle la première loi de Newton.

1.1. Système matériel

a) Définitions

Par définition, nous appellerons **système matériel** un ensemble de points matériels. Nous distinguerons deux sortes de systèmes matériels :

1. Galileo Galilei (1564-1642) ; à lire : *Galilée, le messager des étoiles* par J. P. Maury, Coll. Découvertes Gallimard n°10, 1993.

2. Isaac Newton (1642-1727) ; à lire : *Newton et la mécanique céleste*, par J.P. Maury, Découvertes Gallimard n°91, 1990.

- **Système matériel indéformable** : tous les points matériels constituant le système restent fixes les uns par rapport aux autres. Ceci correspond à la définition d'un solide en mécanique.
- **Système matériel déformable** : tous les systèmes ne correspondant pas à la définition d'un solide. À titre d'exemple, deux solides, sans liens entre eux, forment un système déformable lorsque chacun des solides se déplace indépendamment de l'autre.

Lorsqu'il ne subit aucune action venant de l'extérieur, un système matériel est dit **isolé** (ou fermé). C'est le cas d'un solide seul dans l'espace, loin de toute autre masse.

Si des actions extérieures agissant sur un système se compensent, alors on dit que le système est **pseudo-isolé**, c'est-à-dire que tout se passe comme s'il était isolé.

Sur la Terre, il n'est pas possible de rencontrer des systèmes rigoureusement isolés. L'action de la Terre est une action extérieure pour tout système matériel. Par contre on peut rencontrer des systèmes pseudo-isolés chaque fois que l'action de la Terre est compensée. C'est le cas des mobiles autoporteurs ou encore d'un système se trouvant sur une table soufflante. Dans ces cas, le coussin d'air compense l'action de la Terre et élimine les principales forces de frottements qui sont les frottements solide-solide. On retrouve la même situation sur une surface horizontale glissante comme la surface gelée d'une patinoire.

Par la suite, par mesure de simplification, nous utiliserons le terme « isolé » pour tout système effectivement isolé ou seulement pseudo-isolé.

b) Masse et centre d'inertie

La masse d'un système caractérise la quantité de matière qu'il renferme. Elle est invariable dans le cadre de la mécanique Newtonienne. C'est une caractéristique du système. Dans le système international d'unités, l'unité de masse est le kilogramme (kg).

Le **centre d'inertie** d'un système matériel (ou centre de gravitation) correspond au point noté G , barycentre des positions des points matériels affectés de leur masse. Par définition du barycentre, le point G vérifie

$$\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$$

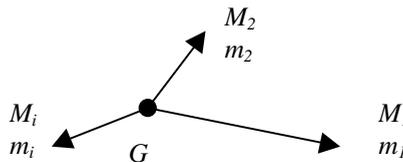


Figure 3.1 • Centre d'inertie d'un système matériel.

Pour un système discret constitué de n masses m_i situées aux points M_i on aura, par rapport à un point O origine :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum_i m_i} \implies m \overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}$$

avec m = masse totale du système.

Si le système forme un milieu continu à l'échelle macroscopique, le signe somme se transforme en signe intégrale :

$$m \cdot \overrightarrow{OG} = \iiint_M \overrightarrow{OM} dm$$

1.2. Vecteur quantité de mouvement

Comme nous le verrons un peu plus loin, la relation fondamentale de la dynamique introduit une nouvelle grandeur physique qui est la **quantité de mouvement** d'un système matériel de masse m dont le centre d'inertie se déplace à la vitesse \vec{v} .

Le vecteur quantité de mouvement d'un point matériel de masse m se déplaçant avec une vitesse \vec{v} est donné par :

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

Ce vecteur dépend du référentiel dans lequel est exprimée la vitesse. Il est colinéaire à la vitesse du point et s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{ms}^{-1}$ dans le système international d'unités.

Pour un système matériel constitué de n masses m_i situées aux points M_i et se déplaçant à la vitesse \vec{v}_i , le vecteur quantité de mouvement correspond à la somme des vecteurs quantité de mouvement de chacune des parties constituant le système. On a donc :

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{p}_i$$

On peut aussi écrire, la masse m totale étant invariante :

$$\vec{p} = \sum_i m_i \frac{d\overrightarrow{OM}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \overrightarrow{OM}_i \right) = \frac{d}{dt} (m \overrightarrow{OG}) = m \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = m \vec{V}_G$$

Le vecteur quantité de mouvement d'un système matériel est égal au vecteur quantité de mouvement d'un point matériel fictif confondu avec le centre d'inertie du système où serait concentrée la masse totale du système.

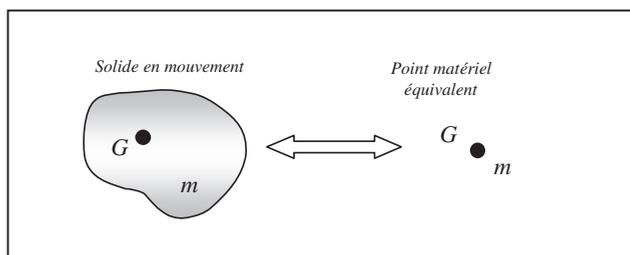


Figure 3.2 • Identification d'un solide à son centre d'inertie G auquel est affectée la masse totale m du solide.

1.3. Principe d'inertie : énoncé de la première loi de Newton

Le principe d'inertie repose sur l'hypothèse de l'existence d'un référentiel dit **galiléen**. Ce type de référentiel fait partie d'une classe de référentiels dont l'archétype est en première approximation le référentiel de Copernic. Tout autre référentiel appartenant à cette classe doit être en mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel de Copernic. Le principe d'inertie stipule que :

Dans un référentiel R galiléen, le centre d'inertie de tout système matériel mécaniquement isolé est soit au repos, soit en mouvement rectiligne uniforme.

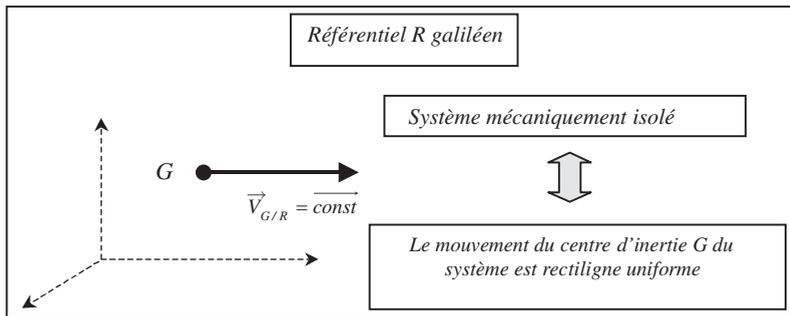


Figure 3.3 • Illustration du principe d'inertie.

Il importe de remarquer que d'après ce principe, si un système est mécaniquement isolé, c'est-à-dire si ce système ne subit aucune action ou des actions compensées, alors le mouvement du point particulier qu'est son centre d'inertie G est rectiligne uniforme. Il en résulte qu'un système peut donc être en mouvement même s'il ne subit aucune action. Il peut tout aussi bien être au repos. Le principe stipule cependant que, si le système mécaniquement isolé dans le référentiel galiléen est en mouvement, alors le mouvement de son centre d'inertie est nécessairement rectiligne uniforme. Nous insistons sur le fait que le principe d'inertie ne régit que le mouvement du centre d'inertie, à l'exclusion de tout autre point. Ainsi un hockeyeur qui frappe sur le palet peut imprimer à celui-ci un mouvement de rotation. Si le palet glisse sur la glace sans frottement, le centre d'inertie décrira une trajectoire rectiligne alors que tous les autres points du palet décriront des trajectoires plus compliquées appelées cycloïdes (figure 3.4).

Remarque. L'application du principe d'inertie conduit à la loi de conservation de la quantité de mouvement du système :

$$\vec{V}_{G/R} = \vec{cste} \implies \vec{p}_{G/R} = \vec{cste} \implies \frac{d\vec{p}_{G/R}}{dt} = \vec{0}$$

Le vecteur quantité de mouvement se conserve si le principe d'inertie est vérifié.

Attention, le principe d'inertie ne prédit que le mouvement de G !

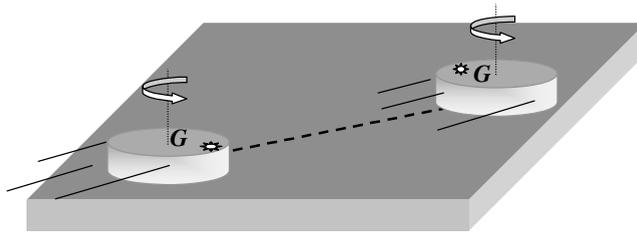


Figure 3.4 • Palet de hockey lancé sur la glace. Le palet est pseudo-isolé donc son centre d'inertie G décrit une trajectoire rectiligne et le mouvement de G est uniforme. Tous les autres points du palet qui ne se trouvent pas à la verticale de G peuvent avoir un mouvement non rectiligne.

1.4. Référentiels galiléens

Nous avons déjà vu que la notion de mouvement ou de repos dépendait du choix du référentiel. Le principe d'inertie ne s'applique donc que dans certains référentiels dit galiléens.

On appelle référentiel galiléen, un référentiel dans lequel le principe d'inertie s'applique.

Si on connaît un référentiel galiléen, on peut en connaître une infinité se déduisant du premier par une translation rectiligne uniforme. En effet, soit un référentiel R galiléen et un autre R' en mouvement par rapport à R ; cherchons à déterminer les conditions qu'il faut imposer à R' pour que, si le principe d'inertie est vérifié dans R , il le soit aussi dans R' . Si le principe d'inertie est vérifié dans R , alors

$$\vec{v}_{G/R} = \vec{cste}$$

D'après les lois de composition des vitesses et des accélérations, on peut écrire :

$$\vec{v}_{G/R} = \vec{v}_{G/R'} + \vec{v}_e \quad (3.1)$$

$$\vec{a}_{G/R} = \vec{a}_{G/R'} + \vec{a}_e + \vec{a}_c \quad (3.2)$$

Si dans R on a :

$$\vec{v}_{G/R} = \vec{cste} \implies \frac{d\vec{v}_{G/R}}{dt} = \vec{0} \\ \vec{a}_{G/R} = \vec{0}$$

nous aurons les mêmes conditions dans R' (voir (3.1)) si :

$$\vec{v}_e = \vec{cste} \implies \vec{a}_e = \vec{0}$$

De plus, si l'on reporte cette condition dans (3.2), nous voyons que R' doit être en translation rectiligne et uniforme.

Encart 3.1. Exemples de référentiels galiléens

L'expérience montre que le référentiel de Copernic est un excellent référentiel galiléen (malgré le mouvement du Soleil dans notre galaxie qui elle-même est en mouvement par rapport aux autres galaxies).

Le référentiel géocentrique est en translation non rectiligne autour du Soleil (translation pratiquement circulaire uniforme). Il n'est donc pas rigoureusement galiléen. Cependant la révolution de la Terre s'effectue en 365 jours et 6 heures, ce qui fait que le référentiel géocentrique peut en première approximation être considéré comme galiléen lorsque le phénomène étudié se produit pendant un temps très court devant la période de révolution de la Terre.

Pour les mêmes raisons, le référentiel terrestre n'est pas galiléen mais s'y apparente lorsque le temps de l'expérience est très inférieur à 24 heures où bien lorsque la précision des mesures ne permet pas de mettre en évidence ce mouvement.

2. PRINCIPE DE LA DYNAMIQUE : DEUXIÈME LOI DE NEWTON

2.1. La notion de force

Un point matériel G est rarement mécaniquement isolé mais subit des actions. Ces actions sont appelées **forces**. Lorsqu'on parle de force, il est important de voir que cela suppose l'existence d'un **acteur** (celui qui exerce la force) et un **receveur** (celui qui subit la force).

Une force s'exerce dans une certaine direction (ou ligne d'action de la force), dans un certain sens et avec une certaine intensité. Une force a donc toutes les caractéristiques d'un vecteur, qui servira à la représenter. De plus, une force s'applique en un point particulier.

Une force sera donc matérialisée par un vecteur associé à un point d'application. Elle est mesurée au moyen d'un dynamomètre et s'exprime en Newton (symbole N) dans le système international d'unités.

Les forces qu'un point matériel peut subir sont en fait en nombre limité. On distingue les forces suivantes :

- Forces d'interaction à distance comme les forces de gravitation, les forces électromagnétiques, les forces nucléaires de cohésion.
- Forces de contact comme les forces de frottement et de tension.

Des précisions sur ces forces sont données dans la partie 3 de ce chapitre.

2.2. Principe fondamental de la dynamique dans un référentiel galiléen

a) Énoncé de la deuxième loi de Newton

Considérons un système matériel S , de centre d'inertie G , de masse m , se déplaçant dans un référentiel galiléen. Si ce système n'est pas mécaniquement isolé, c'est-à-dire s'il subit une action non compensée, le principe d'inertie nous dit que sa quantité de mouvement ne peut pas être constante dans le temps. Le principe (ou relation) fondamental(e) de la dynamique nous permet de lier la cause (actions non compensées) à l'effet observé (quantité de mouvement variable) (figure 3.5). Il s'écrit :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d(m \vec{v}_{G/R})}{dt}$$

Comme la masse du système est supposée constante dans le temps, il en résulte que la relation fondamentale de la dynamique ou **RFD** peut s'écrire sous la forme :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \vec{a}_{G/R}$$

| | | |
|-------------------------------|---|---------------|
| <i>Causes</i> | $\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v}_{G/R})}{dt}$ | <i>Effets</i> |
| <i>Actions non compensées</i> | <i>Quantité de mouvement variable</i> | |

Figure 3.5 • Dans un référentiel galiléen, la somme des forces extérieures appliquées à un système est égale à la dérivée du vecteur quantité de mouvement du centre d'inertie de ce système.

b) Théorème du centre d'inertie

Dans un référentiel galiléen, le mouvement du centre d'inertie d'un système matériel est le même que celui d'un point matériel coïncidant avec ce centre, point qui aurait comme masse la masse totale du système et auquel on appliquerait la somme des forces agissant sur le système.

Par la suite, nous ne nous intéresserons qu'au mouvement du centre d'inertie d'un système (correspondant au mouvement d'ensemble du système). Toutes les forces extérieures appliquées au système seront donc représentées en ce point (voir figure 3.6).

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \vec{a}_{G/R}$$

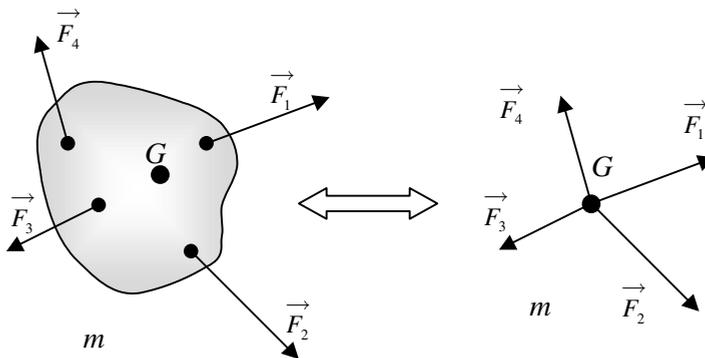


Figure 3.6 • Théorème du centre d'inertie. Le mouvement de translation du système se ramène à celui de son centre d'inertie G auquel on applique toutes les forces.

c) Théorème du moment cinétique

Définition du moment cinétique. Considérons un point matériel M en rotation autour d'un axe fixe Δ dans un référentiel Galiléen $R(O, x, y, z)$ (figure 3.7).

On appelle moment cinétique du point M par rapport à un point fixe O de l'axe Δ le moment de sa quantité de mouvement que l'on note :

$$\vec{L}_{M/R} = \vec{OM} \wedge m \vec{v}_{M/R}$$

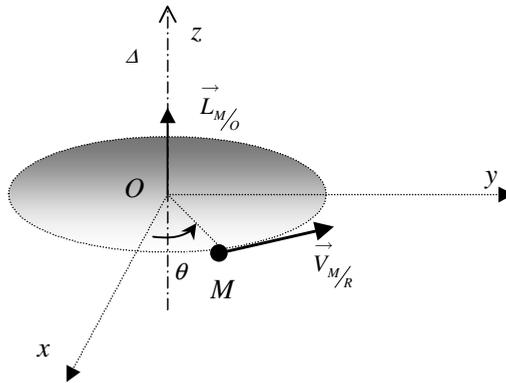


Figure 3.7 • Illustration du mouvement de rotation d'un point M dans un référentiel R .

Le moment cinétique est donc un vecteur perpendiculaire à \overrightarrow{OM} et à la vitesse $\vec{v}_{M/R}$ du point (annexe 1, 4.). C'est donc un vecteur perpendiculaire à la trajectoire du point M .

Théorème du moment cinétique. Le théorème du moment cinétique est un théorème qui définit la valeur de la dérivée du moment cinétique. Dans le référentiel R galiléen la dérivée du moment cinétique s'écrit :

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \frac{d(\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}_{M/R})}{dt} = \vec{v}_{M/R} \wedge m\vec{v}_{M/R} + \overrightarrow{OM} \wedge m \frac{d\vec{v}_{M/R}}{dt}$$

Il en résulte que la dérivée du moment cinétique est égale à la somme des moments des forces extérieures par rapport au point O (annexe 1, 4.4) :

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{a}_{M/R} = \overrightarrow{OM} \wedge \sum \vec{F}_{ext} = \sum \vec{M}_o(\vec{F}_{ext})$$

| | |
|---|----------------------------------|
| <i>Causes</i> | <i>Effets</i> |
| $\sum \vec{M}_o(\vec{F}_{ext}) = \frac{d\vec{L}_o}{dt}$ | |
| <i>Actions en rotation non compensées</i> | <i>Moment cinétique variable</i> |

Figure 3.8 • Théorème du moment cinétique.

Théorème

Dans un référentiel galiléen, la dérivée du moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point fixe O est égale à la somme des moments des forces extérieures appliquées à ce point.

Si le point est en équilibre (pas de rotation) alors la somme des moments des forces extérieures est nulle et le moment cinétique est nul.

Pour un point matériel il est possible d'exprimer la dérivée du moment cinétique à l'aide du moment d'inertie I_Δ , par rapport à l'axe de rotation choisi. Le moment cinétique du

point matériel est égal à :

$$\vec{L} = \overrightarrow{OM} \wedge m \vec{v} = mlv \vec{u}_z = ml^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_z = I_{\Delta} \dot{\theta} \vec{u}_z$$

Par définition le moment d'inertie du point matériel M distant de l de l'axe de rotation est égal au produit de la masse de ce point par le carré de la distance à l'axe de rotation :

$$I_{\Delta} = ml^2$$

Pour un point matériel en rotation autour d'un axe fixe, on peut appliquer indifféremment le principe fondamental de la dynamique ou le théorème du moment cinétique.

3. ACTIONS RÉCIPROQUES : TROISIÈME LOI DE NEWTON

3.1. Principe des actions réciproques

Le principe des actions réciproques, ou principe de l'action et de la réaction, a été énoncé par Newton (troisième loi de Newton).

Soit deux systèmes S_1 et S_2 . Si le système S_1 exerce une action sur le système S_2 , alors, simultanément, le système S_2 exerce une action (ou réaction) sur le système S_1 et réciproquement. Le principe des actions réciproques³ précise la relation entre ces deux forces.

Lorsque deux systèmes S_1 et S_2 sont en interaction, quel que soit le référentiel d'étude et quel que soit leur mouvement (ou l'absence de mouvement), l'action du système S_1 sur le système S_2 est exactement opposée à la réaction du système S_2 sur le système S_1 .

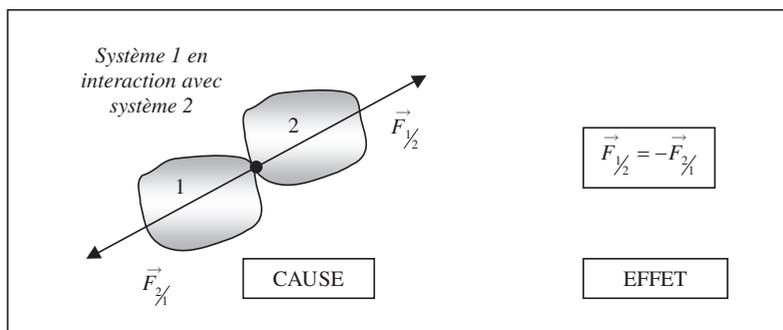


Figure 3.9 • Illustration du principe des actions réciproques.

Ce principe est universel. Il s'applique aussi bien aux interactions à distance qu'aux interactions de contact, à l'échelle de l'Univers comme à l'échelle des particules.

3. À lire : *Le principe des actions réciproques*, par A. Gibaud et M. Henry, B.U.P., n°787, 1996, 1465-1473.

4. LES FORCES

4.1. Forces d'interaction à distance

a) Force de gravitation newtonienne

On appelle **force de gravitation** ou **force d'interaction gravitationnelle**, la force exercée par une masse M sur une autre masse m . Cette force d'interaction suit une loi énoncée par Newton en 1650 et qui précise que deux masses m et M interagissent entre elles de façon d'autant plus forte que les masses sont grandes et que la distance qui les sépare est petite. La loi qu'il a formulée est dite « loi de la gravitation de Newton » ou « loi d'attraction universelle ». Elle s'énonce de la façon suivante :

Loi de gravitation de Newton

Les masses de deux corps s'attirent en raison de leur masses et de l'inverse du carré de leur distance selon une direction qui passe par leurs centres de masses.

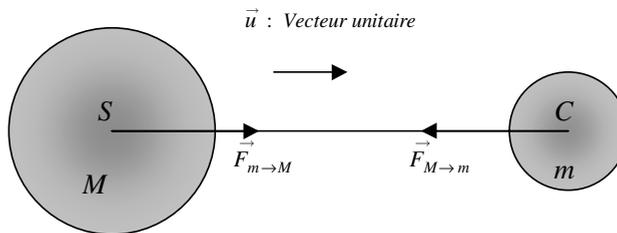


Figure 3.10 • Forces de gravitation d'un objet de masse M sur un objet de masse m .

La loi d'attraction universelle s'exprime analytiquement de la façon suivante :

$$\vec{F}_{M \rightarrow m} = -\mathcal{G} \frac{mM}{SC^2} \vec{u}$$

Il importe de remarquer que si M attire m selon la loi précédente, il en est de même pour m qui attire M selon la même loi. Il s'agit d'une interaction. On retrouve ici le principe des actions réciproques.

La force est portée par l'axe qui sépare les deux masses m et M . Elle est attractive, ce qui permet d'écrire que le vecteur force est dirigé à l'opposé du vecteur unitaire \vec{u} . Le sens du vecteur unitaire est défini par l'appellation de la force. Ainsi, si l'on considère l'action de M sur m , \vec{u} sera dirigé de M vers m . La force est proportionnelle à m et M et inversement proportionnelle au carré de la distance SC . Elle fait intervenir une constante d'interaction \mathcal{G} appelée constante d'interaction gravitationnelle. Cette constante est universelle et vaut $\mathcal{G} = 6.6710^{-11} \text{u.s.i.}$

$$\vec{F}_{M \rightarrow m} = -\mathcal{G} \frac{mM}{SC^3} \vec{SC}$$

Encart 3.2. Gravitation au voisinage de la Terre

Un cas important est celui où la masse M est la masse de la Terre et où m est la masse d'un corps au voisinage de la surface de la Terre. En première approximation, en négligeant la rotation de la Terre sur elle-même (voir chapitre 8), la force de Newton

représente le poids de la masse m au voisinage de la Terre. Cette force peut s'écrire :

$$\vec{F}_{M \rightarrow m} = m \vec{g}$$

où \vec{g} représente le champ de pesanteur ou l'accélération de la pesanteur au point C considéré, soit :

$$\vec{g}(C) = -\mathcal{G} \frac{M}{SC^2} \vec{u} = -\mathcal{G} \frac{M}{SC^3} \vec{SC}$$

Si le corps se trouve à la surface de la Terre, la distance SC correspond au rayon de la Terre. L'intensité du champ de pesanteur g_o vaut alors :

$$g_o = \mathcal{G} \frac{M}{R^2}$$

Si le corps se trouve à l'altitude z par rapport à la surface de la Terre, cette intensité devient :

$$g(z) = \mathcal{G} \frac{M}{(R+z)^2} = \mathcal{G} \frac{M}{R^2} \frac{R^2}{(R+z)^2} = g_o \left(1 + \frac{z}{R}\right)^{-2}$$

Pour $z \ll R = 6400$ km, cette expression donne au premier ordre par rapport à z/R :

$$g_o \left(1 - \frac{2z}{R}\right)$$

La variation relative de l'intensité du champ de pesanteur est alors de :

$$\frac{\Delta g}{g_o} = \frac{2z}{R}$$

Pour $z < 32$ km, la variation relative est inférieure à 1 %. On peut donc considérer le champ de pesanteur comme localement uniforme.

b) Interaction coulombienne

L'interaction coulombienne est l'analogie de l'interaction gravitationnelle pour des charges électriques ponctuelles. La force d'interaction d'une charge Q placée en S sur une charge q placée en C s'écrit :

$$\vec{F}_{Q \rightarrow q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{qQ}{SC^3} \vec{SC}$$

Il est possible de faire apparaître, comme dans le cas de la pesanteur, un champ créé par une charge ponctuelle Q en tout point M de l'espace. Ce champ, appelé champ électrique, s'écrit :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{Q}{SM^3} \vec{SM}$$

Toute charge q placée dans ce champ subira une action de la part de la charge Q qui peut s'écrire :

$$\vec{F}_{Q \rightarrow q} = q \vec{E}$$

c) Interaction électromagnétique

La force que subit une charge électrique placée dans des champs \vec{E} et \vec{B} est appelée Force de Lorentz et s'écrit :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

avec \vec{v} le vecteur vitesse de la charge dans le référentiel où \vec{E} et \vec{B} sont mesurés.

4.2. Forces de contact

a) Réaction du support

La force que subit un objet posé sur un support horizontal en provenance du support s'appelle **réaction du support**. La réaction du support sur un objet est répartie sur toute la surface de contact support-objet. On peut représenter cette action par une force, résultante de toutes les actions exercées sur toute cette surface.

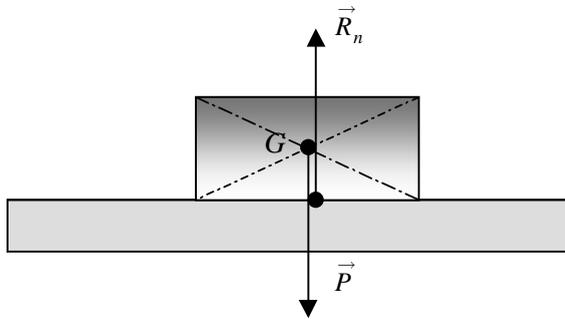


Figure 3.11 • Réaction d'un support.

L'objet subit, de la part de l'extérieur, deux forces : son poids \vec{P} , appliqué au centre d'inertie G , et la réaction du support \vec{R}_n (figure 3.11). L'objet étant en équilibre, on a :

$$\vec{P} + \vec{R}_n = \vec{0} \implies \vec{P} = -\vec{R}_n$$

Cet équilibre de l'objet sur le support impose que le point d'application de la réaction soit à l'intersection de la surface de contact et de la ligne d'action du poids de l'objet.

Remarque. D'après le principe des actions réciproques, l'action de l'objet sur le support horizontal est exactement opposé à la réaction du support sur l'objet et correspond donc au poids de l'objet.

b) Forces de frottement

Les forces de frottement sont des forces qui apparaissent soit lors du mouvement d'un objet soit si cet objet est soumis à une force qui tend à vouloir le déplacer. Dans tous les cas, la force de frottement s'oppose au déplacement que l'on cherche à engendrer. Il importe de distinguer deux types de frottement : le frottement visqueux (contact solide-fluide) et le frottement solide (contact solide-solide).

Le frottement visqueux. Lorsqu'un solide se déplace dans un fluide (gaz comme l'air ou liquide comme l'eau), il subit, de la part du fluide, des forces de frottement. La résultante de ces actions est un vecteur force proportionnel au vecteur vitesse de déplacement de l'objet.

Avec k constante positive, on a :

$$\vec{F} = -k\vec{v}$$

Cette force n'existe que s'il y a mouvement.

Encart 3.3. Frottement fluide pour des vitesses importantes

Dans le cas où la vitesse de l'objet devient très importante, la force de frottement visqueux n'est plus proportionnelle à la vitesse mais au carré de la vitesse, à la surface S de l'objet dans la direction perpendiculaire à la direction du déplacement et à la masse volumique ρ du fluide. Le coefficient de proportionnalité dépend du profil de la surface en contact avec le fluide et est appelé coefficient de pénétration C_x . La force de frottement s'écrit alors :

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}C_x S \rho v \vec{v}$$

Le frottement solide Le frottement solide se produit quand deux solides sont en contact. Il fut étudié par Léonard de Vinci⁴ qui, au travers d'expériences simples, en découvrit les lois. Amontons (1699) et Coulomb⁵ les énoncèrent de façon plus précise. Le frottement solide apparaît dès que l'on cherche à faire glisser un corps posé sur un support. Ce corps, soumis à des forces extérieures qui auraient pour effet de le déplacer, peut rester immobile si les frottements le permettent. La réaction du sol et donc la force de frottement s'adapte pour maintenir l'équilibre. Dans le cas contraire, ce corps se déplacera tout en subissant une force de frottement \vec{F} constante opposée au sens du mouvement. La réaction du support sur le corps peut dans les deux cas se décomposer en une réaction \vec{R}_n , normale au support et qui empêche le corps de s'enfoncer, et une force \vec{F} , parallèle au support et qui tend à s'opposer au mouvement du corps.

Lorsque le solide se déplace sous l'action d'une force extérieure \vec{F}_e (figure 3.12), l'intensité \vec{F} de la force de frottement est proportionnelle à celle de la réaction \vec{R}_n normale au support. Le coefficient de proportionnalité s'appelle le coefficient de friction μ ou coefficient de frottement. Ce coefficient dépend de la nature des surfaces en contact.

$$F = \mu R_n$$

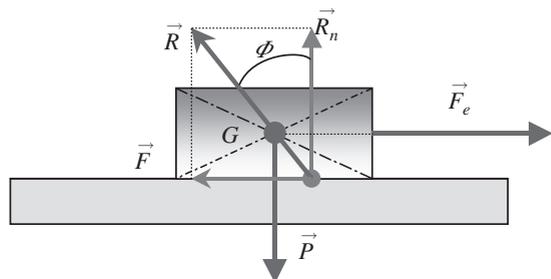


Figure 3.12 • Solide en mouvement sur un support sous l'action d'une force extérieure.

4. Léonard de Vinci (1452-1519).

5. Charles de Coulomb (1736-1806).

Le rapport F/R_n définit la tangente d'un angle Φ . Cet angle est appelé angle de frottement. On a donc la relation :

$$\frac{F}{R_n} = \tan \Phi = \mu$$

Si le frottement se produit sur un plan horizontal, \vec{R}_n compense le poids et la force de frottement est donc proportionnelle au poids du solide. Il est possible de montrer que l'étendue de la surface de contact entre les deux solides ne joue aucun rôle dans la valeur de la force de frottement. La valeur du coefficient μ ne dépend que de la nature des deux surfaces en contact. Pour le vérifier, il suffit de prendre un objet parallélépipédique et de le poser sur différentes faces. On constate que la force de frottement solide reste identique.

Le tableau ci-après définit la valeur du coefficient de friction pour quelques surfaces.

| Matériaux en contact | μ |
|----------------------|-------|
| Acier-acier | 0,2 |
| Chêne-sapin | 0,67 |
| Caoutchouc-bitume | 0,6 |

Il convient de noter que la force de frottement solide dépend de l'action subie par le solide. Si aucune action extérieure ne tend à déplacer un solide se trouvant sur un plan horizontal, celui-ci est au repos et la force de frottement n'existe pas. Elle ne prend naissance que si le solide subit une action. Son intensité varie alors linéairement en fonction de cette action jusqu'à devenir constante par l'intermédiaire du coefficient μ dès que le solide se met en mouvement. La force de frottement est alors maximale et ne peut plus empêcher le mouvement.

La condition d'équilibre (figure 3.13) impose $R_n = P$ et $F_e = F$. On peut donc écrire :

$$\frac{F}{R_n} = \tan \varphi = \frac{F_e}{P}$$

Remarque. Le solide en équilibre ne bascule pas non plus. Ceci impose que la somme des moments, par rapport à un point fixe comme G , de toutes les forces soit nulle. Si la ligne d'action de \vec{F}_e passe par G comme \vec{P} , alors cette condition impose que la ligne d'action de la réaction \vec{R} passe aussi par G . On détermine ainsi la position du point d'application de \vec{R} qui doit se situer sur la surface de contact du solide avec le support.

Lorsque l'intensité de la force F_e varie de la valeur 0 jusqu'à une valeur permettant le mouvement du corps, la force de frottement F passe d'une valeur nulle jusqu'à sa valeur maximale $F = \mu R_n$ (figure 3.14). L'angle φ que fait la réaction avec la verticale varie de 0 à la valeur Φ . L'angle Φ est appelé **angle de frottement**.

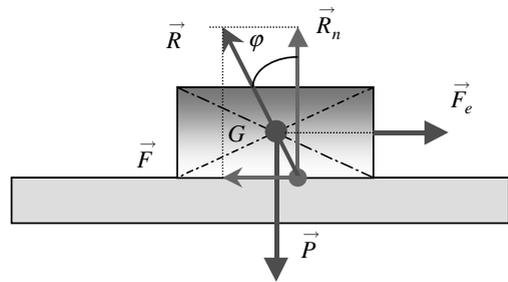


Figure 3.13 • Solide en équilibre sur un support sous l'action d'une force extérieure et d'une force de frottement.

| | | |
|---------------------|---------------------|--|
| Solide en équilibre | $F = F_e < \mu R_n$ | $\frac{F}{R_n} = \tan \varphi < \tan \Phi = \mu$ |
| Solide en mouvement | $F = \mu R_n < F_e$ | $\frac{F}{R_n} = \tan \Phi = \mu$ |

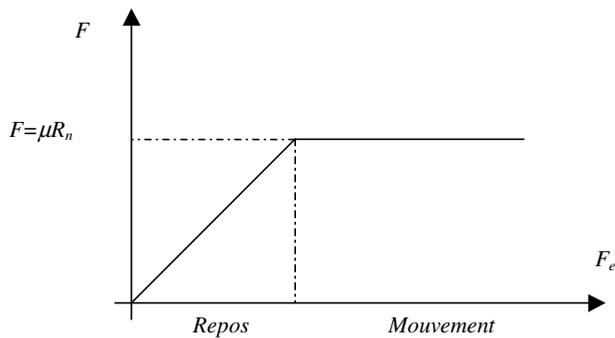


Figure 3.14 • Évolution de la force de frottement en fonction de la force F_e agissant sur le système.

L'étude des propriétés des forces de friction constitue le domaine de la tribologie⁶. L'interprétation microscopique des phénomènes de friction est encore mal connue et fait l'objet d'études sophistiquées dans de nombreux centres de recherche. Les domaines d'action représentent des enjeux économiques énormes, en particulier dans la fabrication des pneumatiques et des moteurs. D'un point de vue plus pragmatique, le lecteur prendra conscience qu'il ne peut tenir son stylo ou qu'il ne peut marcher que parce que le frottement solide existe !

c) Forces de tension

Lorsqu'un opérateur tire sur une extrémité d'un fil (l'autre extrémité étant fixe), celui-ci se tend. Simultanément, le fil exerce une résistance, c'est-à-dire une action sur l'opérateur (qui la ressent bien). Cette action du fil sur l'opérateur est appelée tension du fil. Elle n'existe que si le fil est tendu sous l'effet d'une action extérieure.

Pour un fil de masse négligeable supportant un objet de masse m au repos, la tension du fil (action du fil sur la masse) s'oppose au poids de la masse m (action de la masse m sur le fil) d'après le principe des actions réciproques. Elle prend la même valeur en tout point du fil.

Lorsque le fil est élastique (figure 3.15), la tension du fil peut s'exprimer en fonction de l'état d'étirement du fil et augmente linéairement avec son allongement (à la condition de ne pas exercer des forces trop importantes). Le coefficient d'allongement s'appelle la raideur k du fil. Un exemple typique de fil élastique est le ressort. La force de tension d'un ressort de longueur l_0 non tendu et étiré à la longueur l s'écrit :

$$\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}$$

avec \vec{u} vecteur unitaire dans la direction de la déformation.

Le signe $-$ dans cette relation signifie que la force de tension du ressort est une force de rappel et qu'elle s'oppose à la déformation.

6. À lire : *La tribologie de l'Antiquité à nos jours*, par J. Frêne, BUP, 1986, n°689, 1532-1560.

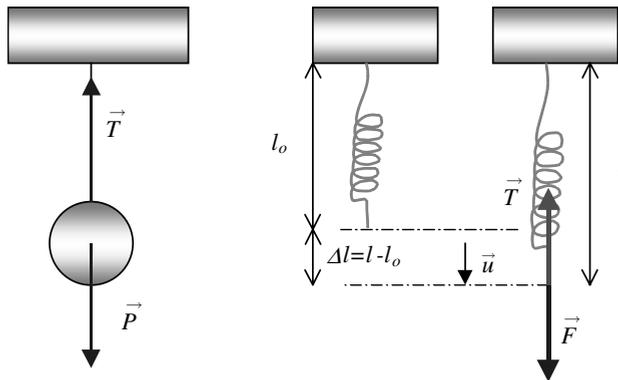


Figure 3.15 • Tension d'un fil et d'un ressort.

5. APPLICATIONS

5.1. Mouvements uniformes

Le système étudié est un point matériel M de masse m (figure 3.16). Le référentiel dans lequel on effectue l'étude du mouvement est un référentiel galiléen.

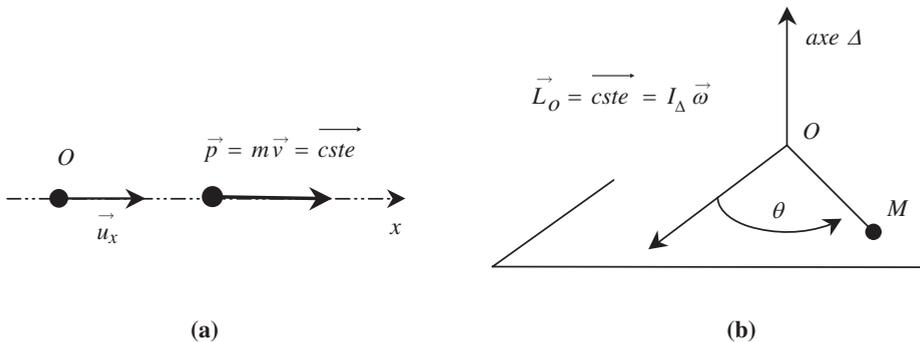


Figure 3.16 • Mouvement rectiligne uniforme (a) et mouvement circulaire uniforme (b).

a) Mouvement rectiligne uniforme

Étude dynamique (figure 3.16(a)). Bilan des forces : le système n'est soumis à aucune force ou à un ensemble de forces dont la résultante est nulle. Le principe fondamental de la dynamique appliqué au point matériel M conduit à :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \vec{a}_{M/R} = \vec{0}$$

Étude cinématique. Par définition un mouvement est rectiligne uniforme si

$$\vec{v} = \vec{cste}$$

Les conditions initiales sont les suivantes : à $t = 0$, $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ et $OM = x_0 \implies \vec{v} = v_0 \vec{u}_x$.

Il s'ensuit que l'équation horaire du mouvement est :

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \Rightarrow x = v_0 t + x_0$$

b) Mouvement circulaire uniforme

Étude dynamique (figure 3.16(b)). Le bilan des forces est tel qu'il n'y a aucune force appliquée à M ou un ensemble de forces dont le moment résultant par rapport à un point fixe O est nul. Le théorème du moment cinétique s'écrit :

$$\sum M_{F_{ext}/\Delta} = 0 \Rightarrow I_{\Delta} \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 0 \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = cste = \omega_0$$

Étude cinématique. Par définition un mouvement est circulaire uniforme si

$$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_z = cste = \omega_0 \vec{u}_z$$

Il s'ensuit que l'équation horaire du mouvement est

$$d\theta = \omega_0 dt \Rightarrow \theta = \omega_0 t + \theta_0$$

5.2. Mouvement uniformément varié

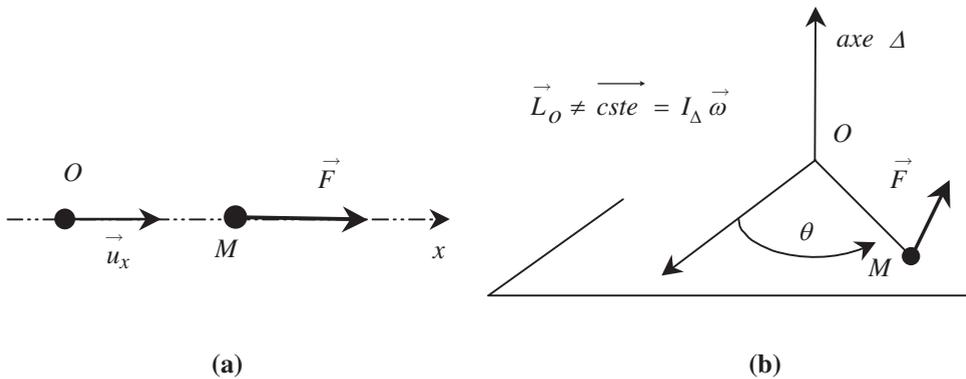


Figure 3.17 • Mouvements uniformément variés. Mouvement rectiligne (a) et mouvement de rotation (b).

a) Mouvement rectiligne uniformément varié

Étude dynamique (figure 3.17(a)). Le bilan des forces se résume à un ensemble de forces dont la résultante \vec{F} est constante. Le principe fondamental de la dynamique conduit à

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \vec{a}_{M/R} = \vec{F}$$

Étude cinématique. En projection sur la direction du mouvement nous avons

$$a = \frac{F}{m} = cste$$

Les conditions initiales étant à $t = 0$, $\vec{v}_o = v_o \vec{u}_x$ et $OM = x_o$, nous avons

$$\ddot{x} = \frac{F}{m} \Rightarrow \dot{x} = \frac{F}{m}t + v_o$$

ce qui conduit à l'équation horaire :

$$x = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 + v_o t + x_o$$

b) Mouvement circulaire uniformément varié

Étude dynamique (figure 3.17(b)). Le bilan des forces se résume à un ensemble de forces dont le moment résultant par rapport à un point fixe O est constant. L'application du théorème du moment cinétique conduit à :

$$I_{\Delta} \ddot{\theta} = \sum M_{F_{ext}/\Delta} = cste = Fd \quad (\text{avec } d = OM \text{ et } \vec{F} \perp \vec{OM})$$

Étude cinématique. Nous avons donc

$$\ddot{\theta} = \frac{Fd}{md^2} = \frac{F}{md} = cste$$

En considérant qu'à $t = 0$, $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_o$ et $\theta(0) = \theta_o$, il vient

$$\dot{\theta} = \frac{F}{md}t + \dot{\theta}_o$$

ce qui conduit à l'équation horaire suivante :

$$\theta = \frac{1}{2} \frac{F}{md} t^2 + \dot{\theta}_o t + \theta_o$$

5.3. Mouvements quelconques

a) Chute freinée d'un corps

Nous faisons l'hypothèse que le corps de masse m est freiné au cours de sa chute par une force de frottement de type visqueux. Nous étudions le problème dans un référentiel terrestre supposé galiléen. La chute se faisant sur un seul axe, on se limite à un vecteur de base (figure 3.18). On supposera que la masse m chute sans vitesse initiale d'une position $x = 0$ à $t = 0$.

Système étudié : le système masse m .

Référentiel d'étude : $R(O, x, t)$ supposé galiléen (vecteur unitaire \vec{u}_x).

Les forces extérieures appliquées sont :

- le poids \vec{P} ;
- la force de frottement $\vec{F} = -k \vec{v}_{G/R}$.

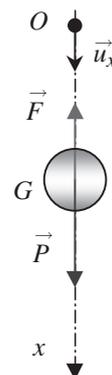


Figure 3.18 • Chute freinée d'un corps.

L'application de la relation fondamentale de la dynamique conduit à :

$$m \frac{d \vec{v}_{G/R}}{dt} = \vec{P} + \vec{F} = \vec{P} - k \vec{v}_{G/R}$$

L'équation différentielle du mouvement de la masse m s'écrit donc :

$$\frac{d \vec{v}}{dt} + \frac{k}{m} \vec{v} = \vec{g}$$

ce qui, en projection sur l'axe x du mouvement, conduit à :

$$\frac{dv_x}{dt} + \frac{k}{m} v_x = g$$

Cette équation est une équation différentielle du premier degré à coefficients et second membre constants. La méthode de résolution consiste à calculer une solution de l'équation sans second membre et y ajouter une solution particulière indépendante du temps. L'équation sans second membre s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} + \frac{k}{m} v_x &= 0 \Rightarrow \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{k}{m} dt \\ \ln v_x &= -\frac{k}{m} t + cste = -\frac{k}{m} t + \ln C \end{aligned}$$

Il en résulte que la vitesse du mobile varie exponentiellement selon une loi du type :

$$v_x = C e^{-\frac{k}{m} t}$$

On recherche une solution particulière de l'équation différentielle ne dépendant pas du temps. On a donc :

$$\frac{dv_x}{dt} = 0 \Rightarrow v_x = \frac{mg}{k}$$

La solution générale de cette équation s'écrit donc :

$$v_x = \frac{mg}{k} + C e^{-\frac{k}{m} t}$$

Il ne reste plus qu'à déterminer la constante C en revenant aux conditions aux limites de ce mouvement qui impose que $v = 0$ à $t = 0$. Il vient donc :

$$C + \frac{mg}{k} = 0 \Rightarrow C = -\frac{mg}{k}$$

ce qui conduit à :

$$v_x = \frac{mg}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m} t})$$

On peut ainsi constater que la vitesse augmente progressivement pour atteindre une vitesse limite lorsque le temps tend vers l'infini (figure 3.19). La vitesse limite de chute, qui logiquement n'est jamais atteinte, est donnée par :

$$\begin{aligned} v_{\text{lim}} &= \frac{mg}{k} \\ x &= \frac{mg}{k} (t + \frac{mg}{k} (e^{-\frac{k}{m} t} - 1)) \end{aligned}$$

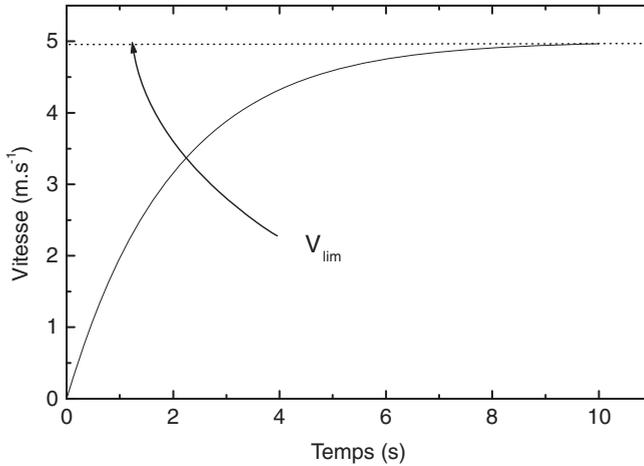


Figure 3.19 • Évolution avec le temps de la vitesse dans le cas d'une chute avec frottements visqueux.

b) Pendule simple

Considérons une masse m mobile autour d'un axe fixe. La distance de la masse m à l'axe de rotation est appelée l (figure 3.20). On considère le mouvement du système masse m par rapport à un référentiel galiléen $R(O, x, y, z, t)$. La base choisie est la base mobile $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$. Les forces extérieures appliquées sont le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la tension \vec{T} du fil. La relation fondamentale de la dynamique conduit à :

$$\begin{aligned}\vec{P} + \vec{T} &= m\vec{a}_{G/R} \\ m(-l\dot{\theta}^2\vec{u}_r + l\ddot{\theta}\vec{u}_\theta) &= \vec{P} + \vec{T}\end{aligned}$$

En projection sur les vecteurs de base, le poids et la tension s'écrivent :

$$\vec{P} \begin{pmatrix} mg \cos \theta \\ -mg \sin \theta \end{pmatrix} \quad \vec{T} \begin{pmatrix} -T \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui conduit à :

$$\begin{cases} mg \cos \theta - T = -ml\dot{\theta}^2 \\ -mg \sin \theta = ml\ddot{\theta} \end{cases}$$

De la seconde équation, il est possible d'écrire l'équation différentielle du mouvement de la masse m :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

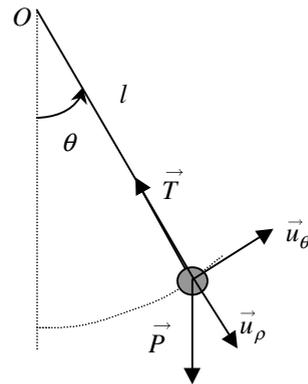


Figure 3.20 • Représentation d'un pendule simple.

Cette équation est une équation différentielle *non linéaire* à cause de la présence du terme en sinus. La solution n'est donc pas facile à obtenir sauf si dans certaines conditions l'équation peut être assimilée à une équation linéaire. Cette condition est satisfaite dans le cas où l'angle θ est petit, c'est-à-dire lorsque le sinus est assimilable à l'angle, soit $\sin \theta \simeq \theta$. Dans ce cas, l'équation différentielle devient :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique. La solution de cette équation s'écrit :

$$\theta = \theta_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

à condition de poser $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$.

L'équation différentielle précédente aurait pu être obtenue directement par le théorème des moments calculés en O , soit :

$$ml^2 \ddot{\theta} \vec{u}_z = \vec{M}_{\vec{P}/O} + \vec{M}_{\vec{T}/O} = \vec{M}_{\vec{P}/O} ; \quad ml^2 \ddot{\theta} = -mgl \sin \theta$$

À RETENIR

➤ Première loi de Newton : principe d'inertie

Dans un référentiel R galiléen, le centre d'inertie de tout système matériel mécaniquement isolé est soit au repos, soit en mouvement rectiligne uniforme.

➤ Définition d'un référentiel galiléen

Tout référentiel pour lequel le principe d'inertie est applicable est un référentiel galiléen.

➤ Deuxième loi de Newton : principe fondamental de la dynamique

Dans un référentiel galiléen, la somme des forces extérieures appliquées à un système est égale à la dérivée du vecteur quantité de mouvement du centre d'inertie de ce système.

➤ Troisième loi de Newton : principe des actions réciproques

Lorsque deux systèmes S_1 et S_2 sont en interaction, quel que soit le référentiel d'étude et quel que soit leur mouvement (ou l'absence de mouvement), l'action du système S_1 sur le système S_2 est exactement opposée à la réaction du système S_2 sur le système S_1 .

► **Moment cinétique et théorème du moment cinétique**

$$\vec{L}_{M/R} = \vec{OM} \wedge m \vec{v}_{M/R} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{OM} \wedge \sum \vec{F}_{ext} = \sum \vec{M}_o(\vec{F}_{ext})$$

Dans un référentiel galiléen, la dérivée du moment cinétique par rapport à un point fixe O d'un point matériel est égale à la somme des moments des forces extérieures appliquées à ce point.

► **Les forces**

Forces à distance (poids d'un corps, force de gravitation etc.) et forces de contact (tension d'un fil ou d'un ressort, réaction d'un support avec ou sans frottement solide, frottement solide).

EXERCICES D'APPLICATION AVEC SOLUTION DÉTAILLÉE

Dynamique

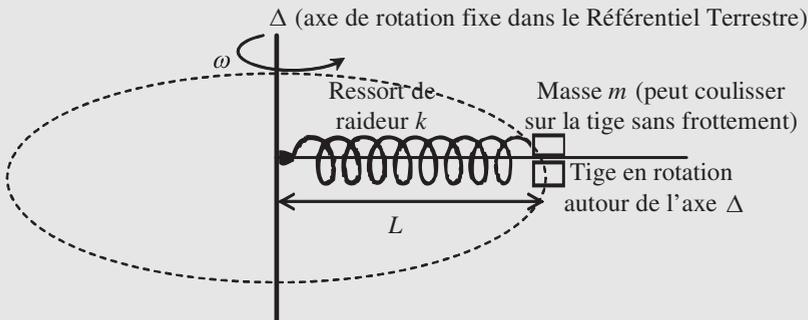


Figure 3.21

Un ressort est enfilé sur une tige horizontale fixée à un axe de rotation (Δ) vertical. Ce ressort est également fixé à (Δ) à l'une de ses extrémités, tandis qu'à l'autre extrémité est fixée une masse m de 50 g pouvant coulisser sans frottement sur la tige.

La tige entraîne la masse m dans son mouvement de *rotation uniforme* de vitesse angulaire constante ω . La vitesse de rotation est de 2 tours par seconde.

Dans ces conditions (figure 2), le ressort est allongé et a une longueur L .

Sa longueur à vide (ou au repos) est de $L_0 = 48 \text{ cm}$.

De plus, dans une étude statique de ce ressort, on accroche une masse $M = 200 \text{ g}$ à l'une de ses extrémités. On constate qu'il s'allonge verticalement de $d = 1 \text{ cm}$ sous l'action du poids de cette masse M .

On prendra, pour les applications numériques, $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ et $\pi^2 = 9,8$.

1) *Question préliminaire : étude statique* : faire un schéma représentant le ressort à vide (ou au repos) dans la *position verticale* et à côté le même ressort mais étiré sous l'action du poids de la masse M . À partir de la condition d'équilibre, exprimer puis calculer la raideur k du ressort.

2) On se place dans le cas de la **figure**. Après avoir précisé exactement le mouvement de la masse m , indiquer quels sont la direction et le sens du vecteur accélération \vec{a} . Donner l'expression de l'accélération a en fonction de la longueur L du ressort et de la vitesse angulaire ω .

3) Faire l'étude dynamique complète du système masse m et en déduire l'expression de la longueur L et de l'allongement ΔL du ressort. Calculer cet allongement.

4) Calculer la tension T du ressort.

5) Commenter le résultat du 3) quand la vitesse angulaire ω varie. Que se passerait-il si l'ensemble tournait à la vitesse angulaire $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$?

Solution

1) équilibre : $Mg = kd \Rightarrow k = \frac{Mg}{d} = \frac{0,2 \cdot 9,8}{0,01} = 196 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$

2) Mouvement circulaire uniforme. L'accélération est donc normale et centripète. Son expression est : $a = \omega^2 L$

3) Système : m ;

Référentiel terrestre galiléen ;

Bilan des forces extérieures : le poids $m\vec{g}$ vertical vers le bas, la réaction de la tige (perpendiculaire à la tige car pas de frottement) et la tension du ressort \vec{T} .

Principe fondamental de la dynamique : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$. La projection sur la tige mobile donne :

$$T = k(L - L_0) = m\omega^2 L \Rightarrow L = \frac{kL_0}{k - m\omega^2} = \frac{L_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \text{ et } L - L_0 = \frac{m\omega^2 L_0}{k - m\omega^2} = \frac{L_0}{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

$$\frac{\omega_0^2}{4\pi^2} = \frac{1}{4,98} \frac{196}{0,05} = 100 \text{ et } \frac{\omega^2}{4\pi^2} = 2^2 = 4 \quad L - L_0 = \frac{L_0}{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1} = \frac{48}{24} = 2 \text{ cm}$$

et $L = 50 \text{ cm}$

4) $T = k(L - L_0) = 196 \cdot 0,02 = 3,92 \text{ N}$

5) $\omega < \omega_0 \Rightarrow L - L_0 = \frac{L_0}{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1}$ et $L = \frac{kL_0}{k - m\omega^2} = \frac{L_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$. Alors $\omega \geq \omega_0 \Rightarrow impossible$.

Le ressort casse avant puisque pour $\omega = \omega_0 \Rightarrow$ l'allongement tend vers l'infini. Ensuite il devient négatif : impossible. On sort du domaine d'élasticité du ressort.

Toboggan aquatique (Les parties I. et II. sont indépendantes)

On considère un toboggan aquatique ayant la forme d'une portion de cercle de centre O et de rayon r . Le revêtement de ce toboggan rend *les frottements négligeables*.

Ce toboggan possède une longueur M_oM_1 telle que sa réaction sur un point matériel M de masse m (un baigneur) lâché en M_o sans vitesse initiale soit nulle en M_1 : $\vec{R}(M \equiv M_1) = \vec{0}$

Le référentiel d'étude est le référentiel Terrestre considéré galiléen.

I. Première phase du mouvement

La position du point M est repérée par l'angle $\theta = (\vec{Ox}, \vec{OM})$ compris entre $\theta_o = \frac{\pi}{2}$ et $\theta_1 = (\vec{Ox}, \vec{OM}_1)$. On utilise la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

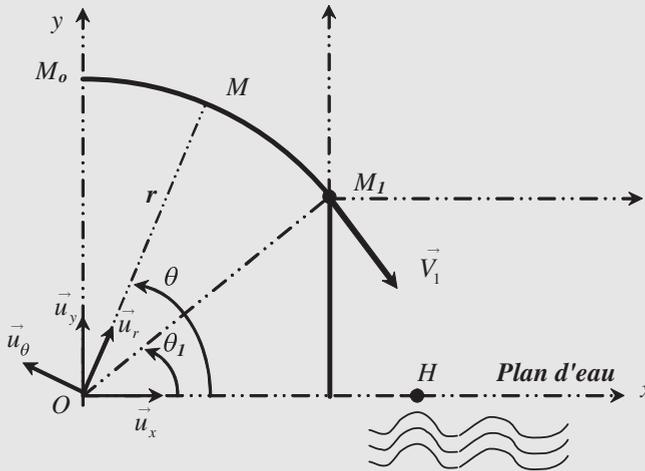


Figure 3.22

a) Faire le bilan des forces extérieures appliquées sur la masse m dans la position intermédiaire repérée par θ .

b) Appliquer le principe fondamental de la dynamique et faire la projection sur \vec{u}_r et \vec{u}_θ . On obtient ainsi deux relations permettant de déterminer le module $V = r\dot{\theta}$ de la vitesse et le module R de la réaction du toboggan en fonction de θ .

c) Sachant qu'une équation différentielle du type : $\ddot{\theta} = A \cos \theta$ (avec A une constante) s'intègre, entre $t = 0$ et t , en multipliant les deux membres par $2\dot{\theta}$, montrer que :

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{r}(1 - \sin \theta)}. \text{ En déduire les expressions (fonctions de } \theta) \text{ de } V(\theta) \text{ et } R(\theta).$$

d) Montrer qu'au point M_1 (où la réaction $\vec{R}(\theta_1) = \vec{0}$) on a $\sin \theta_1 = \frac{2}{3}$ et $V_1 = \sqrt{\frac{2}{3}gr}$

II. Deuxième phase du mouvement

Le point matériel M effectue à présent un mouvement de chute libre (pas de frottement), qui se termine par une réception en H sur un plan d'eau d'équation : $y = 0$.

- Donner les composantes sur la base (\vec{u}_x, \vec{u}_y) du vecteur vitesse \vec{V}_1 donné au **1. d.)**
- En tradant l'origine O des coordonnées en M_1 et en choisissant l'origine des temps $t = 0$ lorsque M est en M_1 , déterminer, dans ce nouveau repère) les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ durant cette phase et en déduire l'équation $y = f(x)$ de la trajectoire en fonction de r .
- Indiquer comment déterminer finalement la distance OH en fonction de r .

Solution

I. Première phase du mouvement

a) Forces appliquées :

$$\vec{P} = m \vec{g} = -mg \vec{u}_y$$

La réaction normale au toboggan (pas de frottements) $\vec{R} = R \vec{u}_r$ (voir schéma)

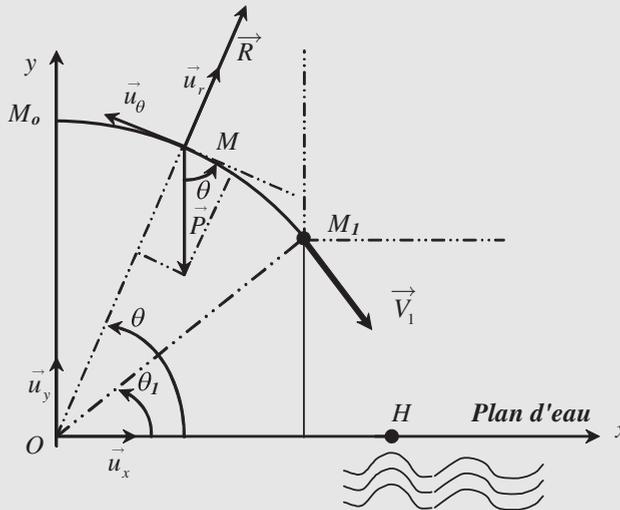


Figure 3.23

b) Principe fondamental :

$$\vec{P} + \vec{R} = m \vec{a} = m(-r\dot{\theta}^2 \vec{u}_r + r\ddot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta) \quad (R - mg \sin \theta) \vec{u}_r - mg \cos \theta \cdot \vec{u}_\theta = m \vec{a}$$

- $R - mg \sin \theta = -mr\dot{\theta}^2 = -\frac{m}{r}V^2$
- $-mg \cos \theta = mr\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{r} \cos \theta$

$$\begin{aligned} \text{c) } \ddot{\theta} &= -\frac{g}{r} \cos \theta \Rightarrow 2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -\frac{2g}{r} \dot{\theta} \cos \theta \Rightarrow \frac{d(\dot{\theta}^2)}{dt} = -2\frac{g}{r} \frac{d(\sin \theta)}{dt} \\ \int_{\theta_0=\frac{\pi}{2}}^{\theta} \frac{d(\dot{\theta}^2)}{dt} &= -2\frac{g}{r} \int_{\theta_0=\frac{\pi}{2}}^{\theta} \frac{d(\sin \theta)}{dt} \Rightarrow \dot{\theta}^2 = -2\frac{g}{r} [\sin \theta]_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} = \frac{2g}{r} (1 - \sin \theta) = \dot{\theta}^2 \\ \dot{\theta}^2 &= \frac{2g}{r} (1 - \sin \theta) \Rightarrow r^2 \dot{\theta}^2 = 2gr(1 - \sin \theta) \Rightarrow V = \sqrt{2gr(1 - \sin \theta)} \\ R - mg \sin \theta &= -m r \dot{\theta}^2 = -\frac{m}{r} V^2 \Rightarrow R = mg \sin \theta - m[2g(1 - \sin \theta)] = mg(3 \sin \theta - 2) \end{aligned}$$

d) Au point M_1 :

$$\vec{R}(\theta_1) = \vec{0} \Rightarrow 3 \sin \theta_1 - 2 = 0 \Rightarrow \sin \theta_1 = \frac{2}{3}$$

et en remplaçant dans V :

$$V_1 = \sqrt{2gr(1 - \sin \theta_1)} = \sqrt{2gr(1 - \frac{2}{3})} = \sqrt{\frac{2}{3}gr}$$

$$\text{et } \cos \theta_1 = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_1} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

II. Deuxième phase du mouvement

$$\begin{aligned} \text{a) } \vec{V}_1 &= V_1(\sin \theta_1 \vec{u}_x - \cos \theta_1 \vec{u}_y) = \sqrt{\frac{2}{3}gr} \left(\frac{2}{3} \vec{u}_x - \vec{u}_y \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} \right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}gr} \left(\frac{2}{3} \vec{u}_x - \frac{\sqrt{5}}{3} \vec{u}_y \right). \end{aligned}$$

$$\text{b) } \vec{a} = \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{V} = \begin{pmatrix} V_1 \sin \theta_1 \\ -gt - V_1 \cos \theta_1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = (V_1 \sin \theta_1)t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 - (V_1 \cos \theta_1)t \\ 0 \end{cases}$$

$$\text{avec } t = \frac{x}{V_1 \sin \theta_1}$$

$$y = -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{(V_1 \sin \theta_1)^2} - \frac{\cos \theta_1}{\sin \theta_1} x \Rightarrow y = -\frac{27}{16} \frac{x^2}{r} - \frac{\sqrt{5}}{2} x \text{ (origine en } M_1)$$

$$\text{c) Le point } M \text{ touche le plan d'eau pour : } y = -r \sin \theta_1 \Rightarrow \frac{27}{16} x^2 + \frac{\sqrt{5}}{2} r x - \frac{2}{3} r^2 = 0$$

$$x^2 + \frac{8\sqrt{5}}{27} r x - \frac{32}{81} r^2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{4\sqrt{5}}{27} r \pm \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{5}}{27} r\right)^2 + \frac{32r^2}{81}}$$

$$x = -\frac{4\sqrt{5}}{27} r + \sqrt{\frac{80}{27^2} r^2 + \frac{32 \cdot 9}{27^2} r^2} = -\frac{4\sqrt{5}}{27} r + \frac{r}{27} \sqrt{80 + 288} = \frac{r}{27} (\sqrt{368} - 4\sqrt{5})$$

$$x = \frac{r}{27} (12\sqrt{2} - 4\sqrt{5}) = \frac{4}{27} r (3\sqrt{2} - \sqrt{5}) = \frac{8}{27} r = 0,297r$$

$$\text{On a donc : } OM = r \cos \theta_1 + \frac{8}{27} r = \left(\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{8}{27} \right) r = 1,0426r$$

EXERCICES CORRIGÉS

- 1** Un solide de masse m est en équilibre sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale (figure 3.24).

Dans les questions 2 et 3 le contact entre le solide et le plan incliné est supposé sans frottements.

1) Rappeler à quelles conditions un solide est en équilibre.

2) L'équilibre est d'abord réalisé en maintenant le solide par un fil non élastique de masse négligeable.

Écrire les lois de l'équilibre de ce solide. Déterminer la tension du fil.

3) L'équilibre est maintenant assuré par un fil élastique de raideur k dont la longueur à vide est l_0 . Déterminer la longueur du ressort lorsqu'il maintient le solide sur le plan incliné.

4) Le solide n'est plus maintenu par un fil mais on suppose que le coefficient de frottement solide entre le solide et le plan est μ . Démontrer que le solide ne peut être en équilibre que si l'angle α est inférieur à un angle que l'on déterminera. Déterminer la position du point d'application de la réaction du support dans ce cas.

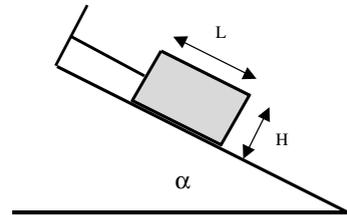


Figure 3.24

- 2** Un bœuf tire un traîneau sur un sol horizontal en appliquant systématiquement une force de traction \vec{F} inclinée de 60° par rapport à l'horizontale. La force de traction \vec{F} qu'il exerce sera variable dans les différentes parties du problème et l'on cherche à comprendre le mouvement du traîneau en fonction de la valeur du module de \vec{F} . Dans tout le problème on considère que la masse du traîneau est $m = 100$ kg et l'on posera $g = 10$ ms⁻².

1) Pour mettre en mouvement le traîneau, le bœuf doit tirer avec une force minimale $F_m = 40$ N. Expliquer l'origine de cette force minimale. En déduire les caractéristiques de la réaction sol-traîneau.

2) À l'instant $t = 0$, il tire le traîneau avec une force $F_1 = 100$ N pendant $t_1 = 10$ s, puis il applique une force $F_2 = 40$ N pendant $t_2 = 20$ s pour ne le tirer qu'avec une force de $F_3 = 20$ N par la suite.

a) Écrire l'équation différentielle du mouvement du traîneau dans les trois cas précédents.

b) Résoudre ces équations et déterminer l'expression de la distance parcourue par le traîneau en fonction de t .

c) Le traîneau s'arrête-t-il? Dans l'affirmative trouver la position d'arrêt.

- 3** Un traîneau de masse $m = 200$ kg est tiré suivant une ligne de plus grande pente d'un plan incliné par l'intermédiaire d'un câble faisant un angle β avec celui-ci (figure 3.25).

1) La tension du câble vaut $T = 1000$ N. Le mouvement étant uniforme de vitesse $v = 10$ km.h⁻¹, déterminer la réaction \vec{R} somme des forces de contact exercées par le sol sur le traîneau (norme et inclinaison par rapport à la normale au plan incliné). Données : $\alpha = 20^\circ$, $\beta = 30^\circ$; $g = 10$ m.s⁻².

2) On augmente la tension et le mouvement du traîneau devient uniformément accéléré.

a) Le coefficient de frottement traîneau-sol restant identiques, la réaction \vec{R} est-elle modifiée ?

b) La vitesse du traîneau passe de 10 km.h^{-1} à 20 km.h^{-1} sur une distance de 10 m. Calculer la puissance exercée par la tension du câble lorsque la vitesse vaut 15 km.h^{-1} .

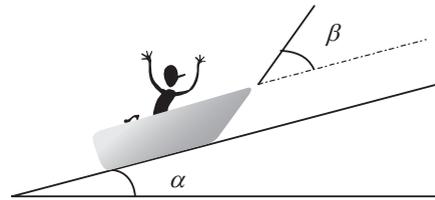


Figure 3.25

- 4 Un esquimau pousse un traîneau de masse $m = 100 \text{ kg}$ le long de l'axe Ox pour finalement le lancer dans la pente Ax afin d'atteindre un point B dans la pente. La pente fait un angle α avec l'horizontale (figure 3.26).

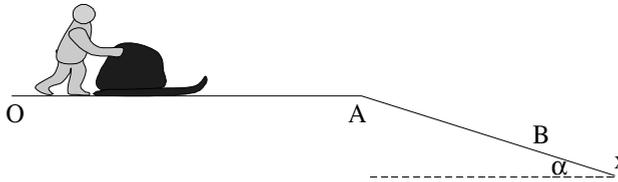


Figure 3.26

On posera dans tout le problème $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$. La force de frottement entre le sol et le traîneau est du type frottement solide et vérifie les lois suivantes :

- Lorsque le traîneau est mobile par rapport au sol, le sol exerce sur le traîneau une force de freinage $f = KN$ qui est proportionnelle à la réaction normale N exercée par le sol sur le traîneau et proportionnelle au coefficient de frottement solide K .
- Tant que le traîneau est immobile ($v = 0$), il faut au moins exercer une force parallèle au sol $F_{//} > KN$ pour le mettre en mouvement.

1) Mouvement horizontal entre O et A

Au départ le traîneau est immobile en O . L'esquimau doit exercer une poussée minimale F_0 pour faire démarrer le traîneau puis il exerce une poussée croissante $F(t) = F_0(1 + \frac{t}{\tau})$ pour lui donner de la vitesse. Dans tout ce qui suit, τ est une constante et $F_0 = 100 \text{ N}$.

- Exprimer F_0 en fonction de K, m et g .
- Exprimer la vitesse $v(t)$ et la position $x(t)$ de l'esquimau en fonction de F_0, m et τ .
- Le point A est atteint en 10 s. La vitesse $v(A)$ est alors de 5 m.s^{-1} . Calculer le coefficient de frottement K , la constante τ et la distance OA de lancement.

2) Mouvement dans la pente entre A et B .

En A l'esquimau de masse $m_e = 60 \text{ kg}$ saute sur le traîneau et l'ensemble prend la pente à la vitesse $v(A)$. Le coefficient de frottement K est le même dans la pente que sur le plat.

a) Discuter les différents types de mouvement possibles à partir de A selon la valeur de α . Trouver une condition nécessaire pour que le mouvement soit accéléré.

b) L'esquimau souhaite atteindre le point B à 2 km de A sans relancer le traîneau. La pente est de 8% et $v(A) = 5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

- Décrire le mouvement.
- Déterminer la position d'arrêt.
- L'esquimau regrette de ne pas avoir farté les skis de son traîneau. Quel devrait être le coefficient K de frottement pour qu'il atteigne le point B ? Quelle est dans ces conditions la durée du parcours AB ?

5 On dispose d'un ressort à boudin BC , de raideur $k = 20 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$, de masse négligeable, de longueur à vide $l_0 = 10 \text{ cm}$ et d'une masse $m = 100 \text{ g}$ considérée comme ponctuelle fixée à l'une de ses extrémités.

On attache l'extrémité B du ressort à un fil inextensible de masse négligeable, de longueur $l_1 = 40 \text{ cm}$. L'autre extrémité du fil est fixée à l'extrémité supérieure d'une tige verticale qui, en tournant, entraîne le fil, le ressort et la masse d'un mouvement de rotation uniforme (figure 3.27). Après un régime transitoire, l'angle θ entre le fil et la tige verticale prend une valeur constante égale à 60° .

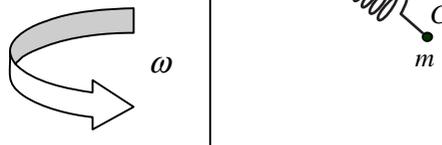


Figure 3.27

1) Calculer la tension du ressort et sa longueur.

2) Quelle est, en nombre de tours par seconde, la vitesse de rotation de la tige? On prendra $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

6 Une masse $m = 1 \text{ kg}$ est suspendue à un ressort de raideur k fixé en A comme l'indique la figure 3.28.

La tige OM rigide de masse négligeable est articulée en O et M et agit sans frottements de sorte que l'action de la tige sur la masse m est dirigée dans l'axe OM de la tige. Le ressort a une longueur $2l_0$ lorsqu'il n'est soumis à aucune force. D'autre part $AO = 2l_0$ et $OM = l_0 = 1 \text{ m}$.

On suppose que le système est en équilibre pour un angle $\theta = 60^\circ$ et l'on cherche à déterminer la constante de raideur du ressort k .

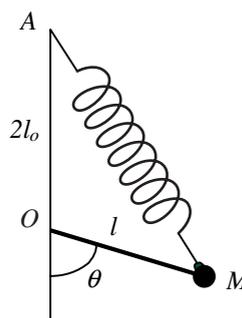


Figure 3.28

1) Peut-on trouver une solution graphique à ce problème? (faire un schéma à l'échelle $1 \text{ cm} = 2 \text{ N}$; $2,5 \text{ cm} = 1 \text{ m}$).

2) On rappelle deux relations dans un triangle ABC :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC}^2 &= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}\end{aligned}$$

Déterminer la longueur du ressort AM ainsi que $\sin(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MA})$ en fonction de l_0 et θ .

3) Calculer la valeur de la constante de raideur k du ressort qui assure l'équilibre :

- en faisant le bilan des forces ;
- en utilisant le théorème des moments.

7 Le mobile M est un anneau enfilé sur l'axe rigide Ox' . Il peut glisser sur Ox' sans frottement et on néglige la pesanteur (alors l'anneau n'est soumis qu'à une réaction normale de l'axe rigide).

L'axe Ox' tourne dans le plan xOy à la vitesse angulaire constante ω_0 . Le repère xOy est un repère galiléen. À l'instant $t = 0$, $\theta = 0$, $\rho = \rho_0$, $\frac{d\rho}{dt} = 0$.

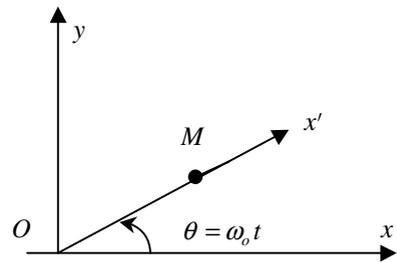


Figure 3.29

- Écrire l'équation fondamentale de la dynamique dans le repère fixe xOy .
- Déterminer les équations horaires $\rho(t)$ et $\theta(t)$ du mouvement du point M .
- Représenter l'allure de la trajectoire dans le plan xOy .

Solutions

1 Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre considéré comme galiléen. Le système étudié est un solide de masse m . Les forces appliquées, ramenées au centre d'inertie du solide, sont (figure 3.30) :

$\vec{P} = m\vec{g}$ (verticale vers le bas) ; \vec{R}_n (réaction normale du sol car pas de frottement) et \vec{T} (tension du fil).

1) Le centre d'inertie du solide est immobile dans le référentiel terrestre si :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R}_n + \vec{T} = \vec{0}.$$

2) En projetant sur les axes du repère, on obtient : $mg \sin \alpha = T$ et $R_n = mg \cos \alpha$

3) Le fil est remplacé par un ressort. La tension du ressort est proportionnelle à son allongement. On a donc :

$$T = k(l - l_0) \Rightarrow (l - l_0) = \frac{mg}{k} \sin \alpha \Rightarrow l = l_0 + \frac{mg}{k} \sin \alpha.$$

4) La tension est remplacée par la force de frottement \vec{f} (figure 3.31)

On a donc $f = mg \sin \alpha$; $R_n = mg \cos \alpha$ et la condition d'équilibre qui impose $\mu R_n \geq f$. L'équilibre est possible si : $\mu \geq \tan \alpha = \frac{f}{R_n}$

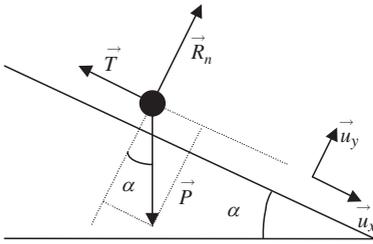


Figure 3.30

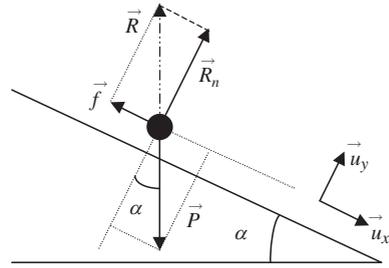


Figure 3.31

Si l'équilibre est réalisé, on a : $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$ et les deux forces ont la même ligne d'action. Le point d'application de la réaction se trouve donc à l'intersection de la surface de contact solide-sol avec la ligne d'action de \vec{P} .

2 Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre considéré comme galiléen. Le système étudié est le traîneau de masse m ($m = 100$ kg et $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$).

Les forces appliquées (voir figure 3.32) sont : $\vec{P} = m\vec{g}$; \vec{F} (action du bœuf); \vec{R} (réaction du sol).

Principe fondamental de la dynamique :

$$m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{a}$$

(\vec{a} accélération du centre d'inertie du traîneau).

1) Si la réaction du sol était uniquement normale au sol, la projection des forces suivant l'horizontale donnerait $F \cos \alpha = m\ddot{x}$. Il n'y aurait aucune condition sur F pour que le traîneau se mette en mouvement dès que $F \neq 0$.

Il existe donc des forces de frottement et la réaction du sol est inclinée vers l'arrière (figure 3.32).

En projetant sur l'horizontale et la verticale, on a $F \cos \alpha - f = m\ddot{x}$ et $R_n - mg = 0$.

La condition est donc $\ddot{x} \geq 0 \Rightarrow F \cos \alpha \geq f \Rightarrow F_m = \frac{f}{\cos \alpha} = \frac{f}{1/2} = 2f = 40 \text{ N} \Rightarrow f = 20 \text{ N}$.

Si le traîneau bouge, alors on a $f = \mu R_n$ avec μ coefficient de frottement caractéristique de la réaction sol-traîneau, avec $R_n = mg \Rightarrow \mu = \frac{f}{R_n} = \frac{f}{mg} = \frac{20}{1000} = 0,02 = \tan \varphi$ où φ est l'angle que fait la réaction \vec{R} avec la normale au sol \vec{R}_n . Cet angle de frottement vaut $\varphi = 1,146^\circ$.

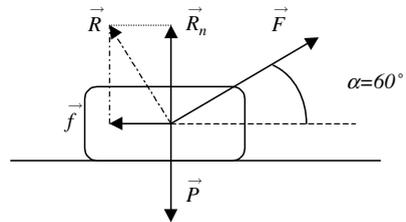
Dans tout ce qui suit, f reste constante et peut s'écrire $f = \mu R_n = \mu mg$.

2) Pour la première étape : $F_1 \cos \alpha - \mu mg = m\ddot{x}_1 \Rightarrow \ddot{x}_1 = \frac{F_1}{m} \cos \alpha - \mu g = \frac{1}{2} - 0,2 = 0,3 \text{ m.s}^{-2}$.

Le mouvement est rectiligne uniformément accéléré. À $t = 0$, $\dot{x}_1(0) = 0$ et $x_1(0) = 0$. On a donc

$\dot{x}_1 = \ddot{x}_1 t = 0,3t \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}\ddot{x}_1 t^2 = 0,15t^2$. Au bout de $t_1 = 10$ s, le traîneau a parcouru $x_1(t_1) = d_1 = \frac{1}{2}\ddot{x}_1 t_1^2 = 15$ m et sa vitesse est $\dot{x}_1(t_1) = v_1 = \ddot{x}_1 t_1 = 3 \text{ m.s}^{-1}$.

Pour l'étape suivante : $F_2 \cos \alpha - \mu mg = m\ddot{x}_2 \Rightarrow \ddot{x}_2 = \frac{F_2}{m} \cos \alpha - \mu g = 0,2 - 0,2 = 0$.



Le mouvement est donc rectiligne uniforme à la vitesse $\dot{x}_2 = v_1 = \ddot{x}_1 t_1 = 3 \text{ m.s}^{-1}$. Le déplacement x_2 s'écrit $x_2 = \dot{x}_2 t + C = v_1 t + C$ avec pour $t = t_1, x_2 = d_1 \Rightarrow C = d_1 - v_1 t_1 \Rightarrow x_2 = v_1(t - t_1) + d_1$.

À la date $t = t_1 + t_2$, il a parcouru $x_2(t_1 + t_2) = d_2 = v_1 t_2 + d_1 = 60 + 15 = 75 \text{ m}$ depuis l'origine O , point de départ. Sa vitesse est alors toujours v_1 .

Pour la dernière étape : $F_3 \cos \alpha - \mu mg = m\ddot{x}_3 \Rightarrow \ddot{x}_3 = \frac{F_3}{m} \cos \alpha - \mu g = 0,1 - 0,2 = -0,1 \text{ m.s}^{-2}$.

Le mouvement est donc rectiligne uniformément décéléré. A $t = (t_1 + t_2), \dot{x}_3 = v_1$ et $x_3 = d_2$. On a donc :

$$\dot{x}_3 = \ddot{x}_3 t + C \Rightarrow C = v_1 - \ddot{x}_3(t_1 + t_2) \Rightarrow \dot{x}_3 = \ddot{x}_3(t - t_1 - t_2) + v_1 = -0,1(t - 30) + 3 = -0,1t + 6$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\ddot{x}_3 t^2 - [\ddot{x}_3(t_1 + t_2) - v_1]t + C \Rightarrow C = d_2 - \frac{1}{2}\ddot{x}_3(t_1 + t_2)^2 + [\ddot{x}_3(t_1 + t_2) - v_1](t_1 + t_2)$$

$$C = d_2 + \frac{1}{2}\ddot{x}_3(t_1 + t_2)^2 - v_1(t_1 + t_2) = 75 - 0,05(30)^2 - 3(30) = -60 \text{ m}$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\ddot{x}_3 t^2 - [\ddot{x}_3(t_1 + t_2) - v_1]t + d_2 + \frac{1}{2}\ddot{x}_3(t_1 + t_2)^2 - v_1(t_1 + t_2) = -0,05t^2 + 6t - 60$$

La vitesse s'annule pour $-0,1(t - 30) + 3 = 0 \Rightarrow t_3 = 60 \text{ s}$. Le traîneau s'arrête alors.

On a donc en conclusion :

$$t_1 \geq t \geq 0 = 10\text{s} \Rightarrow x = \frac{1}{2}\ddot{x}_1 t^2 = 0,15t^2 \text{ et } v = \ddot{x}_1 t = 0,3t$$

$$t_1 + t_2 \geq t \geq t_1 = 10\text{s} = 30\text{s} \Rightarrow x = \ddot{x}_1 t_1(t - t_1) + \frac{1}{2}\ddot{x}_1 t_1^2$$

$$x = v_1(t - t_1) + d_1 = \ddot{x}_1 t_1(t - \frac{t_1}{2}) = 3(t - 5) = 3t - 15 \text{ et } v = v_1 = 3 \text{ m.s}^{-1}$$

$$t_3 = 60\text{s} \geq t \geq t_1 + t_2 = 30 \Rightarrow x_3 = -0,05t^2 + 6t - 60 \text{ et } \dot{x}_3 = -0,1t + 6$$

Le traîneau s'arrête au bout de 60 s, à la distance du point de départ $d_3 = -0,05(60)^2 + 6(60) - 60 = 120 \text{ m}$.

3 Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre considéré comme galiléen. Le système étudié est le traîneau de masse m ($m = 200 \text{ kg}$ et $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$).

Bilan des forces (figure 3.33) :

$$\begin{aligned} \vec{P} &= m\vec{g} = -mg(\sin \alpha \vec{u}_x + \cos \alpha \vec{u}_y) \\ &= -2\,000(\sin 20^\circ \vec{u}_x + \cos 20^\circ \vec{u}_y) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{T} &= T(\cos \beta \vec{u}_x + \sin \beta \vec{u}_y) \\ &= 1\,000((\cos 30^\circ \vec{u}_x + \sin 30^\circ \vec{u}_y) \end{aligned}$$

$$\text{et } \vec{R} = \vec{f} + \vec{R}_n = -f\vec{u}_x + R_n\vec{u}_y.$$

Principe fondamental de la dynamique : $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m\vec{a}$

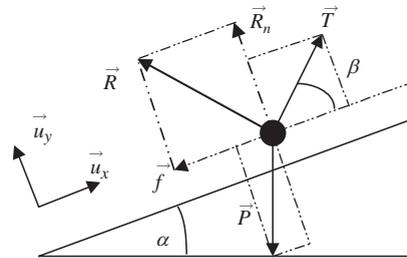
Projection sur \vec{u}_x et \vec{u}_y : $-mg \sin \alpha + T \cos \beta - f = m\ddot{x}$ et $-mg \cos \alpha + T \sin \beta + R_n = m\ddot{y} = 0$.

1) Le mouvement est uniforme (vitesse constante $\dot{x} = v = 10 \text{ km.h}^{-1} = \frac{25}{9} \text{ m.s}^{-1}$), l'accélération est nulle. On a donc $f = -mg \sin \alpha + T \cos \beta = 1000(-2 \sin 20^\circ + \cos 30^\circ) = 182 \text{ N}$;

$$R_n = mg \cos \alpha - T \sin \beta = 1000(2 \cos 20^\circ - \sin 30^\circ) = 1379,4 \text{ N} ;$$

$$\|\vec{R}\| = \sqrt{182^2 + 1379,4^2} = 1391,35 \text{ N.}$$

$$\tan \varphi = \frac{f}{R_n} = \mu = \frac{182}{1379,4} = 0,132 \Rightarrow \varphi = 7,5^\circ.$$



L'angle φ est l'angle que fait \vec{R} avec la normale au sol. Puisqu'il y a mouvement, on a la relation $f = \mu R_n$ où μ est le coefficient de frottement ne dépendant que de la nature des surfaces en contact.

2) La tension T augmente. Le mouvement devient uniformément accéléré ($\ddot{x} > 0$). R_n va donc diminuer. Le coefficient μ restant constant, f diminue aussi. Le module de \vec{R} diminue mais l'angle φ ne change pas.

Calcul de l'accélération : $v = at + v_1$ et $x = \frac{1}{2}at^2 + v_1t \Rightarrow t = \frac{v-v_1}{a}$ et $x = \frac{1}{2}\frac{v-v_1}{a}(v+v_1)$.

On peut donc écrire $2ax = v^2 - v_1^2 \Rightarrow a = \frac{v^2 - v_1^2}{2x} = \frac{(20-10)(20+10)}{20} \left(\frac{10^3}{3600}\right)^2 = 1,16 \text{ m.s}^{-2}$.

Calcul de T' : $f = \mu R_n = \mu(mg \cos \alpha - T' \sin \beta) = -ma - mg \sin \alpha + T' \cos \beta$. On en tire l'expression de T' :

$$T' = m \frac{a}{\cos \beta + \mu \sin \beta} + mg \frac{\mu \cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \beta + \mu \sin \beta} = m \frac{a}{\cos \beta + \mu \sin \beta} + T = 200 \frac{1,16}{0,932} + 1000 = 1248,93 \text{ N}.$$

La puissance est $\mathcal{P} = \vec{T} \cdot \vec{v} = T \cos \beta v = 4506,7 \text{ W}$.

4 Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre considéré comme galiléen. Le système étudié est le traîneau de masse m ($m = 100 \text{ kg}$ et $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$).

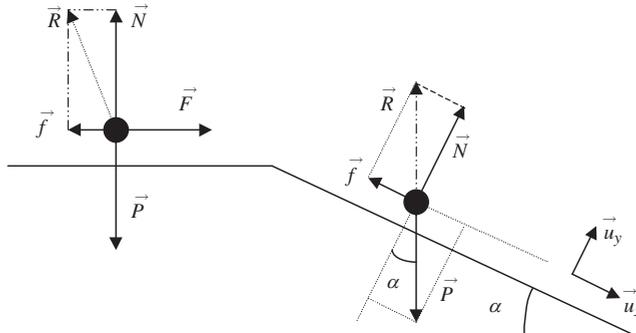


Figure 3.34

1) Mouvement horizontal suivant OA

Bilan des forces (figure 3.34) :

$$\vec{P} = m \vec{g} \left(\|\vec{P}\| = P = 1000 \text{ N} \right); \vec{F} \left(F = F_0 \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) \right); \vec{R} = \vec{f} + \vec{N}.$$

Projection suivant l'horizontale et la verticale : $N - mg = 0$ et $F - f = m\ddot{x}$.

Lorsqu'il y a mouvement, on a $f = KN$. Pour démarrer, il faut

$$\ddot{x} \geq 0 \Rightarrow F \geq F_0 = f = KN = Kmg.$$

On a donc : $F_0 = Kmg = 1000K$.

$$\text{Ensuite : } F - f = m\ddot{x} \Rightarrow F_0 \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) - F_0 = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} = \frac{F_0}{m} \frac{t}{\tau} = Kg \frac{t}{\tau}.$$

$$\dot{x} = v = \frac{1}{2} \frac{F_0}{m} \frac{t^2}{\tau} = \frac{1}{2} Kg \frac{t^2}{\tau} \Rightarrow x = \frac{1}{6} \frac{F_0}{m} \frac{t^3}{\tau} = \frac{1}{6} Kg \frac{t^3}{\tau} \Rightarrow K = \frac{F_0}{mg} = \frac{100}{1000} = 0,1.$$

$$\text{Pour } t = 10 \text{ s, on a } v = v(A) = 5 \text{ m.s}^{-1} \Rightarrow v(A) = \frac{1}{2} Kg \frac{t^2}{\tau} \Rightarrow \tau = \frac{1}{2} Kg \frac{t^2}{v(A)} = \frac{1}{2} \frac{100}{5} = 10 \text{ s}.$$

$$OA = x = \frac{1}{6} Kg \frac{t^3}{\tau} = \frac{1}{6} \frac{1000}{10} = \frac{100}{6} = 16,67 \text{ m}.$$

2) Mouvement sur la pente : La masse du système est $M' = m + m_e$.

Les forces appliquées sont \vec{P} ; $\vec{R} = \vec{f} + \vec{R}_n$.

Principe fondamental de la dynamique : $\vec{P} + \vec{R} = \vec{P} + \vec{f} + \vec{R}_n = M' \vec{a}$.

Projection sur la base (\vec{u}_x, \vec{u}_y) : $M'g \sin \alpha - f = M' \ddot{x}$ et $-M'g \cos \alpha + N = 0$ et $f = KN$.

On obtient l'équation différentielle du mouvement : $g(\sin \alpha - K \cos \alpha) = \ddot{x} = g \sin \alpha (1 - \frac{K}{\tan \alpha})$.

- Si $\ddot{x} > 0$, le mouvement est uniformément accéléré $\Rightarrow K = 0, 1 < \tan \alpha \Rightarrow \alpha > 5, 71^\circ$.
- Si $\ddot{x} = 0$, le mouvement est uniforme de vitesse $v(A) \Rightarrow K = \tan \alpha \Rightarrow \alpha = 5, 71^\circ$.
- Si $\ddot{x} < 0$, le mouvement est uniformément décéléré $\Rightarrow K > \tan \alpha \Rightarrow \alpha < 5, 71^\circ$.

La pente est de $8\% = 0,08 \Rightarrow \tan \alpha \approx \sin \alpha \approx 0,08 \Rightarrow \alpha = 4, 57^\circ$. Le mouvement sera donc uniformément freiné. L'accélération sera : $\ddot{x} = g \sin \alpha (1 - \frac{K}{\tan \alpha}) = 0, 8(1 - \frac{5}{4}) = -0, 2 \text{ m.s}^{-2}$.

$$\dot{x} = g \sin \alpha (1 - \frac{K}{\tan \alpha})t + v(A) = -0, 2t + 5$$

$$x = \frac{1}{2}g \sin \alpha (1 - \frac{K}{\tan \alpha})t^2 + v(A)t = -0, 1t^2 + 5t$$

Pour l'arrêt : $\dot{x} = 0 \Rightarrow t = -\frac{v(A)}{g \sin \alpha (1 - \frac{K}{\tan \alpha})} = 25 \text{ s}$ et $x = -\frac{1}{2} \frac{v(A)^2}{g \sin \alpha (1 - \frac{K}{\tan \alpha})} = -\frac{1}{2} \frac{v(A)^2}{\ddot{x}} = 62, 5 \text{ m}$.

Si $AB = d = 2000 \text{ m} \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{v(A)^2}{2d} = -\frac{1}{160} \text{ m.s}^{-2} \Rightarrow (1 - \frac{K}{\tan \alpha}) = \frac{\ddot{x}}{g \sin \alpha} = -\frac{1}{128}$.

$$K = \tan \alpha (1 - \frac{\ddot{x}}{g \sin \alpha}) = (1 + \frac{v(A)^2}{2dg \sin \alpha}) \tan \alpha = 0, 08(1 + \frac{1}{128}) = 0, 080 625.$$

Il faut donc que $0, 080 625 \geq K$. La durée de la descente est : $t = -\frac{v(A)}{\ddot{x}} = 800 \text{ s}$.

5 Système : la masse $m = 0, 1 \text{ kg}$, référentiel terrestre galiléen. Bilan des forces (figure 3.35) :

\vec{P} ($P = mg = 1 \text{ N}$) et \vec{T} ($T = k(l - l_0)$).

Principe fondamental de la dynamique :

$$\vec{P} + \vec{T} = m \vec{a}.$$

La masse m a un mouvement circulaire uniforme autour de l'axe vertical. Elle décrit un cercle de rayon $r = (l_1 + l) \sin \theta$ à la vitesse angulaire ω . L'accélération est donc normale et centripète et a pour expression $a = \omega^2 r = \omega^2 (l_1 + l) \sin \theta$ suivant l'horizontale et vers l'axe. En projetant, on obtient $T \cos \theta = mg$ et $T \sin \theta = m\omega^2 (l_1 + l) \sin \theta$.

On a donc $k(l - l_0) \cos \theta = mg \Rightarrow T = k(l - l_0) = \frac{mg}{\cos \theta} = 2 \text{ N}$.

$(l - l_0) = \frac{mg}{k \cos \theta} = 0, 1 \text{ m} \Rightarrow l = l_0 + 0, 1 = 0, 2 \text{ m}$.

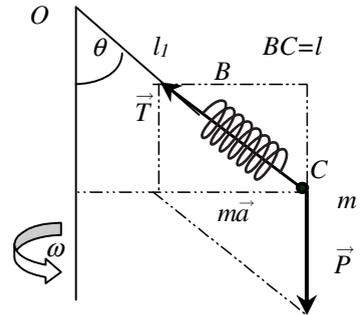
$$T \sin \theta = m\omega^2 (l_1 + l) \sin \theta \Rightarrow \frac{mg}{\cos \theta} = m(l_1 + l)\omega^2$$

$$\Rightarrow \omega = \left(\frac{g}{(l_1 + l) \cos \theta} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{10}{0, 3}} = 5, 77 \text{ rad.s}^{-1} = 0, 92 \text{ tr.s}^{-1}$$

6 Système : la masse $m = 1 \text{ kg}$ en équilibre. Référentiel terrestre galiléen. Bilan des forces : \vec{P} ; \vec{R} ; \vec{T} .

Principe fondamental de la dynamique : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = \vec{0}$.

Théorème du moment cinétique : $\vec{M}_o(\vec{P}) + \vec{M}_o(\vec{T}) + \vec{M}_o(\vec{R}) = \vec{0}$.



1) \vec{P} étant connu en direction, sens et intensité, on détermine la longueur des vecteurs \vec{R} et \vec{T} dont les directions sont connues en construisant le parallélogramme $\vec{R} + \vec{T} = -\vec{P}$ (figure 3.36).

On obtient $T \simeq 6,6 \text{ cm} \Rightarrow T = 13,2 \text{ N}$ et $AM = 6,6 \text{ cm}$ pour une longueur à vide de 5 cm . L'allongement du ressort est donc de $1,6 \text{ cm}$ soit, en tenant compte de l'échelle, de $0,64 \text{ m}$.

La raideur du ressort est :

$$k = \frac{T}{\Delta l} = \frac{13,2}{0,64} = 20,625 \text{ N.m}^{-1}.$$

$$2) \vec{AM} = \vec{AO} + \vec{OM} \Rightarrow \vec{AM}^2 = \vec{AO}^2 + \vec{OM}^2 + 2\vec{AO} \cdot \vec{OM} = 4l_o^2 + l_o^2 + 4l_o^2 \cos \theta.$$

$$AM^2 = l_o^2(5 + 4 \cos 60^\circ) \Rightarrow AM^2 = 7l_o^2 \Rightarrow AM = \sqrt{7}l_o = 2,646 \text{ m (soit } 6,615 \text{ cm sur le graphique à l'échelle } 2,5 \text{ cm} \rightarrow 1 \text{ m)}.$$

$$AM = l_o \sqrt{5 + 4 \cos \theta} \Rightarrow \Delta l = AM - 2l_o = l_o \sqrt{5 + 4 \cos \theta} - 2l_o$$

$$AM = l_o \left[\sqrt{5 + 4 \cos \theta} - 2 \right].$$

$$\vec{OM} \wedge \vec{OA} = \vec{MA} \wedge \vec{MO} \Rightarrow 2l_o^2 \sin(\pi - \theta) = AM l_o \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2l_o}{AM} \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5+4 \cos \theta}} \sin \theta.$$

$$\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{7}} \sin 60^\circ = 0,655 \Rightarrow \alpha = 40,89^\circ.$$

3) En projetant la relation fondamentale de la dynamique sur la direction perpendiculaire à \vec{R} , on obtient $mg \sin \theta - T \sin \alpha = 0$. On en tire l'expression de T : $T = mg \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} = mg \frac{AM}{2l_o} = mg \sqrt{\frac{5}{4} + \cos \theta} = 5\sqrt{7} = 13,23 \text{ N}$. (valeur vérifiée graphiquement).

La somme des moments des forces par rapport à O doit être nulle. Le moment de \vec{R} est nul puisque la ligne d'action de cette force passe par O . Il reste :

$$\vec{M}_o(\vec{P}) + \vec{M}_o(\vec{T}) = \vec{0} \Rightarrow \left\| \vec{M}_o(\vec{P}) \right\| = \left\| \vec{M}_o(\vec{T}) \right\|.$$

$$\left\| \vec{OM} \wedge \vec{P} \right\| = l_o mg \sin \theta = \left\| \vec{OM} \wedge \vec{T} \right\| = T l_o \sin(\pi - \alpha) = T l_o \sin \alpha \Rightarrow T = mg \frac{\sin \theta}{\sin \alpha}$$

On retrouve bien le même résultat. On en déduit l'expression de la raideur k du ressort :

$$k = \frac{T}{\Delta l} = \frac{mg}{l_o} \frac{\sqrt{\frac{5}{4} + \cos \theta}}{\left[\sqrt{5 + 4 \cos \theta} - 2 \right]} \Rightarrow k = 10 \frac{\sqrt{7}}{2} \frac{1}{\sqrt{7} - 2} = 20,48 \text{ N.m}^{-1}$$

(on retrouve la valeur obtenue par la méthode graphique).

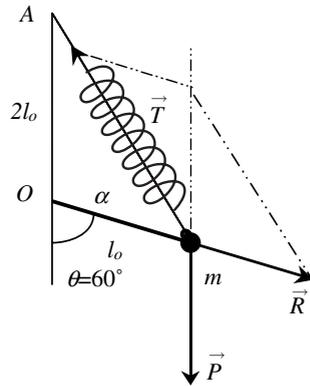


Figure 3.36

7 Le système est l'anneau de masse négligeable. Le référentiel est le référentiel terrestre galiléen.

Bilan des forces : une force \vec{R} de contact, sans frottement, avec la tige, force perpendiculaire à la tige.

Principe fondamental de la dynamique : $\vec{R} = m \vec{a}$.

En coordonnées polaires, on peut écrire :

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta = \frac{R}{m}\vec{u}_\theta \Rightarrow \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 = 0.$$

On a de plus $\theta = \omega_0 t \Rightarrow \dot{\theta} = \omega_0 \Rightarrow \ddot{\rho} - \rho\omega_0^2 = 0$.

L'équation caractéristique donne $\lambda^2 - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\omega_0 \Rightarrow \rho = Ae^{-\omega_0 t} + Be^{\omega_0 t}$.

Les conditions initiales sont $t = 0, \rho(0) = \rho_0$ et $\dot{\rho}(0) = 0$. On a donc $\rho_0 = A + B$ et $\dot{\rho}(0) = 0 = \omega_0(B - A) \Rightarrow A = B = \frac{\rho_0}{2}$.

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{2}(e^{-\omega_0 t} + e^{\omega_0 t}) = \rho_0 \cosh(\omega_0 t).$$

L'équation de la trajectoire est :

$$\rho(\theta) = \rho_0 \cosh \theta = \rho_0(e^{-\theta} + e^{\theta}).$$

C'est l'équation d'une spirale exponentielle (figure 3.37). ρ tend très rapidement vers l'infini. Il est possible de connaître la réaction $R = m(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}) = 2m\dot{\rho}\omega_0$:

$$\begin{aligned} R &= 2m\rho_0\omega_0^2(e^{\omega_0 t} - e^{-\omega_0 t}) \\ &= 4m\omega_0^2\rho_0 \sinh(\omega_0 t) = 4m\omega_0^2\rho_0 \sinh \theta. \end{aligned}$$

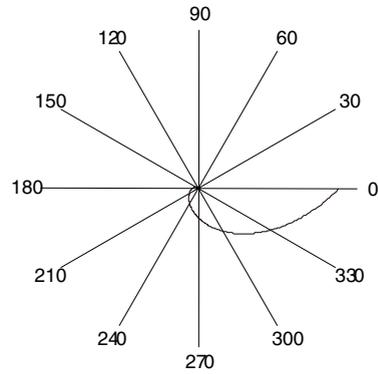


Figure 3.37

CHAPITRE 4

TRAVAIL, PUISSANCE, ÉNERGIE

Pré-requis

- La notion de produit scalaire de deux vecteurs est supposée acquise ainsi que les notions d'intégration et de différentiation. Ces outils mathématiques sont abordés dans l'annexe ainsi que dans le livre *Mathématiques pour la physique* paru dans la même collection.

Objectif

- ▶ Calculer le travail d'une force variable ou non sur un déplacement quelconque.
- ▶ Application au calcul du travail de la force de pesanteur et de la force élastique quelle que soit l'orientation des axes choisis.
- ▶ Savoir utiliser le théorème de l'énergie cinétique.
- ▶ Comprendre comment définir l'énergie potentielle à partir de la notion de force conservative.
- ▶ Apprendre à utiliser la notion d'énergie mécanique.

1. TRAVAIL D'UNE FORCE

1.1. Force constante sur un déplacement rectiligne

Considérons un objet assimilé à un point matériel G se déplaçant sur une portion de droite, d'un point A à un point B , et soumis à une force \vec{F} constante au cours du déplacement (figure 4.1).

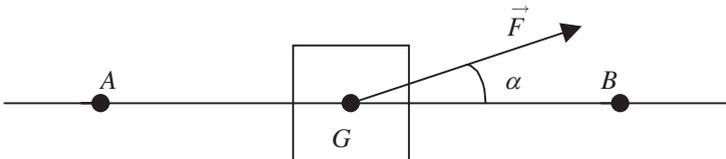


Figure 4.1 • Déplacement du point d'application d'une force sur un chemin rectiligne.

Par définition, le travail d'une force \vec{F} constante sur un déplacement rectiligne AB est égal au produit scalaire du vecteur force par le vecteur déplacement :

$$\vec{F} = \text{cste sur } \vec{AB} \implies W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB} = FAB \cos \alpha$$

avec α l'angle que fait \vec{F} avec \vec{AB} .

Le travail est soit positif, nul ou négatif selon la direction de la force \vec{F} par rapport au déplacement. Si \vec{F} est perpendiculaire à AB le travail est nul, la force \vec{F} ne contribuant pas à déplacer l'objet. Lorsque la force s'oppose au déplacement, elle est **résistante** et le travail est négatif. Lorsque la force est **motrice** le travail est positif.

Le travail s'exprime en joules (symbole J).

1.2. Travail élémentaire

Dans le cas où la force \vec{F} varie au cours du déplacement qui peut être quelconque, il n'est plus possible d'utiliser l'expression précédente. En effet la force peut changer constamment d'orientation et d'intensité sur le déplacement considéré. Pour calculer le travail, on décompose alors le trajet AB en une succession de *déplacements élémentaires* $d\vec{l} = \overrightarrow{MM'}$, infiniment petits et donc rectilignes (figure 4.2). Sur l'un quelconque de ces trajets élémentaires, le vecteur force \vec{F} peut être considéré comme constant et la définition précédente (paragraphe 1.1.) peut s'appliquer. L'expression du *travail élémentaire* sur un tel déplacement élémentaire peut donc s'écrire :

$$dW_{M \rightarrow M'}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Nous utiliserons par la suite indifféremment l'appellation de *travail élémentaire* du vecteur force ou de *circulation élémentaire* du vecteur force.

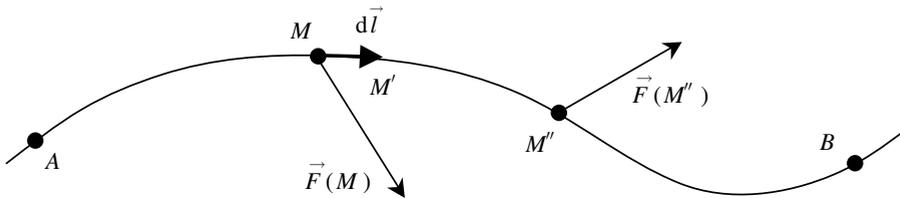


Figure 4.2 • Force variable sur le déplacement AB quelconque. Sur le déplacement élémentaire, la force est considérée comme constante car le déplacement est infiniment petit et la force n'a pas le temps de varier.

1.3. Force variable sur un déplacement quelconque

Pour obtenir le travail total de la force sur le déplacement total AB , il suffit d'additionner les travaux élémentaires quand on passe du point A au point B . La sommation est continue, ce qui conduit à :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}(M) \cdot d\vec{l}$$

Le travail d'une force sur un déplacement AB correspond à la **circulation** \mathcal{C} du vecteur force sur ce trajet.

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}(M) \cdot d\vec{l} = \mathcal{C}_{\vec{F}_{A \rightarrow B}}$$

Théorème

Le travail d'une force au cours d'un déplacement AB est égal à la circulation du vecteur force sur ce déplacement.

2. EXEMPLES DE CALCUL DU TRAVAIL**2.1. Travail d'une force constante : poids d'un corps.**

Dans le cas où le vecteur force reste constant (en norme, direction et sens) au cours du déplacement de son point d'application comme l'indique la figure 4.3, l'expression du travail de cette force se simplifie. Il est en effet possible de sortir ce vecteur de l'intégrale, ce qui conduit à :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \vec{F} \cdot \int_A^B d\vec{l} = \vec{F} \cdot \vec{AB}$$

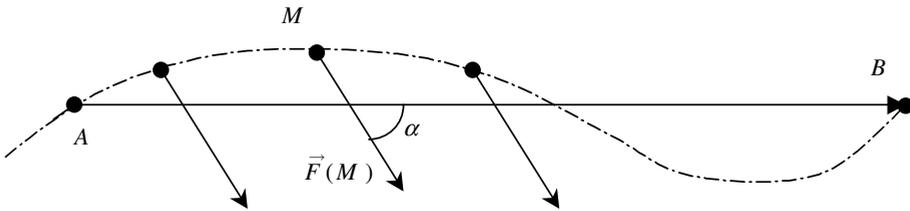


Figure 4.3 • Déplacement d'une force constante.

On constate alors que le travail de cette force ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de la position initiale (A) et finale (B).

$$F = cste \implies W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB}$$

Encart 4.1. Travail du poids d'un corps

Un exemple classique de ce type de situation concerne le travail du poids d'un corps. Considérons une masse m se déplaçant d'un point A d'altitude z_A à un point B d'altitude z_B et calculons le travail du poids de ce corps au cours de ce déplacement (voir figure 4.4). Le déplacement de A à B est supposé quelconque c'est-à-dire que le chemin qui mène de A à B peut prendre différentes trajectoires. Le poids est une force constante en norme et en direction (à la condition de rester dans une région de l'espace pas trop étendue, voir chapitre 3).

On obtient donc l'expression suivante du travail du poids :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = \int_A^B \vec{P}(M) \cdot d\vec{l} = \vec{P} \cdot \vec{AB} = mg(z_A - z_B)$$

On constate que ce travail ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de la différence d'altitude. Il est positif (donc moteur) si l'altitude finale est plus petite que l'altitude initiale et négatif (donc résistant) dans le cas contraire.

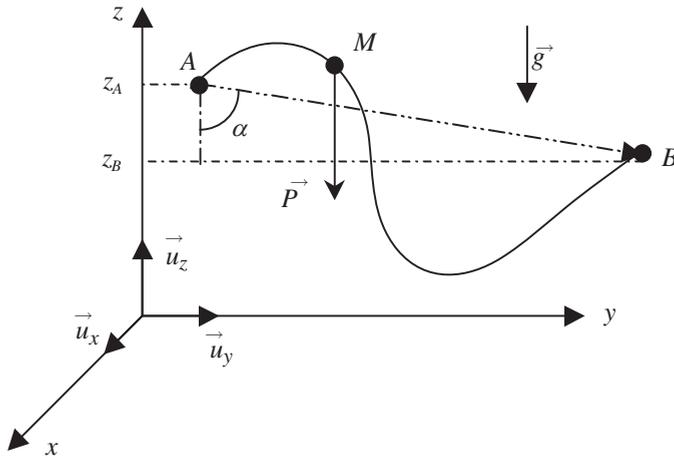


Figure 4.4 • Travail du poids d'un corps.

Ce résultat peut être obtenu en utilisant les coordonnées des points A et B et des composantes du vecteur \vec{g} dans un repère cartésien (O, x, y, z) . En orientant l'axe Oz vers le haut (voir figure 4.4) nous pouvons écrire :

$$\vec{P} = m \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

soit :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \vec{AB} = mg(z_A - z_B)$$

Enfin, ce résultat peut se retrouver en partant de l'expression du travail élémentaire du poids. Dans le repère cartésien (O, x, y, z) , on peut écrire :

$$dW_{\vec{P}} = \vec{P} \cdot d\vec{l} = -mg \vec{u}_z \cdot (dx \vec{u}_x + dz \vec{u}_z) = -mg dz$$

Il en résulte que pour aller de A en B , le travail du poids est donné par :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = mg(z_A - z_B) \quad (4.1)$$

On peut remarquer que le travail élémentaire correspond à l'opposé de la différentielle d'une fonction qui serait $mgz + \text{constante}$. Nous y reviendrons par la suite.

2.2. Travail d'une force élastique

Considérons un ressort de raideur k , de longueur au repos l_0 , au bout duquel est accrochée une masse m comme l'indique la figure 4.5. Le ressort et la masse sont sur un plan horizontal et nous nous intéressons uniquement à la tension du ressort.

La force élastique \vec{T} , c'est-à-dire la force de tension du ressort, est une force qui varie avec l'état d'étirement du ressort k . Ce n'est donc pas une force constante au cours du déplacement. Pour calculer le travail de cette force il nous faut calculer le travail élémentaire de

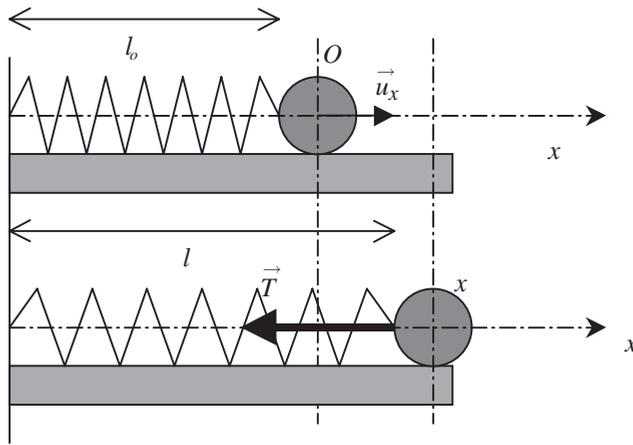


Figure 4.5 • Illustration de la force de tension d'un ressort.

cette force sur un déplacement infiniment petit sur lequel nous considérerons que la force est constante.

Avec les conventions d'orientation des vecteurs de la figure 4.5, la tension s'exprime de la façon suivante :

$$\vec{T} = -k\Delta l \vec{u}_x = -k(l - l_0) \vec{u}_x = -kx \vec{u}_x$$

Le travail élémentaire de la force élastique \vec{T} , lorsque la masse passe d'une position x à une position $x + dx$, est donc donné par :

$$dW_{x \rightarrow x+dx}(\vec{T}) = \vec{T} \cdot d\vec{l} = -kx \vec{u}_x \cdot dx \vec{u}_x = -kx dx = -d\left(\frac{1}{2}kx^2\right) \quad (4.2)$$

Lorsque le point d'application passe d'une position x_1 à une position x_2 , le travail de la force élastique est donc :

$$W_{x_1 \rightarrow x_2}(\vec{T}) = \int_{x_1}^{x_2} \vec{T} \cdot d\vec{l} = \int_{x_1}^{x_2} -kx dx = \frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

Nous remarquons que le travail de cette force ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de la position initiale et finale du ressort. Le travail élémentaire correspond là aussi à l'opposé de la différentielle d'une fonction qui est $\frac{1}{2}kx^2 + \text{cste}$.

2.3. Travail de la force de Lorentz

Considérons une particule de charge q se déplaçant à la vitesse \vec{v} dans un champ magnétique \vec{B} . La force magnétique subie par la particule est la force de Lorentz donnée par :

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Le travail élémentaire de cette force, au cours d'un déplacement sur sa trajectoire, est donné par :

$$dW = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = 0$$

Il est toujours nul car le déplacement élémentaire de la particule est toujours perpendiculaire à la force \vec{F} . On peut donc conclure que la force de Lorentz ne travaille pas sur sa trajectoire.

3. PUISSANCE D'UNE FORCE

En introduisant la définition du travail élémentaire d'une force effectué entre les instant t et $t + dt$, il est possible de définir une puissance instantanée $\mathcal{P}(t)$ par :

$$\mathcal{P}(t) = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Cette grandeur s'exprime dans le système international d'unités en Watts en utilisant le symbole W.

Il est donc clair que le travail élémentaire peut aussi s'exprimer à partir de la puissance de la force et s'écrire

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \mathcal{P}(t) dt$$

ce qui conduit à l'expression suivante du travail d'une force

$$W_{1 \rightarrow 2}(\vec{F}) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(t) dt$$

4. ÉNERGIE

4.1. Énergie cinétique : théorème

Considérons un point matériel G se déplaçant, dans un référentiel galiléen R , sous l'action d'un ensemble de forces extérieures. Le mouvement de ce point est régi par le principe fondamentale de la dynamique, soit :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \vec{a}_{G/R} = m \frac{d\vec{v}_{G/R}}{dt}$$

Au cours d'un déplacement élémentaire $d\vec{l}$, la somme des travaux élémentaires des forces extérieures est donnée par :

$$\sum \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{l} = m \frac{d\vec{v}_G}{dt} \cdot d\vec{l} = m \vec{v}_G \cdot d\vec{v}_G$$

Par intégration de cette relation sur un trajet AB nous obtenons :

$$m \int_{v_A}^{v_B} \vec{v} \cdot d\vec{v} = \sum \int_A^B \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{l} = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext})$$

soit

$$\frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2) = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext}) \quad (4.3)$$

D'après l'équation 4.3, on voit qu'il est intéressant de définir une fonction d'état, ne dépendant que de la vitesse du point, appelée **énergie cinétique**.

Pour un point matériel de masse m se déplaçant à la vitesse v dans un référentiel R galiléen, nous poserons que l'énergie cinétique de ce point est $E_c = \frac{1}{2}mv^2$.

Dans ces conditions, nous observons que la variation d'énergie cinétique du point matériel entre deux positions est égale au travail de toutes les forces appliquées sur ce point, ce qui constitue un théorème appelé **théorème de l'énergie cinétique**.

Théorème de l'énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel soumis à un ensemble de forces extérieures entre une position A et une position B est égale à la somme des travaux de ces forces entre ces deux points.

$$E_c(B) - E_c(A) = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext}) \quad (4.4)$$

4.2. Énergie potentielle

a) Forces conservatives

Le théorème de l'énergie cinétique permet de déterminer l'état de la vitesse d'un point matériel. Il repose sur la détermination du travail de toutes les forces extérieures appliquées à ce point. Il est possible de définir une seconde fonction d'état appelée énergie potentielle du système. Pour ce faire, il importe de distinguer deux types de forces extérieures :

- *Les forces conservatives* qui sont les forces dont le travail ne dépend pas du chemin suivi mais que du point de départ et du point d'arrivée. Exemples : travail du poids, travail de la tension du ressort, travail d'une force constante.
- *Les forces non conservatives* dont le travail dépend du chemin suivi, comme par exemple les forces de frottement. Si l'on considère une force de frottement solide $\vec{F} = -K d\vec{l} / dl$ de norme constante K , celle-ci s'oppose constamment au déplacement. On aura donc :

$$dW = -K \frac{d\vec{l}}{dl} \cdot d\vec{l} = -K dl$$

ce qui conduit à

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = -K \int_A^B dl = -K \widehat{AB}$$

Ce travail de la force de frottement solide dépend donc du chemin suivi.

b) Énergie potentielle

Nous nous plaçons ici purement dans le cadre de la mécanique. Pour cette raison, nous appréhendons l'énergie potentielle de façon simple et moins ambitieuse que ce que nous pourrions faire dans le cadre plus général de la thermodynamique¹.

Par définition, le travail des forces conservatives ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de l'état initial et final. Le travail de ces forces peut donc s'exprimer à partir d'une **fonction d'état** appelée **énergie potentielle** E_P . Pour des raisons qui apparaîtront clairement au paragraphe 4.3., nous conviendrons que la variation d'énergie potentielle est représentée par l'opposé du travail des forces conservatives soit :

$$E_P(B) - E_P(A) = -W_{A \rightarrow B} \left(\vec{F}_{ext}^C \right)$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\Delta E_P = -W_{A \rightarrow B} \left(\vec{F}_{ext}^C \right)$$

Cette relation conduit, en explicitant le travail, à la *définition intégrale* de l'énergie potentielle :

$$E_P(B) - E_P(A) = - \int_A^B \vec{F}_{ext}^C \cdot d\vec{l} \quad (4.5)$$

De l'expression intégrale (4.5), il est possible de déduire la *définition différentielle* de l'énergie potentielle en faisant apparaître le travail élémentaire de la force conservative soit :

$$dE_P = -\vec{F}_{ext}^C \cdot d\vec{l}$$

Finalement la différentielle de l'énergie potentielle peut s'exprimer en fonction du gradient de E_P (annexe 1, 7.) :

$$dE_P = \overrightarrow{\text{grad}} E_P \cdot d\vec{l}$$

On aboutit à la *définition locale* de l'énergie potentielle :

$$\overrightarrow{\text{grad}} E_P = -\vec{F}_{ext}^C \quad (4.6)$$

Alors que les deux autres définitions présentent des appellations évidentes, il est certainement utile de commenter la terminologie de cette dernière définition. Le terme *local* signifie que l'équation (4.6) est valide en un point particulier de l'espace et que d'un point à un autre de l'espace le résultat de l'opérateur gradient appliqué à la fonction scalaire énergie potentielle peut être variable.

Les trois formes précédentes sont équivalentes entre elles comme l'indique la figure récapitulative 4.6.

1. À lire à ce sujet : *Le principe de conservation de l'énergie et le théorème de l'énergie mécanique* par E. Saltiel, B.U.P., 1997, n° 794, 957-972.

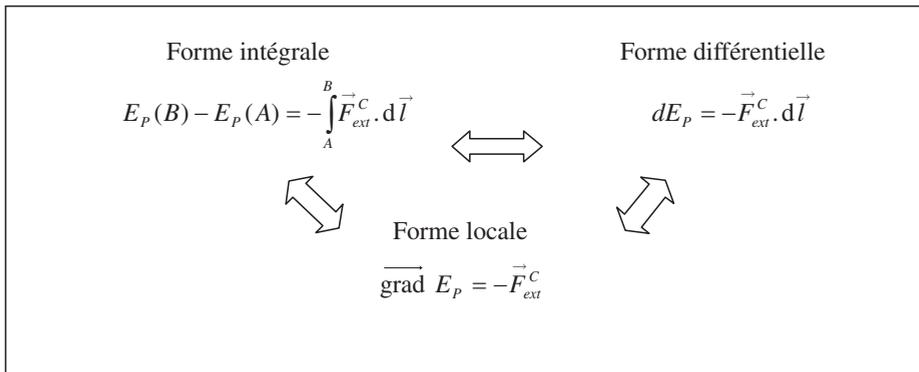


Figure 4.6 • Représentation schématique des trois formes possibles de l'énergie potentielle.

c) Exemples d'énergie potentielle

Énergie potentielle de pesanteur. En reprenant les résultats obtenus à l'équation (4.1), nous avons avec l'axe Oz , axe vertical ascendant :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = mg(z_A - z_B) = E_{P_p}(A) - E_{P_p}(B)$$

Par comparaison avec la relation intégrale, il apparaît clairement que nous pouvons définir la fonction **énergie potentielle de pesanteur** $E_{P_p}(z)$ par

$$E_{P_p}(z) = mgz + C$$

Cette fonction est définie à une constante C près qu'il convient de fixer. La détermination de cette constante se fait par le choix arbitraire du zéro de la fonction énergie potentielle. En général, l'énergie potentielle de pesanteur est prise nulle en $z = 0$ ce qui impose $C = 0$. Ce choix entraîne que

$$E_{P_p}(z) = mgz$$

Remarques

- Le calcul de l'énergie potentielle de pesanteur se fait tout aussi simplement à partir de la relation différentielle :

$$dW(\vec{P}) = \vec{P} \cdot d\vec{l} = -mg\vec{u}_z \cdot (dx\vec{u}_x + dz\vec{u}_z) = -mg dz = -dE_{P_p}$$

Nous obtenons immédiatement l'expression de la fonction énergie potentielle $E_{P_p} = mgz$, en choisissant la constante nulle comme précédemment ;

- Si l'axe Oz est orienté vers le bas (axe vertical descendant) nous obtenons :

$$dW_p = \vec{P} \cdot d\vec{l} = -mg\vec{u}_z \cdot (dx\vec{u}_x + dz\vec{u}_z) = -mg dz$$

et l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur devient :

$$E_{p_p} = -mgz$$

Il faut donc bien préciser l'orientation choisie pour l'axe Oz pour utiliser la bonne expression de l'énergie potentielle. Un bon moyen de vérifier si l'expression utilisée est correcte consiste à vérifier que l'énergie potentielle de pesanteur augmente toujours avec l'altitude.

Énergie potentielle élastique. En reprenant les résultats obtenus à l'équation (4.2), nous voyons que :

$$dW_{x \rightarrow x+dx}(\vec{T}) = \vec{T} \cdot d\vec{l} = -kx dx = -d\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -d(E_{Pe})$$

ou encore :

$$W_{x_1 \rightarrow x_2}(\vec{T}) = -k \int_{x_1}^{x_2} x dx = \frac{1}{2}k(x_1^2 - x_2^2)$$

L'énergie potentielle élastique E_{Pe} correspond donc à :

$$E_{Pe} = \frac{1}{2}kx^2 + C$$

Il est logique de choisir l'énergie potentielle nulle pour une déformation nulle. La constante C est alors nulle et nous obtenons finalement

$$E_{Pe} = \frac{1}{2}kx^2$$

Attention. Dans cette expression x représente l'allongement (ou la compression) du ressort (voir figure 4.5). Un choix différent de l'origine des abscisses conduirait à une expression différente de cette énergie potentielle. Il vaut donc mieux retenir le résultat en introduisant l'allongement du ressort :

$$E_{Pe} = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$$

Énergie potentielle et force. Nous avons vu que l'énergie potentielle E_p est reliée localement à la force \vec{F} qui en dérive par la relation :

$$\overrightarrow{\text{grad}} E_p = -\vec{F}$$

Cette relation est utile pour revenir à l'expression de la force quand on connaît l'expression de E_p . Ainsi, pour l'énergie potentielle de pesanteur, il vient pour un axe vertical ascendant :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_{Pp} = -\frac{dE_{Pp}}{dz} \vec{u}_z = -mg \vec{u}_z$$

ce qui montre bien que le poids d'un corps dérive de la fonction énergie potentielle de pesanteur.

De même pour l'énergie potentielle élastique, nous voyons que la force élastique dérive de la fonction énergie potentielle élastique :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_{Pe} = -\frac{dE_{Pe}}{dx} \vec{u}_x = -\frac{d\left(\frac{1}{2}kx^2\right)}{dx} \vec{u}_x = -kx \vec{u}_x$$

4.3. Énergie mécanique

Nous introduisons maintenant une nouvelle fonction particulièrement utile dans tous les problèmes de mécanique, l'**énergie mécanique** d'un système. Pour définir cette fonction, nous partons du théorème de l'énergie cinétique dans lequel nous faisons apparaître le travail des forces conservatives et celui des forces non conservatives, soit :

$$E_c(B) - E_c(A) = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext}^C) + \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext}^{N.C.})$$

En appelant E_p l'énergie potentielle totale, somme des énergies potentielles dont dérive chaque force conservative, on peut écrire :

$$[E_c(B) - E_c(A)] = [E_p(A) - E_p(B)] + \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext}^{N.C.})$$

ce qui, en faisant passer l'énergie potentielle dans le membre de gauche, conduit à :

$$[E_c(B) - E_c(A)] + [E_p(B) - E_p(A)] = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext}^{N.C.})$$

Si l'on regroupe dans le premier membre les fonctions qui ne dépendent que de B et de A , il vient :

$$[E_c(B) + E_p(B)] - [E_c(A) + E_p(A)] = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext}^{N.C.})$$

Il est possible d'introduire une nouvelle fonction d'état appelée énergie mécanique E du système en posant $E = E_c + E_p$.

L'introduction de cette fonction permet de présenter de façon très simple le bilan énergétique d'un système par la relation suivante :

$$(E_B - E_A) = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext}^{N.C.})$$

ce qui conduit au théorème de l'énergie mécanique :

Théorème de l'énergie mécanique

La variation d'énergie mécanique d'un système entre deux points A et B est égale la somme des travaux des forces extérieures non-conservatives appliquées à ce système.

Les forces non conservatives étant des forces résistantes, l'énergie mécanique d'un système ne peut que diminuer au cours du temps.

Cependant, lorsqu'un système est mécaniquement isolé, (c'est-à-dire pour un système qui ne subit aucune force extérieure non conservative), l'énergie mécanique se conserve. L'énergie mécanique ne dépend plus du point considéré.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Système mécaniquement} \\ \text{isolé} \end{array} \right\} \iff E = cste$$

5. ÉTATS LIÉS D'UN SYSTÈME MÉCANIQUEMENT ISOLÉ

5.1. Évolution d'un système

Lorsqu'un système est mécaniquement isolé son énergie mécanique se conserve. On a donc pour un tel système :

$$E = E_C + E_P = \text{cste}$$

En écrivant que l'énergie cinétique est une grandeur nécessairement positive, nous obtenons une condition restreignant les états énergétiques possibles du système ; cette condition de restriction définit ce que l'on appelle les **états liés** du système. Ces états sont définis par :

$$E_C > 0 \Rightarrow E - E_P > 0$$

Pour une masse accrochée à une ressort, les états liés du système sont définis par :

$$E - \frac{1}{2}kx^2 > 0 \Rightarrow -\sqrt{\frac{2E}{k}} < x < \sqrt{\frac{2E}{k}}$$

Les valeurs de x en dehors de cet intervalle sont inaccessibles au système qui est dit enfermé dans un puits de potentiel à cause de la forme prise par la fonction énergie potentielle.

Le système ne peut évoluer qu'entre les valeurs de x comprises entre $-x_m$ et x_m . Le système est pris dans un **puits de potentiel** comme l'indique la figure 4.7.

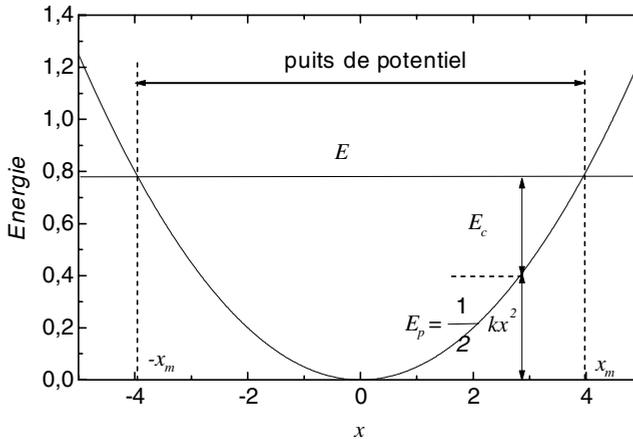


Figure 4.7 • Graphe des énergies en fonction de l'allongement pour un ressort.

5.2. Stabilité d'un système

a) Définition de la stabilité

Pour un système soumis uniquement à une force conservative, il est intéressant de savoir s'il existe ou pas des états d'équilibre. La forme locale de l'énergie potentielle permet d'écrire que :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_P$$

Dans le cas où l'énergie potentielle ne dépend que d'une variable x , cela revient à dire que :

$$\vec{F} = -\frac{dE_P}{dx}\vec{u}_x$$

La condition d'équilibre se traduisant par $\vec{F} = 0$ peut donc s'écrire aussi

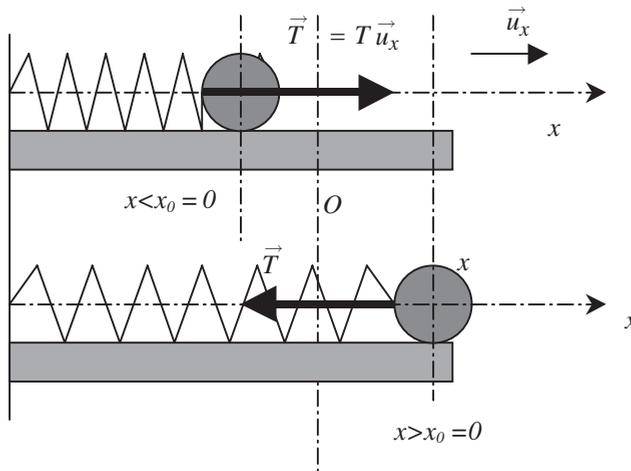
$$\frac{dE_P}{dx} = 0$$

Une position d'équilibre se traduit donc par un extremum de la fonction énergie potentielle.

Un équilibre est dit **stable** si, à la suite d'une perturbation qui a éloigné le système de cette position, celui-ci y retourne spontanément. Dans le cas contraire l'équilibre est dit **instable**.

b) Conditions de stabilité

Reprenons le cas où l'énergie potentielle ne dépend que d'une variable x et supposons que pour x_0 la dérivée de cette fonction est nulle. Pour une perturbation amenant le système à $x < x_0$, la valeur algébrique de la force doit être positive pour ramener le système vers x_0 soit $\frac{dE_P}{dx}(x) < 0$. Dans le cas contraire $x > x_0$, la force doit être négative et donc $\frac{dE_P}{dx}(x) > 0$ (voir l'exemple de la masse accrochée à un ressort de la figure 4.8). La fonction E_P décroît avant x_0 et est croissante après x_0 . Elle présente donc un minimum pour $x = x_0$.



Position d'équilibre : $x_0 = 0$

Figure 4.8 • En dehors de la position d'équilibre $x_0 = 0$, la valeur algébrique T de la tension est positive pour $x < x_0$ et négative pour $x > x_0$. La force de tension d'un ressort est une force de rappel.

Dans ce cas, la fonction $\frac{dE_P}{dx}(x)$ est une fonction croissante qui s'annule pour $x = x_0$. La condition de stabilité, c'est-à-dire E_P minimale, peut donc se traduire par $\frac{d^2E_P}{dx^2}(x) > 0$ au voisinage de x_0 et donc pour $x = x_0$. Dans le cas contraire, la position sera une position d'équilibre instable. Nous concluons donc sur le schéma suivant.

Équilibre stable pour $x = x_0 \iff E_p(x_0)$ minimale

\Updownarrow

$$\left. \frac{dE_p}{dx} \right)_{x_0} = 0 \text{ et } \left. \frac{d^2 E_p}{dx^2} \right)_{x_0} > 0$$

Équilibre instable pour $x = x_0 \iff E_p(x_0)$ maximale

\Updownarrow

$$\left. \frac{dE_p}{dx} \right)_{x_0} = 0 \text{ et } \left. \frac{d^2 E_p}{dx^2} \right)_{x_0} < 0$$

Un système, livré à lui-même, évolue donc spontanément vers un état d'équilibre qui correspond à une position pour laquelle l'énergie potentielle est minimale.

Remarque. On peut écrire que :

$$dE_p = \overrightarrow{\text{grad}} E_p \cdot d\vec{l}$$

avec $d\vec{l}$ vecteur déplacement élémentaire quelconque.

Pour un déplacement quelconque $d\vec{l}$ sur une surface d'énergie potentielle constante, $dE_p = 0$. Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} E_p$ est donc perpendiculaire aux surfaces d'égale énergie potentielle (voir annexe 1, 7.2.).

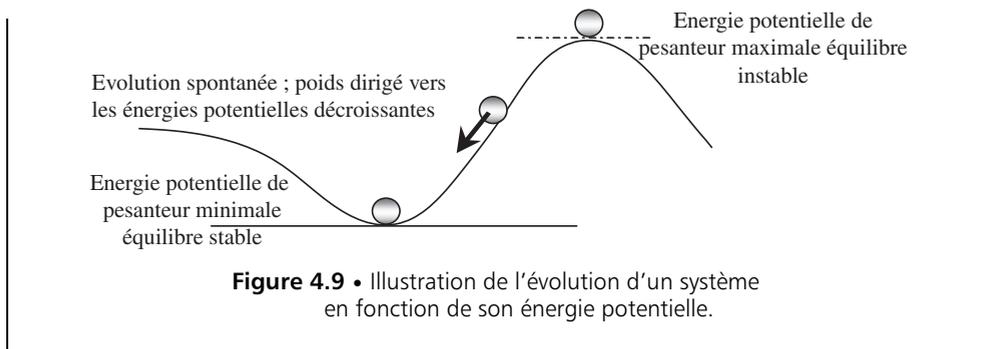
Pour un déplacement perpendiculaire aux surfaces équipotentielles, vers les énergies potentielles croissantes, $dE_p > 0$ et donc $\overrightarrow{\text{grad}} E_p$ a la même direction que le déplacement. Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} E_p$ est donc dirigé vers les énergies potentielles croissantes.

La force $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$ est donc toujours dirigée vers les énergies potentielles décroissantes.

Un système livré à lui-même évolue spontanément vers les énergies potentielles décroissantes.

Encart 4.2. Évolution d'une bille dans le champs de pesanteur terrestre

Ce que nous venons de formuler peut s'illustrer simplement par l'exemple suivant. Considérons une bille de masse m pouvant se déplacer sur un sol constitué d'un creux et d'une bosse comme l'indique la figure 4.9. L'énergie potentielle de pesanteur de cette masse ne peut varier qu'entre une valeur maximale (sommet de la bosse) et une valeur minimale (fond du creux).



À RETENIR

► Définition du travail d'une force

Le travail d'une force au cours d'un déplacement AB est égal à la circulation du vecteur force sur ce déplacement.

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}(M) \cdot d\vec{l} = C_{\vec{F}_{A \rightarrow B}}$$

► Définition de la puissance d'une force

La puissance instantanée $\mathcal{P}(t)$ d'une force \vec{F} est définie par :

$$\mathcal{P}(t) = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

► Théorème de l'énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique $\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$ d'un point matériel soumis à un ensemble de forces extérieures entre une position A et une position B est égale à la somme des travaux de ces forces entre ces deux points.

$$E_c(B) - E_c(A) = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext})$$

► Définition de la variation d'énergie potentielle

La variation d'énergie potentielle associée à une force conservative \vec{F} (force dont le travail ne dépend pas du chemin suivi) qui travaille entre deux points A et B est égale à l'opposé du travail de cette force conservative.

$$E_p(B) - E_p(A) = -W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext}^C)$$

Les trois définitions suivantes sont à connaître :

- Définition intégrale

$$E_P(B) - E_P(A) = - \int_A^B \vec{F}_{ext}^C \cdot d\vec{l}$$

- Définition différentielle

$$dE_P = - \vec{F}_{ext}^C \cdot d\vec{l}$$

- Définition locale

$$\overrightarrow{\text{grad}} E_P = - \vec{F}_{ext}^C$$

► L'application des définitions ci-dessus permet de montrer que :

- L'énergie potentielle de pesanteur (avec g uniforme) est

$$E_P = mgz \quad \text{si l'axe des } z \text{ est vertical ascendant}$$

$$E_P = -mgz \quad \text{si l'axe des } z \text{ est vertical descendant.}$$

- L'énergie potentielle élastique est

$$E_P = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$$

► **Théorème de l'énergie mécanique**

La variation d'énergie mécanique d'un système entre deux points A et B est égale à la somme des travaux des forces extérieures non-conservatives appliquées à ce système.

$$(E_B - E_A) = \sum W_{A \rightarrow B} \left(\vec{F}_{ext}^{N.C.} \right)$$

avec l'énergie mécanique E du système définie par :

$$E = E_c + E_P$$

► **Conditions de stabilité d'un équilibre**

Équilibre stable pour $x = x_0 \iff E_p(x_0)$ minimale



$$\left. \frac{dE_P}{dx} \right)_{x_0} = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{d^2 E_P}{dx^2} \right)_{x_0} > 0$$

EXERCICES D'APPLICATION AVEC SOLUTION DÉTAILLÉE

Énergie et chute libre

Un skieur décide de faire du hors piste (*voir figure*). Il se retrouve sur un passage en forme d'arc de cercle AO de rayon $CA = CO = R$ et aboutissant sur un fossé de largeur l . Le point O se trouve à une hauteur h par rapport à l'autre bord D du fossé. Le skieur estimant qu'il aura assez d'élan en O pour passer le fossé, part du point A sans vitesse initiale ($V_A = 0$).

Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre considéré galiléen et le skieur est assimilé à un point matériel M de masse m . L'origine du repère choisi est en O , (*voir figure 4.10*)

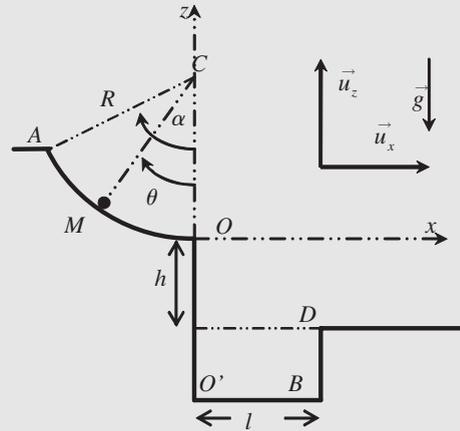


Figure 4.10

Données : $m = 60 \text{ kg}$; $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$; $R = 40 \text{ m}$; $h = 3,2 \text{ m}$; $l = 7 \text{ m}$;
 $\alpha = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$;

I. Descente sur l'arc AO

1) On suppose que les frottements sont négligeables. Faire un bilan des forces appliquées à M (faire un schéma). Le système est-il conservatif? Que peut-on dire alors de l'énergie mécanique?

2) Exprimer l'altitude z du point M en fonction de R et de l'angle $OCM = \theta$ (*voir figure*).

On choisit le point O comme origine des énergies potentielles de pesanteur $E_p(O) = 0$. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur $E_p(A)$ au point A (en A , $\theta(A) = \alpha$).

3) Exprimer l'énergie mécanique $E_m(A)$ en A et $E_m(O)$ en O et en déduire l'expression de la vitesse $V(O) = V_o$. Faire l'application numérique.

4) En fait il existe des frottements solide et la vitesse V_o en O est plus faible que prévue. On appelle f la valeur de la force de frottement constante sur AO qui s'oppose au mouvement.

- a) Exprimer le travail W_{AO} de cette force f entre A et O .
- b) Que peut-on dire de la variation d'énergie mécanique $\Delta E_m = E_m(O) - E_m(A)$?
- c) En déduire une expression de f en fonction de m , g , R , V_o et α .
- d) *Application numérique* : On trouve $V_o = 10 \text{ m.s}^{-1}$, calculer f .

II. Chute libre

- 1) Donner l'expression du vecteur vitesse \vec{V}_o au point O dans la base (\vec{u}_x, \vec{u}_z) .
- 2) Faire l'étude, dans le repère (O, x, z) , de la masse m en chute libre (on néglige tout frottement). En déduire l'équation de la trajectoire $z = f(x)$ et faire l'application numérique avec $V_o = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
- 3) En déduire si le skieur retombe de l'autre côté du fossé ou pas ?

Solution

I. Descente sur l'arc AO

1) Le poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_x$

La réaction du sol : pas de frottement donc la réaction est normale : $\vec{N} = N\vec{u}_x$.

Le système est conservatif (pas de frottement et le poids force conservative). On a alors conservation de l'énergie mécanique :

$$E_m = \text{constante.}$$

2) $z = R - R \cos \theta = R(1 - \cos \theta)$

$E_p(A) - E_p(O) = mg(z_A - z_o)$. donc :

$E_p(A) = mgz_A = mgR(1 - \cos \alpha) = 12\,000 \text{ J}$

3) $E_m(A) = E_p(A) + E_c(A) = E_p(A) = mgR(1 - \cos \alpha)$

$$E_m(O) = E_p(O) + E_c(O) = E_c(O) = \frac{1}{2}mgV_o^2$$

$$E_m(A) = E_m(O) \Rightarrow mgR(1 - \cos \alpha) = \frac{1}{2}mV_o^2 \Rightarrow V_o = \sqrt{2gR(1 - \cos \alpha)} = 20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

4) a) $W_{AO} = \int_A^O \vec{f} \cdot d\vec{l} = \int_A^O -f dl = -f \int_A^O dl = -f \widehat{L}_{AO} = -fR\alpha = -fR\frac{\pi}{3}$

(la force de frottement s'oppose au déplacement et garde un module constant)

b) Théorème de l'énergie mécanique : la variation d'énergie mécanique entre 2 positions est égale au travail des forces non conservatives entre ces 2 positions :

$$\Delta E_m = E_m(O) - E_m(A) = W_{AO} \Rightarrow \frac{1}{2}mV_o^2 - mgR(1 - \cos \alpha) = -fR\alpha$$

c) $f = \frac{m}{2\alpha R}(2gR(1 - \cos \alpha) - V_o^2) = \frac{2\,700}{4\pi} = 214,86 \text{ N}$

d) $f = 214,9 \text{ N}$

II. Chute libre

1) $\vec{V}_o = V_o\vec{u}_x$

2) La masse m n'est soumise alors qu'à son poids (chute libre). En appliquant le principe fondamental de la dynamique :

$$\vec{P} = -mg\vec{u}_z = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = -g\vec{u}_z \Rightarrow \ddot{z} = -g$$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{z} = -g \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} v_{ox} = V_o \\ v_{oy} = 0 \\ v_{oz} = -gt + v_{oz} = -gt \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{OM} = \begin{bmatrix} x = V_o t + x_o = V_o t \\ y = y_o = 0 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + z_o = -\frac{1}{2}gt^2 \end{bmatrix}$$

On a donc : $\begin{cases} x = V_o t \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{x}{V_o} \\ z = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{V_o^2} \end{cases} \Rightarrow z = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{V_o^2} = -\frac{x^2}{20}$

3) Pour $z = -h$ on a : $h = \frac{1}{2}g\frac{x^2}{V_o^2} = \frac{x^2}{20} \Rightarrow x = \sqrt{20h} = \sqrt{64} = 8 \text{ m} > 7 \text{ m}$. Le skieur traverse donc le fossé.

Étude d'une bille dans une gouttière

Une bille, assimilée à un point matériel M de masse m , peut glisser *sans frottement* sur le fond d'une gouttière demi cylindrique de rayon R . Elle est reliée à une extrémité d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_o , l'autre extrémité étant fixée sur un support situé à la distance l_o du rebord (voir schéma 4.11). La bille reste toujours en contact avec la gouttière.

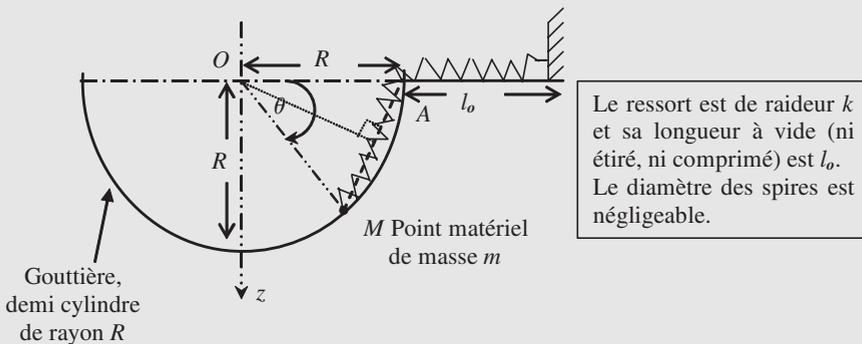


Figure 4.11

Le point M est repéré par l'angle θ que fait OM avec l'horizontale OA .

Rappel de quelques formules trigonométriques :

$$\begin{cases} \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \\ \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a \\ \sin 2a = 2 \sin a \cos a \end{cases}$$

On rappelle que la somme des trois angles d'un triangle est égale à π

Les parties I. et II. sont indépendantes

I. Équilibre de la bille (étude des forces)

- 1) Faire un bilan des forces agissant sur la masse et les représenter sur un schéma.
- 2) Écrire la condition d'équilibre

- 3) En projetant convenablement cette condition,
- Déduire une relation entre la tension T du ressort, le poids P de la masse et l'angle $\theta = \theta_e$ (position à l'équilibre)
 - Déduire une relation entre la réaction R_N de la gouttière, la tension T du ressort, le poids P de la masse et l'angle θ_e .
- 4) Calculer l'allongement du ressort et montrer que la tension T du ressort s'écrit :

$$T = 2kR \sin \frac{\theta_e}{2}$$

- 5) À partir des réponses 3)a) et 4), exprimer « $\tan \theta_e$ » en fonction de m , g , k et R .
- 6) *A. N.* : Calculer θ_e si $m = 0,1 \text{ kg}$, $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$, $k = 10 \text{ N.m}^{-1}$ et $R = 10 \text{ cm}$

II. Équilibre de la bille (étude de l'énergie potentielle)

La masse m se trouve dans une position quelconque définie par l'angle θ .

- Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur E_{pp} de la masse en fonction de l'angle θ . On prendra l'origine des énergies potentielles au niveau du point O .
- Exprimer l'énergie potentielle élastique E_{pe} en fonction de l'angle θ .
- Montrer alors que l'énergie potentielle totale E_P du système s'écrit :

$$E_P(\theta) = kR^2(1 - \cos \theta) - mgR \sin \theta$$

- À quelle condition sur l'énergie potentielle E_P le système est-il en équilibre ? déduire l'expression de $\tan \theta_e$ pour lequel la masse est en équilibre et vérifier le résultat obtenu à la question I.5).

Solution

I. Équilibre de la bille (étude des forces)



b) Suivant le rayon OM :

$$T \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_e}{2} \right) + R_N - mg \sin \theta_e = 0 \Rightarrow T \sin \frac{\theta_e}{2} + R_N - mg \sin \theta_e = 0$$

4) Triangle OMA isocèle. $\frac{AM}{2} = R \sin \frac{\theta_e}{2} \Rightarrow \Delta l = 2R \sin \frac{\theta_e}{2} \Rightarrow T = 2kR \sin \frac{\theta_e}{2}$

5) $T \cos \frac{\theta_e}{2} = 2kR \sin \frac{\theta_e}{2} \cos \frac{\theta_e}{2} = mg \cos \theta_e \Rightarrow \tan \theta_e = \frac{mg}{kR} = \frac{1}{1} = 1$

6) $\tan \theta_e = 1 \Rightarrow \theta_e = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$

II. Équilibre de la bille (étude de l'énergie potentielle)

5) $E_{pp} = -mgR \sin \theta$

6) $E_{pe} = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}k \left(2R \sin \frac{\theta}{2} \right)^2 = 2kR^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = kR^2(1 - \cos \theta)$

7) $E_P(\theta) = kR^2(1 - \cos \theta) - mgR \sin \theta$

8) E_P doit être minimale. La dérivée est donc nulle pour $\theta = \theta_e$. L'équilibre est stable si la dérivée seconde est positive.

$$\frac{dE_P}{d\theta} = kR^2 \sin \theta - mgR \cos \theta = 0 \Rightarrow \tan \theta_e = \frac{mk}{kR} \text{ même résultat que pour I.5.}$$

$$\frac{d^2 E_P}{d\theta^2} = kR^2 \cos \theta_e + mgR \sin \theta_e > 0, \text{ l'équilibre est bien stable.}$$

Pendule pesant

On considère une masse m accrochée à une des extrémités M d'un fil de longueur l et de masse négligeable. L'autre extrémité O du fil est fixe dans le référentiel R terrestre considéré galiléen.

L'objectif de l'exercice est de calculer la valeur minimale de la vitesse V_A de la masse m au point A pour que celle-ci effectue un tour complet autour du point O , le fil restant constamment tendu.

On repère la masse M sur la boucle par l'angle θ que fait OM avec la verticale OA . On notera V_A et V_M la vitesse de M respectivement en A et en M .

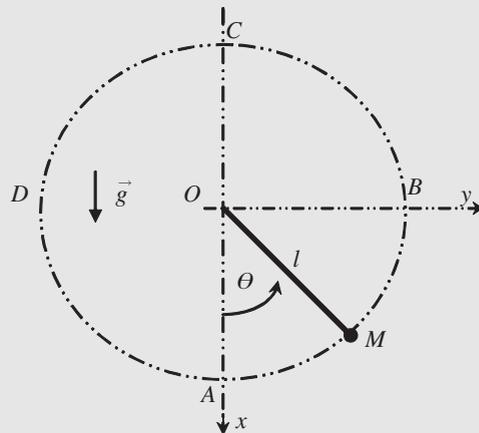


Figure 4.13

I. Étude énergétique

1) En prenant l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur au niveau du point A ($E_{PP}(A) = 0$), donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{PP}(M)$ en M .

- 2) En déduire l'expression de l'énergie mécanique totale $E_m(A)$ en A et $E_m(M)$ en M .
- 3) Le système est-il conservatif? En déduire une relation entre $E_m(A)$ et $E_m(M)$.
- 4) En déduire l'expression de V_M^2 en fonction de g , l , V_A et θ (relation n°1).

II. Cinématique

L'étude du mouvement de M sur le cercle ($ABCD$) se fait naturellement en coordonnées polaires ($r = l$, θ) et la base associée (\vec{u}_r , \vec{u}_θ)

- 1) Exprimer le vecteur vitesse \vec{V}_M en coordonnées polaires et en déduire la relation entre V_M , l et $\dot{\theta}$. Exprimer V_M^2 en fonction de l et $\dot{\theta}$ (relation n° 2)
- 2) Exprimer le vecteur accélération \vec{a}_M en coordonnées polaires. En déduire, en utilisant la relation n°2 précédente, l'expression de la composante radiale a_r (suivant \vec{u}_r) de l'accélération en fonction de V_M et l .

III. Dynamique

- 1) Faire l'étude dynamique de M sur la partie circulaire ($ABCD$). On appellera \vec{T} la tension du fil exercée sur la masse M .
- 2) En projetant le principe fondamental de la dynamique sur (\vec{u}_r , \vec{u}_θ), exprimer le rapport T/m de la réaction T sur la masse m (relation n° 3)
- 3) En utilisant les relations n° 1 et 3, exprimer la tension T du support en fonction de l , g , V_A et θ .
- 4) Dire que la masse fait un tour complet le fil restant tendu se traduit par :
Pour toute valeur de l'angle θ , la tension T existe : $\forall \theta, T(\theta) \geq 0$
 - a) Pour quelle valeur évidente de θ la réaction T est-elle minimale ?
 - b) En déduire la valeur minimale que doit avoir la vitesse V_A de la masse m au point A pour que celle-ci effectue un tour complet le fil restant tendu
 - c) Quelle est alors la vitesse V_C de la masse au point C .

Solution

I. Étude énergétique

$$1) E_{PP}(M) = mgh = mgl(1 - \cos \theta)$$

$$2) E(A) = E_{PP}(A) + E_C(A) = \frac{1}{2}mV_A^2$$

$$\begin{aligned} E(M) &= E_{PP}(M) + E_C(M) \\ &= \frac{1}{2}mV_M^2 + mgl(1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

3) Le système conservatif (Pas de frottement) donc : $E_m(A) = E_m(M)$.

$$4) V_M^2 = V_A^2 - 2gl(1 - \cos \theta) \quad (\text{relation n°1}).$$

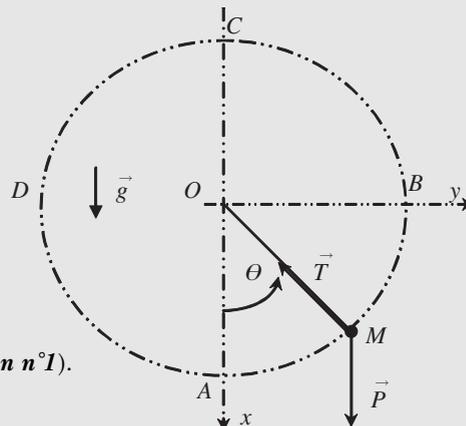


Figure 4.14

II. Cinématique

$$1) \vec{V}_M = \frac{d(r\vec{u}_r)}{dt} = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta \Rightarrow V_M = l\dot{\theta}$$

$$\text{donc : } V_M^2 = l^2\dot{\theta}^2 \quad (\text{relation n}^\circ 2)$$

$$2) \text{ Le vecteur accélération } \vec{a}_M = -l\dot{\theta}^2\vec{u}_r + l\ddot{\theta}\vec{u}_\theta \Rightarrow a_r = -l\dot{\theta}^2 = -\frac{V_M^2}{l}$$

III. Dynamique

1) Système la masse m , Référentiel terrestre galiléen,

$$\text{Forces : Poids } \vec{P} = m\vec{g} = mg(\cos\theta\vec{u}_r - \sin\theta\vec{u}_\theta) \text{ et } \vec{T} = -T\vec{u}_r.$$

$$\text{Principe fondamental de la dynamique : } \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

$$2) \text{ Suivant } \vec{u}_r : \quad mg\cos\theta - T = -m\frac{V_M^2}{l} \quad \text{et} \quad -mg\sin\theta = m\ddot{\theta}$$

$$\text{Donc : } \frac{T}{m} = g\cos\theta + \frac{V_M^2}{l} \quad (\text{relation n}^\circ 3)$$

$$3) \frac{T}{m} = g\cos\theta + \frac{V_M^2}{l} = g\cos\theta + \frac{V_A^2}{l} - 2g(1 - \cos\theta) = \frac{V_A^2}{l} - g(2 - 3\cos\theta) = \frac{T}{m}$$

$$4) \text{ Pour toute valeur de l'angle } \theta, \text{ la tension } T \text{ existe : } \forall\theta, \quad T(\theta) \geq 0$$

a) T minimale pour $\cos\theta$ minimal c'est à dire $\cos\theta = -1 \Rightarrow \theta = \pi$ (réponse évidente)

$$\text{b) } \forall\theta, \quad T(\theta) \geq 0 \Rightarrow \forall\theta, \quad \frac{V_A^2}{l} - g(2 - 3\cos\theta) \geq 0$$

$$\Rightarrow \forall\theta \quad V_A^2 \geq gl(2 - 3\cos\theta) \Rightarrow V_A^2 \geq 5gl$$

$$V_A = \sqrt{5gl}$$

$$\text{c) } V_C^2 = V_A^2 - 2gl(1 - \cos\theta_C) = 5gl - 2gl(1 - \cos\pi) = gl \Rightarrow V_C = \sqrt{gl}$$

Looping

Le jouet d'un enfant est constitué d'un petit chariot de masse m qui se déplace sur une piste se terminant par une boucle circulaire verticale (looping) de rayon R . L'objectif de l'exercice est de calculer la valeur minimale de l'altitude h du point A pour que le chariot abandonné en A sans vitesse initiale ($V_A = 0$) puisse faire le tour complet de la boucle en restant en contact avec la piste tout le long du trajet.

Le chariot assimilé à un point matériel M glisse sur la piste (ABCDEF) sans frottement

On repère la masse M sur la boucle par l'angle θ que fait OM avec la verticale OB .

I. Étude énergétique

1) En prenant l'origine de l'énergie potentielle au niveau du sol ($E_{PP}(B) = 0 = E_{PP}(F)$), donner l'expression de l'énergie potentielle $E_{PP}(A)$ en A et $E_{PP}(M)$ en M (en fonction de m, g, h, R et θ).

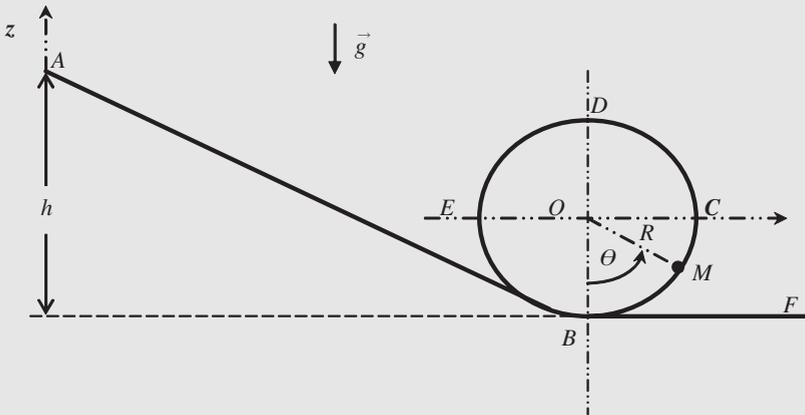


Figure 4.15

- 2) On notera V_M la vitesse du point M dans la position repérée par θ . Écrire l'énergie mécanique totale $E_m(A)$ en A et $E_m(M)$ en M .
- 3) Le système est-il conservatif? En déduire une relation entre $E_m(A)$ et $E_m(M)$.
- 4) En déduire l'expression de $\frac{V_M^2}{R}$ en fonction de g , R , h et θ (relation n° 1).

II. Cinématique

L'étude du mouvement de M sur la boucle ($BCDE$) se fait naturellement en coordonnées polaires (R, θ) et la base associée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

- 1) Exprimer le vecteur vitesse \vec{V}_M en coordonnées polaires et en déduire la relation entre V_M , R et $\dot{\theta}$. Exprimer $\frac{V_M^2}{R}$ en fonction de R et $\dot{\theta}$ (relation n°2).
- 2) Exprimer le vecteur accélération \vec{a}_M en coordonnées polaires et en déduire, en utilisant la relation n°2 précédente, l'expression de la composante radiale (suivant \vec{u}_r) de l'accélération en fonction de V_M et R .

III. Dynamique

- 1) On appellera \vec{F} la réaction de la piste sur la masse M .

Faire l'étude dynamique de M sur la partie circulaire ($BCDE$). Projeter le principe fondamental de la dynamique sur $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et exprimer alors le rapport F/m (relation 3).

- 2) Utiliser les relations n°1 et 3 pour exprimer F/m en fonction de h , g , R et θ .
- 3) Dire que la masse fait un tour complet en restant en contact avec la piste se traduit par :

$$\text{Pour toute valeur de l'angle } \theta, \text{ la réaction } F \text{ existe : } \quad \forall \theta, \quad F(\theta) \geq 0$$

Pour quelle valeur évidente de θ la réaction F est-elle minimale ?

En déduire la valeur minimale que doit avoir l'altitude h du point A pour que le chariot réalise le looping sans quitter la piste.

Solution

I. Étude énergétique

$$1) E_{PP}(A) = mgh \quad E_{PP}(M) = mgR(1 - \cos \theta)$$

$$2) E_m(A) = mgh \quad E_m(M) = \frac{1}{2}mV_M^2 + mgR(1 - \cos \theta)$$

3) Le système conservatif (pas de frottement). $E_m(A) = E_m(M)$.

$$4) E_m(M) = \frac{1}{2}mV_M^2 + mgR(1 - \cos \theta) = E_m(A) = mgh \Rightarrow \frac{V_M^2}{R} = 2g \left[\frac{h}{R} - (1 - \cos \theta) \right] \quad (\text{n}^\circ 1)$$

II. Cinématique

$$1) \vec{V}_M = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta. \text{ On a donc : } V_M = R\dot{\theta} \Rightarrow \frac{V_M^2}{R} = R\dot{\theta}^2 \quad (\text{n}^\circ 2)$$

$$2) \vec{a}_M = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta \quad \text{soit} \quad a_r = -\frac{V_M^2}{R} \text{ composante radiale de l'accélération.}$$

III. Dynamique

1) Système : la masse M ; référentiel terrestre considéré galiléen.

Forces : $\vec{P} = m\vec{g} = mg \cos \theta \vec{u}_r - mg \sin \theta \vec{u}_\theta$ et $\vec{F} = -F\vec{u}_r$ (réaction normale à la piste car pas de frottement. Principe fondamental de la dynamique :

$$\vec{P} + \vec{F} = m\vec{a}$$

2) En projection sur OM :

$$F - mg \cos \theta = m \frac{V_M^2}{R} \Rightarrow \frac{F}{m} = g \cos \theta + \frac{V_M^2}{R} \quad (\text{n}^\circ 3)$$

$$3) \frac{F}{m} = g \cos \theta + \frac{V_M^2}{R} = g \cos \theta + 2g \frac{h}{R} - 2g(1 - \cos \theta) = 2g \left[\frac{h}{R} - 1 + \frac{3}{2} \cos \theta \right]$$

4) $\theta = \pi$ donne F minimale. La condition est donc : $F_{\min} > 0$ soit :

$$F_{\min} \geq 0 \Rightarrow \frac{h}{R} \geq 1 - \frac{3}{2} \cos \pi = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}.$$

La hauteur minimale est donc de $h = \frac{5}{2}R$

Mouvement sur un plan incliné

On considère un petit bloc assimilable à un point matériel de masse m abandonné sans vitesse initiale au point A d'un plan incliné comme l'indique la figure ci-après. Le point A est à l'altitude h_0 . On suppose que le coefficient de frottement est le même sur les deux plans et vaut $\mu = \tan \varphi$ (φ est appelé angle de frottement).

L'étude suivante se fera dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen.

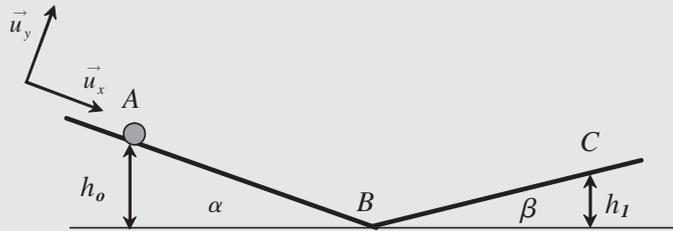


Figure 4.16

1) Dans le cas où la masse m glisse, si f représente la résultante des forces de frottement et R_n la réaction normale au support, on a la relation $f = \mu R_n$.

Quelle relation a-t-on entre f , R_n et μ lorsque les frottements sont suffisants pour maintenir la masse en équilibre ?

2) On se place dans le cas où la masse glisse. Faire le bilan des forces agissant sur la masse m entre A et B . L'origine du repère choisi est le point A et AB correspond à l'axe des abscisses (voir figure). Appliquer le principe fondamental de la dynamique et en déduire :

- l'accélération suivant AB de la masse m . Donner son expression en fonction de g , α et φ .
 - En déduire l'expression de la vitesse V_B de la masse m au point B en fonction de g , h_0 , α et φ .
 - Y-a-t-il une condition portant sur l'angle de frottement φ et l'angle α du plan incliné pour que le mouvement puisse se produire ? Si oui, laquelle ?
 - Faire la même étude sur la partie BC et donner l'accélération de la masse sur BC . Indiquer s'il existe une condition pour que le mouvement puisse se produire.
- 3) Que peut-on dire de l'énergie mécanique totale de la masse m ?

- Exprimer les énergie cinétique $E_C(A)$ et potentielle $E_P(A)$ de la masse au point de départ A . On choisira l'origine des énergies potentielles au point B . En déduire l'énergie mécanique $E(A)$.
 - Exprimer les énergie cinétique $E_C(B)$ et potentielle $E_P(B)$ de la masse au point d'arrivée B . En déduire l'énergie mécanique $E(B)$.
 - Exprimer le travail de la force de frottement f entre A et B . donner l'expression en fonction de m , g , h_0 , α et φ .
 - Appliquer le théorème de l'énergie mécanique et en déduire l'expression de la vitesse V_B de la masse m au point B . Retrouver le résultat du 2) b).
- 4) Après le passage au point B à la vitesse V_B , la masse remonte le plan incliné BC (angle β avec l'horizontale). Le coefficient de frottement $\mu = \tan \varphi$ reste le même. On supposera que l'angle fait entre les deux plans ne perturbe pas le mouvement. La masse s'arrête au point C .

- Appliquer le théorème de l'énergie mécanique entre B et C . Jusqu'à quelle hauteur h_1 la masse m remontera-t-elle ? Donner l'expression de h_1 en fonction de h_0 , α , β et φ .
- Application. Montrer que pour $\alpha = \beta$ on a :
$$h_1 = h_0 \frac{\tan \alpha - \tan \varphi}{\tan \alpha + \tan \varphi}$$
- La masse étant arrêtée au point C , va-t-elle redescendre la pente BC

Solution

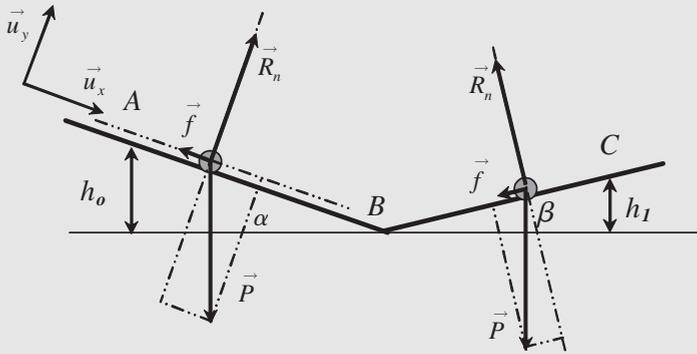


Figure 4.17

1) Lorsque les frottements sont suffisants pour maintenir la masse en équilibre on a :

$$\text{Solide en équilibre : } \frac{f}{R_n} < \mu;$$

2) Bilan des forces agissant sur la masse m

- Le poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg(\sin \alpha \vec{u}_x + \cos \alpha \vec{u}_y)$
- La réaction normale $\vec{R}_n = R_n \vec{u}_y$
- Les frottements solide : $\vec{f} = -f \vec{u}_x$ et la masse glisse : alors $f = \mu R_n$

Principe fondamental de la dynamique : $\vec{P} + \vec{f} + \vec{R}_n = m\vec{a}$

et en projetant :

- a) Sur \vec{u}_y : $R_n = mg \cos \alpha$. Sur \vec{u}_x : $mg \sin \alpha - f = m\ddot{x}$ et avec $f = \mu R_n = \mu mg \cos \alpha$
On a : $m\ddot{x} = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha = mg \sin \alpha \left(1 - \frac{\mu}{\tan \alpha}\right)$

$$\ddot{x} = g \sin \alpha \left(1 - \frac{\tan \varphi}{\tan \alpha}\right) = g \sin \alpha - g \cos \alpha \tan \varphi$$

- b) On obtient : $\dot{x} = \ddot{x}t$ (à $t = 0$ la vitesse est nulle) et $x = \frac{1}{2}\ddot{x}t^2$ (à $t = 0, x = 0$)

La masse est en B à l'instant t_B correspondant à $x_B = \frac{h_0}{\sin \alpha}$:

$$t_B = \sqrt{\frac{2x_B}{\ddot{x}}} = \sqrt{\frac{2h_0}{\ddot{x} \sin \alpha}}$$

On en déduit la vitesse en B : $V_B = \dot{x}t_B = \sqrt{\frac{2h_0\ddot{x}}{\sin \alpha}} = \sqrt{2h_0g \left(1 - \frac{\tan \varphi}{\tan \alpha}\right)}$

- c) Il y a mouvement si l'accélération existe et est positive soit :

$$\ddot{x} \geq 0 \Rightarrow \tan \varphi \geq \tan \alpha$$

il faut donc $\alpha \leq \varphi$

- d) Sur BC : même force mais en orientant de B vers C le poids et les frottements ont même sens ; On a donc :

Le poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg(-\sin\beta\vec{u}_x + \cos\beta\vec{u}_y)$, la réaction normale $\vec{R}_n = R_n\vec{u}_y$ et les frottements solide : $\vec{f} = -f\vec{u}_x$ et la masse glisse : alors $f = \mu R_n$

Principe fondamental de la dynamique : $\vec{P} + \vec{f} + \vec{R}_n = \vec{a}$ et en projetant :

Sur \vec{u}_y : $R_n = mg \cos \beta$,

Sur \vec{u}_x : $-mg \sin \beta - f = m\ddot{x}$, avec $f = \mu R_n = \mu mg \cos \beta$,

On a :

$$m\ddot{x} = -mg \sin \beta - \mu mg \cos \beta = -mg \sin \beta \left(1 + \frac{\mu}{\tan \beta} \right)$$

$$\ddot{x} = -g \sin \beta \left(1 + \frac{\tan \varphi}{\tan \beta} \right) = -g \sin \beta - g \cos \beta \tan \varphi.$$

Il n'y a pas de condition sur les angles puisque l'accélération est toujours négative (mouvement uniformément freiné)

- 3) L'énergie mécanique totale de la masse m ne se conserve pas car le système subit des frottements (système non conservatif)

- a) Énergie cinétique $E_C(A) = 0$ et énergie potentielle $E_P(A) = mgh_0$; On en déduit : l'énergie mécanique $E(A) = E_C(A) + E_P(A) = mgh_0$
- b) Énergie cinétique $E_C(B) = \frac{1}{2}mV_B^2$ et énergie potentielle $E_P(B) = 0$; On en déduit : l'énergie mécanique $E(B) = E_C(B) + E_P(B) = \frac{1}{2}mV_B^2$
- c) $W_{AB} = \int_{\vec{A}}^{\vec{B}} \vec{f} \cdot d\vec{AB} = -fx_B = -\mu R_n \frac{h_0}{\sin \alpha} = -\mu mg \cos \alpha \frac{h_0}{\sin \alpha} = -mgh_0 \frac{\tan \varphi}{\tan \alpha}$
- d) Théorème de l'énergie mécanique : $\Delta E = E(B) - E(A) = W_{AB}$

$$\frac{1}{2}mV_B^2 - mgh_0 = W_{AB} = -mgh_0 \frac{\tan \varphi}{\tan \alpha} \Rightarrow V_B^2 = 2gh_0 \left(1 - \frac{\tan \varphi}{\tan \alpha} \right)$$

On retrouve bien le résultat du 2)b).

- 4) a) Le travail de la force de frottement entre B et C est :

$$W_{BC} = \int_{\vec{B}}^{\vec{C}} \vec{f} \cdot d\vec{BC} = -\mu R_n \frac{h_1}{\sin \beta} = -\mu mg \cos \beta \frac{h_1}{\sin \beta} = -mgh_1 \frac{\tan \varphi}{\tan \beta}$$

Théorème de l'énergie mécanique entre B et C : $\Delta E = E(C) - E(B) = W_{BC}$

$$mgh_1 - \frac{1}{2}mV_B^2 = W_{BC} = -mgh_1 \frac{\tan \varphi}{\tan \beta}$$

$$\Rightarrow V_B^2 = 2gh_1 \left(1 + \frac{\tan \varphi}{\tan \beta} \right) \quad \text{et} \quad V_B^2 = 2gh_0 \left(1 - \frac{\tan \varphi}{\tan \alpha} \right)$$

$$\text{On a donc : } \frac{h_1}{h_0} = \frac{1 - \frac{\tan \varphi}{\tan \alpha}}{1 + \frac{\tan \varphi}{\tan \beta}} = \frac{\tan \alpha - \tan \varphi}{\tan \beta + \tan \varphi}$$

- b) Application : Pour $\alpha = \beta$ on a : $h_1 = h_0 \frac{\tan \alpha - \tan \varphi}{\tan \alpha + \tan \varphi}$

- c) La masse est arrêtée au point C . La condition pour redescendre est $\beta > \varphi$

EXERCICES CORRIGÉS

- 1** 1) Rappeler la définition de la fonction énergie potentielle dérivant d'une force conservative.
- 2) En prenant l'exemple du poids d'un corps, exprimer l'énergie potentielle de pesanteur en considérant un axe vertical ascendant z .
- 3) Un projectile de masse $m = 10$ kg est lancé du sol sous une incidence de 45° à une vitesse initiale $v = 10 \text{ m.s}^{-1}$. On suppose qu'il n'y a pas de frottements.
- a) Déterminer son énergie mécanique.
- b) Représenter l'évolution de son énergie potentielle en fonction de la variable z représentant l'altitude du projectile.
- c) En déduire l'évolution de l'énergie cinétique du projectile et l'altitude maximale atteinte par le projectile.
- d) Déterminer l'équation de la trajectoire du projectile et trouver le point d'impact sur le sol.
- 2** Un bateau de masse m ayant atteint sa vitesse de croisière v_0 , coupe ses moteurs à l'instant $t = 0$. L'eau exerce une force de frottement proportionnelle à la vitesse v du bateau.
- 1) À l'aide de la relation fondamentale de la dynamique, donner l'expression de la vitesse en fonction du temps. Où le bateau s'arrêtera-t-il ?
- 2) Quel est le travail effectué par la force de frottement entre l'instant où le bateau coupe ses moteurs et celui où il s'arrête ? Le comparer à l'énergie cinétique du bateau à l'instant $t = 0$.
- 3** On considère un solide de masse $m = 2$ kg pouvant glisser sur un sol lisse dont le profil est donné par $z(x) = ax^2 + bx^3 + cx^4$, avec $a = 0,4$, $b = -0,1$ et $c = 2,2 \cdot 10^{-4}$. On ne considère que l'intervalle de valeurs de x compris entre -3 et 3 .
- 1) Représenter l'évolution de la fonction énergie potentielle de pesanteur de ce solide.
- 2) Déterminer si le long de ce trajet le solide peut occuper des positions d'équilibre stable et instable. On exprimera les conditions de stabilité de façon quantitative.
- 3) On suppose que le solide se trouve à l'instant $t = 0$ à la position M d'abscisse $x = 1,5$ sans vitesse initiale. Déterminer qualitativement le mouvement du solide. Déterminer quantitativement l'évolution de l'énergie cinétique du solide en fonction de x . Trouver la vitesse maximum atteinte par le solide et en définir la position P .

Solutions

- 1** 1) La relation entre une force conservative et l'énergie potentielle dont elle dérive est :
- $$\vec{\text{grad}} E_p = -\vec{F}_{ext}^C$$
- 2) Avec un axe vertical ascendant nous avons :
- $$dE_{pp} = -\vec{P} \cdot d\vec{l} = mg \vec{u}_z \cdot (dx \vec{u}_x + dz \vec{u}_z) = mg dz,$$
- soit : $E_{pp}(z) = mgz + cste$

3) a) $E = E_c + E_{PP}(z) = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$ (en prenant comme zéro de l'énergie potentielle $E_{PP}(0) = 0$).

b) L'énergie potentielle croît linéairement avec l'altitude.

c) À $t = 0$ s, l'énergie potentielle est nulle donc : $E = E_{c0} = \frac{1}{2}mv_0^2$. A.N. : $E = E_{c0} = 500$ J.

L'énergie cinétique sera définie à un instant quelconque par : $E_c = E - E_{PP}(z) = E - mgz$, ce qui est une fonction décroissante de l'altitude z atteinte. L'altitude maximale z_{max} atteinte sera obtenue pour $E_c(z_{max}) = 0$ soit $z_{max} = E/mg$. A.N. : $z_{max} = 5$ m.

Cependant, la vitesse ne peut pas s'annuler complètement. La composante v_z suivant la verticale peut s'annuler mais la composante $v_x = v_0 \sin \alpha$ suivant l'axe x reste constante. Donc en réalité il existe un minimum non nul pour l'énergie cinétique : $E_{c_{min}} = \frac{1}{2}m(v_0 \sin \alpha)^2 = \frac{1}{4}mv_0^2$ (avec l'angle $\alpha = 45^\circ$).

On a donc : $E_{c_{min}} = 500/2 = 250$ J ce qui donne alors pour l'altitude maximale atteinte $z_{max} = (E - E_{c_{min}})/mg = 2,5$ m.

d) Équation de la trajectoire (voir chapitre 2) : $z = \frac{1}{2}a_0 \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \tan \alpha$, et la portée d est donnée par : $d = \frac{v_0^2}{a_0} 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$. A.N. : $d = 10$ m.

2

1) On considère le système bateau dans le référentiel galiléen R . Les forces extérieures appliquées au bateau sont :

- \vec{P} le poids du bateau ;
- \vec{R} la poussée de l'eau sur le bateau ;
- \vec{f} la force de frottement.

Le principe fondamental de la dynamique donne : $m \vec{a}_{G/R} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{f}$, ce qui conduit par projection dans la direction x d'avancée du bateau à : $m \, d v_x / dt = -k v_x$.

On en conclut que : $d v_x / v_x = -\frac{k}{m} dt \implies \ln v_x = -\frac{k}{m} t + C$

Les conditions initiales du mouvement imposent que :

$$C = \ln v_{0m} \implies \ln \frac{v_x}{v_0} = -\frac{k}{m} t \implies v_x = v_0 e^{-\frac{k}{m} t}$$

Pour trouver la position d'arrêt, il faut intégrer la vitesse, soit :

$$x = \int v_x \, dt = v_0 \int e^{-\frac{k}{m} t} \, dt = -\frac{v_0}{k} e^{-\frac{k}{m} t} + C_2$$

À l'instant $t = 0$ le bateau était en $x = 0$, donc : $C_2 = \frac{v_0}{k} \implies x = \frac{v_0}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m} t}\right)$. Le bateau s'arrêtera au bout d'un temps infini à la position : $x_a = \frac{v_0}{k}$.

2) Par définition, le travail de la force de frottement est donné par :

$$W_{1 \rightarrow 2}(\vec{f}) = \int_1^2 \vec{f} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{f} \cdot \vec{v} \, dt \implies W_{1 \rightarrow 2}(\vec{f}) = -k v_0^2 \int_1^{t_2} e^{-2\frac{k}{m} t} \, dt$$

soit, entre l'origine des temps et l'infini :

$$W_{1 \rightarrow 2}(\vec{f}) = k v_0^2 \frac{m}{2k} \left[e^{-2\frac{k}{m} t} \right]_0^\infty = -\frac{1}{2} m v_0^2$$

ce qui représente l'opposé de l'énergie cinétique de départ (Ceci est logique dans la mesure où seule la force de frottement travaille).

3 1) Voir figure 4.18.

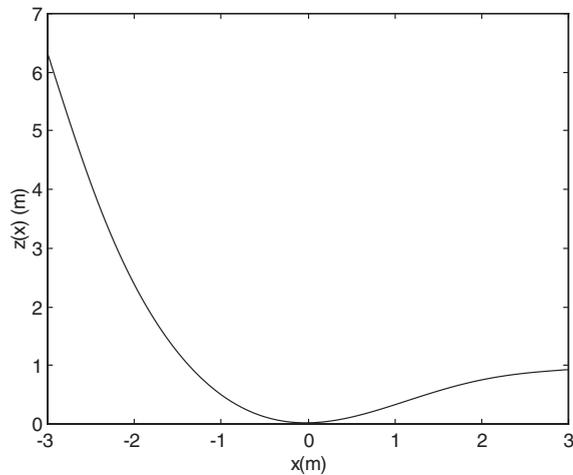


Figure 4.18

2) Conditions de stabilité en $x = x_0 = 0$, $\left(\frac{dE_P}{dx}\right)_{x_0} = 0$ et $\left(\frac{d^2E_P}{dx^2}\right)_{x_0} = 2a > 0$, donc l'équilibre est stable dans cette position. Par contre en $x_1 = 2,695$ m nous avons :

$$\left(\frac{dE_P}{dx}\right)_{x_1} = 0 \text{ et } \left(\frac{d^2E_P}{dx^2}\right)_{x_1} < 0$$

donc cette position est une position d'équilibre instable.

3) En $x_M = 1,5$ m, $z(x_M) = 0,563$ m. Le solide va aller du côté correspondant à la diminution de son énergie potentielle soit vers les x décroissants. Son énergie potentielle va décroître jusqu'à ce qu'il passe par $x = 0$ où elle deviendra nulle si l'on convient de prendre l'origine des énergies potentielles en $z = 0$. Comme il n'y a pas de frottements, l'énergie mécanique se conserve :

$$E = E(M) \implies \frac{1}{2}mv^2 + mgz(x) = mgz(x_M)$$

L'énergie cinétique sera donc : $\frac{1}{2}mv^2 = mgz(x_M) - mgz(x)$.

L'énergie cinétique passe par un maximum quand $z(x) = 0$, ce qui correspond à la position du point P . La vitesse en ce point est donnée par :

$$v = \sqrt{2gz(x_M)} = 3,32 \text{ ms}^{-1}.$$

CHAPITRE 5

OSCILLATEURS MÉCANIQUES

Pré-requis

- Une bonne connaissance de l'utilisation des nombres complexes est impérative pour aborder ce chapitre. Il est également nécessaire de connaître les résultats des chapitres 3 et 4 de ce livre pour appréhender la dynamique et l'aspect énergétique des oscillateurs.

Objectif

- ▶ Définir l'oscillateur mécanique.
- ▶ Présenter les aspects dynamique et énergétique de l'oscillateur mécanique.
- ▶ Apprendre comment les forces de frottements solide et fluide influencent le mouvement de l'oscillateur.
- ▶ Aborder le repérage de l'oscillateur dans l'espace des phases.

1. L'OSCILLATEUR HARMONIQUE

On appelle **oscillateur harmonique** tout système dont le paramètre ou degré de liberté $x(t)$ peut se mettre sous la forme :

$$x(t) = x_{\max} \cos(\omega t + \varphi)$$

Par définition nous appellerons $x(t)$ l'élongation (ou la position) à l'instant t , x_{\max} l'élongation maximale ou l'amplitude, φ la phase à l'origine, ω la pulsation du mouvement et $\omega t + \varphi$ la phase à l'instant t . La position d'un oscillateur harmonique de fréquence 1 Hz, d'amplitude 5 cm est représentée sur la figure 5.1.

La période T des oscillations est le temps mis par l'oscillateur pour revenir à une position identique quel que soit le choix de cette position. Mathématiquement la période T est définie par :

$$\exists T/\forall t \quad x(t + T) = x(t)$$

Il est courant de représenter la position d'un oscillateur par un nombre complexe (figure 5.2) ou de façon équivalente par la représentation de Fresnel.

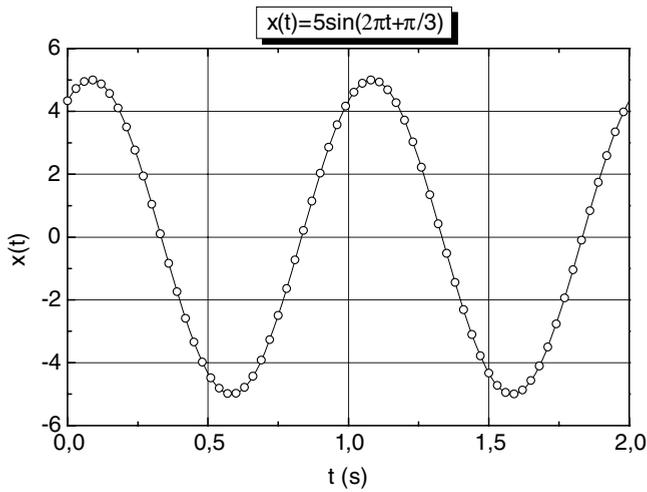


Figure 5.1 • Représentation de l'évolution de la position d'un oscillateur harmonique en fonction du temps.

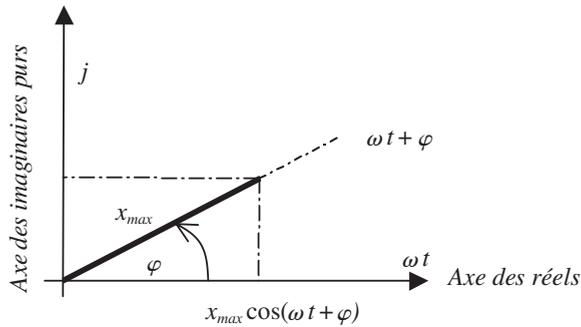


Figure 5.2 • Représentation de l'élongation instantanée d'un oscillateur dans le plan complexe.

La position instantanée $x(t)$ de l'oscillateur est donnée par la partie réelle du nombre complexe \tilde{x} défini par :

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= [x_{\max}, \omega t + \varphi] \\ \tilde{x} &= x_{\max} e^{j(\omega t + \varphi)} \end{aligned}$$

Par abus d'écriture, il est fréquent de confondre le nombre complexe \tilde{x} avec la position instantanée $x(t)$ de l'oscillateur. On écrit ainsi que :

$$x(t) = x_{\max} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

ce qui n'a pas de sens physique mais qui est bien pratique.

La vitesse instantanée de l'oscillateur est alors donnée par :

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = x_{\max} \omega j e^{j(\omega t + \varphi)} = x_{\max} \omega e^{j(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})}$$

On constate que la vitesse est déphasée $\pi/2$ par rapport à la position. Cela montre bien que, lorsque l'oscillateur passe par l'origine $x = 0$, sa vitesse est maximale alors que quand il passe par son élongation maximale $x = x_{\max}$ sa vitesse est nulle.

De même on peut calculer l'accélération de l'oscillateur :

$$a = \frac{dv}{dt} = -x_{\max} \omega^2 e^{j(\omega t + \varphi)} = \omega^2 x_{\max} e^{j(\omega t + \varphi + \pi)}$$

Cette relation montre que l'accélération de l'oscillateur est en opposition de phase avec l'amplitude. La représentation dans le plan complexe de ces trois grandeurs est présentée figure 5.3.

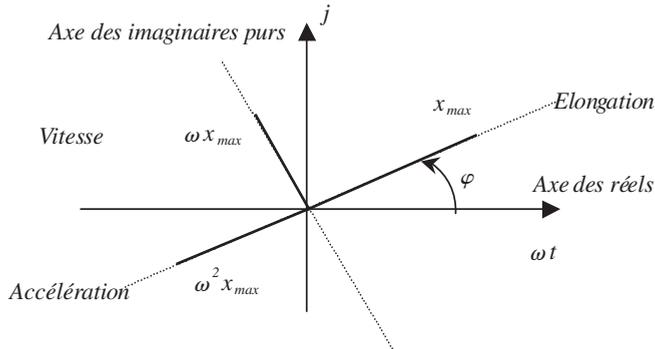


Figure 5.3 • Représentation de l'élongation, de la vitesse et de l'accélération dans le plan complexe.

2. ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

De la relation précédente, il est facile de voir que l'accélération de l'oscillateur est liée à sa position par la relation :

$$a = -\omega^2 x$$

Il en résulte que l'équation différentielle du mouvement d'un oscillateur harmonique est donnée par :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Tout système dont l'équation différentielle du mouvement est de cette forme est un oscillateur harmonique, ce qui peut se résumer de la façon suivante :

Oscillateur harmonique

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \implies \begin{cases} x(t) = x_{\max} \cos(\omega t + \varphi) = x_{\max} \sin(\omega t + \varphi') \\ x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \\ \tilde{x}(t) = x_{\max} e^{j(\omega t + \varphi)} \end{cases}$$

La forme de la solution de l'équation différentielle peut être écrite de différentes façons ; toutefois si l'écriture diffère (voir ci-dessus) la solution $x(t)$ reste la même. La somme d'un sinus et d'un cosinus affectés d'amplitudes A et B est bien équivalente à un cosinus ou un sinus affecté d'une certaine phase. La dernière forme $\tilde{x}(t)$ est la solution dans l'espace des complexes et seule la partie réelle de $\tilde{x}(t)$ correspond à la solution physique de l'équation différentielle.

3. EXEMPLES D'OSCILLATEURS HARMONIQUES

3.1. Pendule élastique horizontal

Nous considérons le mouvement d'une masse m accrochée à un ressort de raideur k assujettie à se déplacer sans frottements sur un plan horizontal (figure 5.4). Le mouvement étant rectiligne, nous étudions le système masse m dans le référentiel galiléen $R(O, x, y, t)$ muni de la base (\vec{u}_x, \vec{u}_y) . Le point O correspond à la position d'équilibre de la masse m , le ressort étant au repos (ni étiré, ni comprimé).

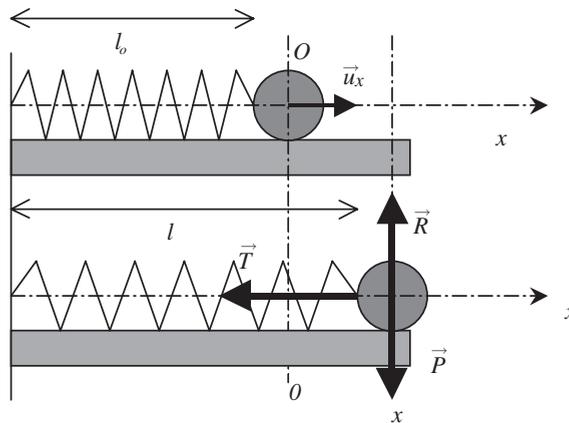


Figure 5.4 • Pendule élastique horizontal.

L'application de la RFD conduit à :

$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{R} \quad (5.1)$$

avec :

$$\vec{P} = \begin{vmatrix} 0 \\ -mg \end{vmatrix} \quad \vec{T} = \begin{vmatrix} -kx \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{R} = \begin{vmatrix} 0 \\ R \end{vmatrix} \quad \vec{a} = \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ 0 \end{vmatrix}$$

Par projection de la RFD sur l'axe des abscisses, on obtient l'équation différentielle du mouvement du pendule élastique, soit :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

qui correspond bien à l'équation différentielle du mouvement d'un oscillateur harmonique. La solution est bien sûr sinusoïdale. La pulsation et la période du mouvement sont données par :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Il en résulte qu'un ressort très raide (k grand) a une période d'oscillation courte. Nous noterons qu'il est d'usage d'appeler T la **période propre** de l'oscillateur et que très fréquemment la période propre est notée T_0 . Cette période correspond à la période d'oscillations de l'oscillateur **libre**. Cette dernière notation est très utile quand un oscillateur mécanique est entretenu ou excité de façon sinusoïdale. La période d'excitation est alors notée T et la période propre de l'oscillateur T_0 .

3.2. Pendule élastique vertical

Considérons maintenant le même problème que précédemment, mais avec un pendule vertical. Le système étudié est la masse, le référentiel galiléen $R(O, x, t)$ et les forces extérieures appliquées \vec{P} et \vec{T} . À l'équilibre, le poids compense la tension du ressort (figure 5.5) et l'on a :

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0} \Rightarrow (mg - k\Delta l_0) \vec{u}_x = \vec{0}$$

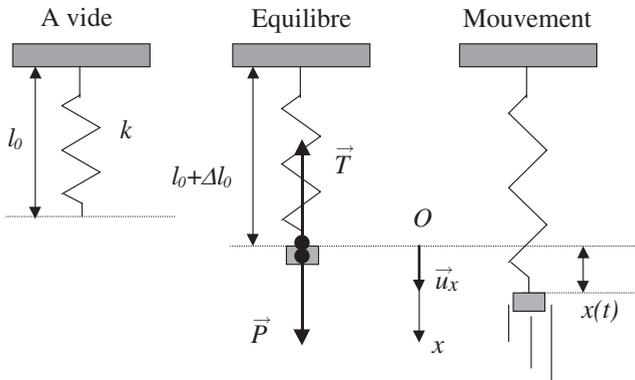


Figure 5.5 • Schéma d'une masse accrochée à un ressort vertical en équilibre puis en mouvement.

En mouvement, le poids ne compense plus la tension. L'origine O du mouvement est prise sur la position d'équilibre du ressort. L'application de la RFD conduit à :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} \Rightarrow m\ddot{x} \vec{u}_x = (mg - k(\Delta l_0 + x)) \vec{u}_x$$

En utilisant la condition d'équilibre du ressort, on aboutit à l'équation différentielle du mouvement du pendule élastique :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Le mouvement a les mêmes caractéristiques que celles de l'oscillateur horizontal.

3.3. Pendule simple

Nous considérons un pendule simple constitué d'une masse m ponctuelle accrochée à un fil de longueur l , comme l'indique la figure 5.6.

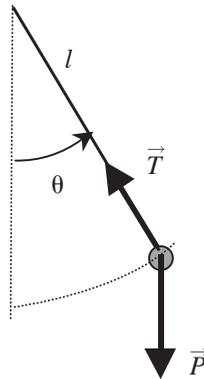


Figure 5.6 • Pendule simple constitué d'une masse accrochée à un fil de longueur l .

L'application du théorème du moment cinétique dans lequel seul le poids possède un moment non nul :

$$\sum \vec{M}_O (\vec{F}_{ext}) = \frac{d(\vec{OM} \wedge \vec{F}_{ext})}{dt}$$

conduit après projection sur l'axe de rotation à :

$$mgl \sin \theta = ml \frac{dv}{dt} = ml^2 \ddot{\theta} \implies \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (5.2)$$

Nous rappelons que l'équation 5.2 est celle d'un oscillateur anharmonique car elle n'est pas linéaire.

Pour θ « petit » nous avons, au premier ordre en θ , $\sin \theta \simeq \theta$. Cette équation devient linéaire et s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

On retrouve une équation différentielle identique à celles rencontrées précédemment ce qui montre que le pendule simple est assimilable à un oscillateur harmonique dans la limite des petites oscillations ($\theta < 10^\circ$).

4. ÉTUDE ÉNERGÉTIQUE DES OSCILLATEURS

4.1. Diagrammes d'énergie

Un oscillateur harmonique ne subit pas de forces de frottement ; il est donc mécaniquement isolé et son énergie mécanique se conserve. Nous pouvons donc écrire que :

$$E = E_C + E_P = cste$$

Il est possible de représenter graphiquement l'évolution de ces trois énergies en fonction du paramètre de mouvement de l'oscillateur. La figure 5.7 donne l'énergie mécanique d'un pendule élastique et d'un pendule simple de faible amplitude ($\theta < 10^\circ \implies \sin \theta \simeq \theta$, $\cos \theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$).

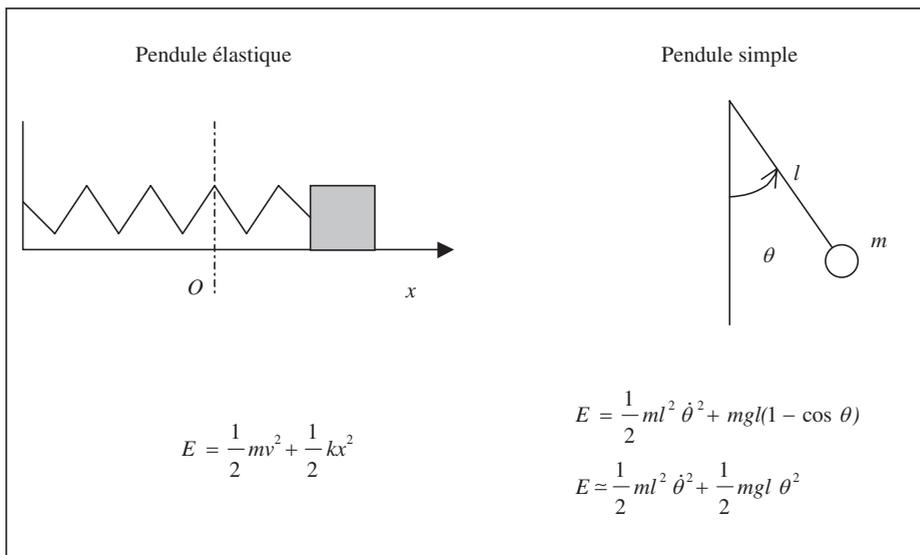


Figure 5.7 • Représentation d'un pendule élastique et d'un pendule simple avec leur énergie mécanique associée.

L'évolution des différentes énergies d'un pendule élastique de constante de raideur $k = 0,2 \text{ Nm}^{-1}$ est présentée sur la figure 5.8. On y voit que l'énergie mécanique est constante et que l'énergie cinétique évolue de façon complémentaire à l'énergie potentielle, celle-ci évoluant de façon parabolique.

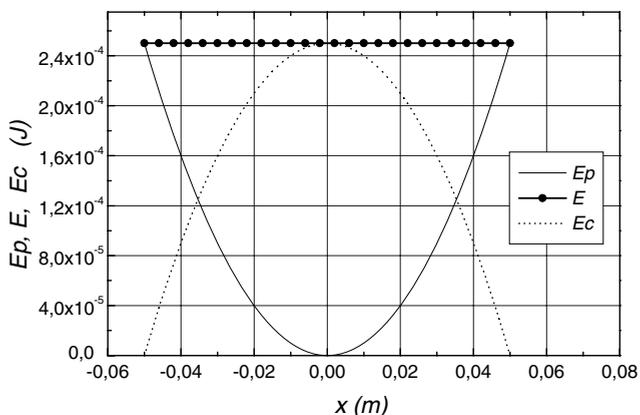


Figure 5.8 • Énergie potentielle, cinétique et mécanique d'un pendule élastique sans frottements.

4.2. Énergie instantanée

L'énergie instantanée est l'énergie de l'oscillateur à l'instant t . Nous faisons à titre d'application le calcul dans le cas du pendule élastique. L'énergie instantanée est la somme des

énergies cinétiques et potentielles instantanées qui s'écrivent :

$$E_C(t) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_P(t) = \frac{1}{2} k x_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

En introduisant la raideur k du ressort en fonction de la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur dans l'expression de l'énergie cinétique et en sommant ces deux énergies, nous obtenons l'énergie mécanique instantanée de l'oscillateur soit :

$$E = \frac{1}{2} k x_m^2$$

Conformément à l'hypothèse, nous trouvons bien que l'énergie mécanique de l'oscillateur est constante et indépendante du temps.

5. OSCILLATEUR MÉCANIQUE AMORTI PAR FROTTEMENTS VISQUEUX

5.1. Équation différentielle du mouvement

Nous considérons un pendule élastique horizontal subissant une force de frottement visqueux du type $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$. Nous étudions le système masse m dans le référentiel galiléen $R(O, x, t)$.

Les forces extérieures appliquées sont le poids \vec{P} , la force de frottement \vec{F} ; la tension du ressort \vec{T} et la réaction du support \vec{R} (figure 5.9).

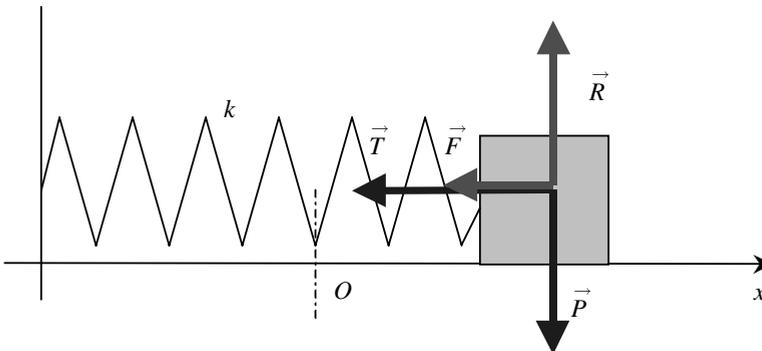


Figure 5.9 • Représentation d'un pendule élastique horizontal soumis à une force de frottement visqueux.

L'application de la R.F.D. conduit à :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} + \vec{F} = m \vec{a}_{G/R}$$

avec :

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{T} = \begin{vmatrix} -kx \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{P} = \begin{vmatrix} 0 \\ -mg \end{vmatrix} \quad \vec{R} = \begin{vmatrix} 0 \\ R \end{vmatrix} \quad \vec{F} = \begin{vmatrix} -\alpha v \\ 0 \end{vmatrix}$$

En projection sur l'axe des x il vient :

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha v \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (5.3)$$

Cette équation est une équation différentielle linéaire du deuxième degré. Les solutions sont exponentielles; en effet, il s'agit de trouver une fonction solution dont la dérivée seconde et première sont proportionnelles à la fonction elle-même. Nous considérons donc une solution du type :

$$x(t) = Ae^{rt}$$

Le report de cette solution dans l'équation différentielle conduit à :

$$\forall t \left(r^2 + \frac{\alpha}{m}r + \frac{k}{m} \right) A e^{rt} = 0$$

$$r^2 + \frac{\alpha}{m}r + \frac{k}{m} = 0$$

car une solution du type $A = 0$ n'est pas intéressante puisqu'elle correspond à l'immobilité du pendule.

La dernière de ces équations s'appelle **équation caractéristique** de l'équation différentielle. Sa résolution permet de déterminer les solutions de l'équation différentielle dans les différents régimes d'amortissement. Comme il s'agit d'une équation du second degré, il importe de distinguer trois cas qui correspondent à la valeur positive, nulle ou négative du discriminant. Le discriminant de cette équation s'écrit en faisant apparaître la pulsation propre de l'oscillateur :

$$\Delta = \frac{\alpha^2}{m^2} - 4\frac{k}{m} = \frac{\alpha^2}{m^2} - 4\omega_0^2$$

Nous présentons dans le tableau 5.1, les trois cas qui sont donc à distinguer avec les solutions correspondantes de l'équation caractéristique et de l'équation différentielle.

| $\Delta < 0$ | $\Delta = 0$ | $\Delta > 0$ |
|--|---------------------------------------|--|
| $r_{\pm} = -\frac{\alpha}{2m} \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{4m^2}}$ | $r = -\frac{\alpha}{2m}$ | $r_{\pm} = -\frac{\alpha}{2m} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4m^2} - \omega_0^2}$ |
| $x = x_+ + x_-$ $x_+ = Ae^{-\frac{\alpha}{2m}t} e^{jt\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{4m^2}}}$ $x_- = Be^{-\frac{\alpha}{2m}t} e^{-jt\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{4m^2}}}$ | $x = (At + B)e^{-\frac{\alpha}{2m}t}$ | $x = x_+ + x_-$ $x_+ = Ae^{-\frac{\alpha}{2m}t} e^{t\sqrt{\frac{\alpha^2}{4m^2} - \omega_0^2}}$ $x_- = Be^{-\frac{\alpha}{2m}t} e^{-t\sqrt{\frac{\alpha^2}{4m^2} - \omega_0^2}}$ |

Tableau 5.1 • Solutions de l'équation différentielle du mouvement de l'oscillateur amorti pour un amortissement faible $\Delta < 0$, un amortissement critique $\Delta = 0$ et un amortissement fort $\Delta > 0$.

Nous étudions tout d'abord le cas très fréquent de l'amortissement faible.

5.2. Étude de l'oscillateur à frottement faible

Nous avons vu que la solution de l'équation différentielle s'écrit :

$$x(t) = e^{-\frac{\alpha}{2m}t} \left(A e^{jt\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{4m^2}}} + B e^{-jt\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{4m^2}}} \right)$$

où A et B sont deux constantes complexes dépendant des conditions initiales.

La solution $x(t)$ étant une fonction réelle, on peut montrer que le terme entre parenthèses s'écrit comme une combinaison de cosinus et sinus, ce qui conduit à :

$$x(t) = X_{\max} e^{-\frac{\alpha}{2m}t} \cos(\omega t + \varphi) = e^{-\frac{\alpha}{2m}t} (X_0 \cos \omega t + Y_0 \sin \omega t)$$

avec :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{4m^2}}$$

qui est la pulsation du mouvement et les couples (X_{\max}, φ) et (X_0, Y_0) sont des constantes réelles dépendant des conditions initiales. La position de l'oscillateur s'exprime donc par un produit de deux termes. Le premier terme est une exponentielle décroissante et représente l'enveloppe du mouvement de l'oscillateur, c'est-à-dire les positions extrémales prises par $x(t)$ lorsque le temps s'écoule. La décroissance de l'exponentielle est guidée par le rapport $\alpha/2m$ qui traduit l'amortissement plus ou moins prononcé du mouvement. Lorsque α est nul, le mouvement est non amorti et l'on retombe sur la solution de l'oscillateur harmonique.

Le second terme est un cosinus qui traduirait la périodicité du mouvement s'il n'y avait pas d'amortissement. Nous notons bien que le mouvement n'est plus périodique puisqu'au bout du temps T l'élongation de l'oscillateur ne reprend pas la même valeur donc $x(t) \neq x(t + T)$. On parle de **pseudopériode** et l'on dit que le mouvement est **pseudopériodique**. La pseudopériode est donnée par :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{4m^2}}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\omega_0^2 m^2}}}$$

Cette expression montre que la période de l'oscillateur amorti augmente avec l'amortissement. Nous pouvons donc affirmer que les frottements ralentissent le mouvement. La figure 5.10 montre l'évolution de l'élongation x du ressort pour un pendule élastique amorti par frottement visqueux.

Nous remarquons que les constantes A et B sont déterminées par les conditions initiales du mouvement qui généralement sont $x = X_{\max}$ et $v = 0$ à $t = 0$, ce qui conduit à :

$$x(t) = X_{\max} e^{-\frac{\alpha}{2m}t} \left(\cos \omega t + \frac{\alpha}{2m\omega} \sin \omega t \right)$$

Dans la pratique, il existe deux solutions pour réaliser l'amortissement visqueux. La première consiste à utiliser un pendule élastique horizontal monté sur coussin d'air et à accrocher à la masse m une palette verticale trempant dans un liquide. La seconde consiste à amortir le mouvement d'un pendule élastique vertical par une force de Lorentz en plongeant la masse m dans un champ magnétique \vec{B} uniforme. On démontre que les courants induits dans la masse produisent une force de freinage opposée et proportionnelle à la vitesse de déplacement de la masse.

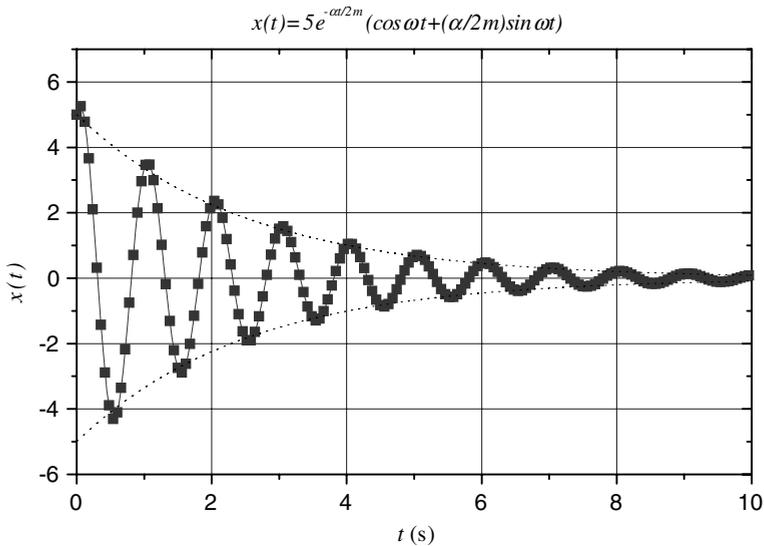


Figure 5.10 • Mouvement d'un oscillateur amorti par frottement fluide dans le cas d'un amortissement faible. L'amplitude des oscillations décroît de façon exponentielle (traits pointillés).

Encart 5.1. Décément logarithmique et amortissement

La détermination du coefficient de viscosité α peut se faire expérimentalement à partir de la courbe $x(t)$ en utilisant le **décément logarithmique** δ . Cette quantité est obtenue en considérant le logarithme du rapport des amplitudes des oscillations au bout des temps nT et $(n-1)T$. À ces instants nous avons :

$$x(nT) = X_{\max} e^{-\frac{\alpha}{2m} nT} \cos(\omega nT) = X_{\max} e^{-\frac{\alpha}{2m} nT}$$

et :

$$x((n-1)T) = X_{\max} e^{-\frac{\alpha}{2m} (n-1)T} \cos(\omega(n-1)T) = X_{\max} e^{-\frac{\alpha}{2m} (n-1)T}$$

Le décément logarithmique qui est le logarithme du rapport des amplitudes est donné par :

$$\delta = \ln \frac{x(nT)}{x((n-1)T)} = \frac{\alpha}{2m} T$$

Cette quantité est facilement accessible par l'expérience et permet de déterminer rapidement α . Une méthode plus précise consiste à tracer le logarithme de l'amplitude $\ln x(nT)$ en fonction de nT . On obtient alors une droite de pente $-\alpha/2m$.

5.3. L'oscillateur critique

Le régime de l'oscillateur est dit **critique** lorsque le discriminant de l'équation caractéristique est nul. Dans ce cas le mouvement de l'oscillateur obéit à une équation horaire du type :

$$x = (At + B)e^{-\frac{\alpha}{2m} t}$$

Le régime est dit critique car il correspond à un amortissement critique pour lequel on bascule du régime pseudopériodique vers un régime où il n'y a plus d'oscillations.

Les constantes A et B sont déterminées par les *conditions initiales* du mouvement, qui sont supposées être $x = X_{\max}$ et $v = 0$ à $t = 0$. L'introduction de ces deux conditions conduit à une solution du type :

$$x(t) = X_{\max} \left(1 + \frac{\alpha}{2m} t \right) e^{-\frac{\alpha}{2m} t}$$

Dans la pratique, ce régime est extrêmement important car lorsqu'il est atteint, l'oscillateur revient dans sa position d'équilibre au bout d'un temps minimal. C'est ainsi que ce régime est mis à profit dans les systèmes d'amortisseurs qui ont pour but d'empêcher les oscillations d'un oscillateur. La figure 5.11 montre le retour à l'équilibre d'un ressort amorti en régime critique. La période propre d'oscillation est de 3,14 s et le retour à l'équilibre est de l'ordre de cette valeur.

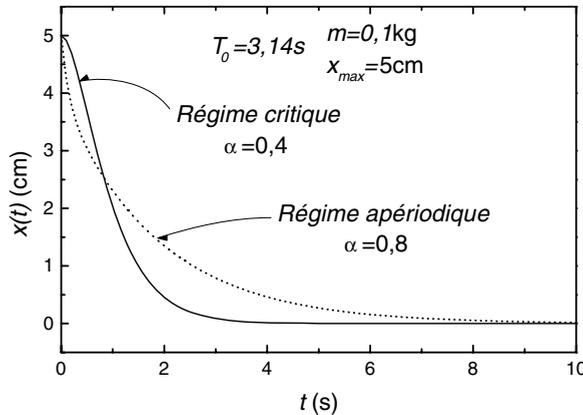


Figure 5.11 • Évolution de l'élongation d'un ressort amorti en régime critique (trait plein) et en régime aperiodique (trait pointillé).

5.4. Régime aperiodique

Le régime est dit **aperiodique** lorsque l'oscillateur est tellement amorti qu'il ne peut plus osciller. Il correspond à $\alpha > 0$. La solution de l'équation différentielle est de la forme suivante :

$$x(t) = e^{-\frac{\alpha}{2m} t} \left(A e^{-t \sqrt{\frac{\alpha^2}{4m^2} - \omega_0^2}} + B e^{t \sqrt{\frac{\alpha^2}{4m^2} - \omega_0^2}} \right)$$

Le mouvement de l'oscillateur n'est plus périodique et la masse m revient dans sa position d'équilibre au bout d'un temps qui en principe tends vers l'infini. Si nous fixons les conditions initiales pour que $x(0) = x_{\max}$ et $v(0) = 0$ comme précédemment il vient :

$$A = \frac{x_{\max}}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{2m\omega} \right)$$

$$B = \frac{x_{\max}}{2} \left(1 + \frac{\alpha}{2m\omega} \right)$$

avec $\omega = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4m^2} - \omega_0^2}$.

La figure 5.11, qui illustre la comparaison entre le mouvement critique et le mouvement apériodique, montre bien que l'oscillateur retourne plus vite vers sa position d'équilibre en régime critique.

6. ANALOGIE ÉLECTRIQUE

Il est parfois commode de rapprocher le problème de l'oscillation d'un oscillateur mécanique tel que le pendule élastique amorti de celui d'un circuit électrique RLC série alimenté en signaux carrés (figure 5.12).

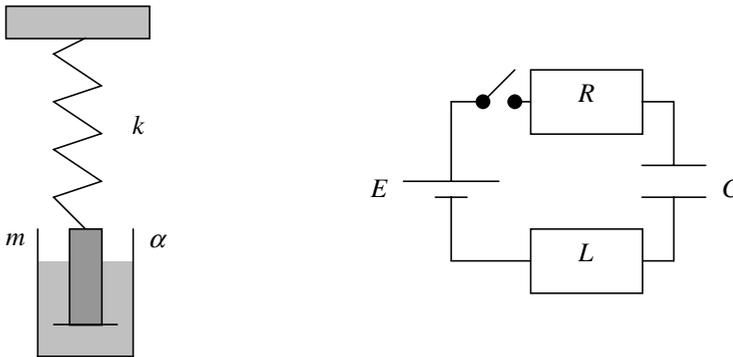


Figure 5.12 • Comparaison d'un oscillateur mécanique et d'un oscillateur électrique.

En effet, les équations différentielles pour le mouvement de la masse m et pour la charge électrique q sont formellement analogues puisqu'elles s'écrivent :

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0; \quad L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0$$

On peut ainsi constater qu'il existe une équivalence formelle entre les quantités suivantes :

$$x \rightarrow q; \quad m \rightarrow L; \quad \alpha \rightarrow R; \quad k \rightarrow \frac{1}{C}.$$

Il est ainsi intéressant de remarquer que la résistance R d'un circuit électrique joue un rôle analogue au coefficient de frottement α en mécanique.

7. OSCILLATEUR AMORTI PAR FROTTEMENT SOLIDE

Considérons un oscillateur harmonique horizontal constitué d'une masse m et d'un ressort k pour lequel une force de frottement solide est appliquée à la masse m , comme l'indique la figure 5.13.

L'application de la RFD au système masse m conduit à :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{a}_{G/R}$$

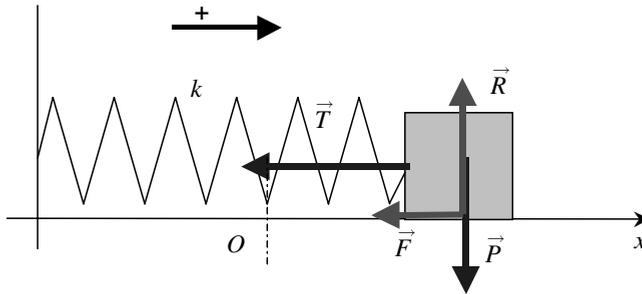


Figure 5.13 • Oscillateur horizontal à frottement solide.

Nous supposons que l'intensité de la force de frottement solide est constante au cours du mouvement de l'oscillateur et égale à $F = \mu R$. Par projection de la RFD sur l'axe des abscisses, nous obtenons l'équation différentielle du mouvement qui s'écrit :

$$m\ddot{x} + kx = \varepsilon F \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } \dot{x} < 0 \\ -1 & \text{si } \dot{x} > 0 \end{cases}$$

Il importe de remarquer que l'équation différentielle du mouvement de m change à chaque fois que m passe par une position d'arrêt, ce qui oblige à un peu de prudence dans la méthode de résolution. En effet, cela revient à résoudre l'équation différentielle par morceaux en respectant la continuité de $x(t)$ entre chaque morceau. Nous supposons que la masse m est à la position $x = X_m$ au temps $t = 0$ et qu'elle a une vitesse nulle à $t = 0$. L'équation différentielle est du deuxième ordre à second membre constant. Nous utiliserons donc la même méthode que pour une équation du premier ordre à second membre constant (voir chapitre 3).

Nous séparons le mouvement en différents tronçons correspondant au passage de la masse m par des positions extrémales (vitesse nulle). Le premier tronçon s'effectue à vitesse négative, ce qui conduit à une équation différentielle du type :

$$m\ddot{x} + kx = F$$

La somme de la solution particulière et de la solution de l'équation sans second membre est une solution générale de cette équation et s'écrit :

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{F}{k}$$

A et φ sont déterminés par les conditions initiales du mouvement qui conduisent à :

$$X_{\max} = A + \frac{F}{k} \quad \text{et} \quad \varphi = 0$$

Sur le premier tronçon nous avons donc :

$$x = \left(X_{\max} - \frac{F}{k}\right) \cos \omega_0 t + \frac{F}{k}$$

Sur le second tronçon la vitesse est ensuite positive et la masse m quitte sa position de départ donnée par :

$$X_1 = -X_{\max} + \frac{2F}{k}$$

avec une vitesse nulle. L'équation différentielle du mouvement sur ce tronçon s'écrit :

$$m\ddot{x} + kx = -F$$

Il faut encore une fois résoudre cette équation différentielle sur ce tronçon en tenant compte des nouvelles conditions initiales. Il est facile de voir que la solution générale s'écrit :

$$x = B \cos(\omega_0 t + \phi) - \frac{F}{k}$$

À $t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega_0}$, nous avons $v = 0$ et $x = X_1$, ce qui permet de déterminer B et ϕ . La solution s'écrit alors :

$$x = (X_{\max} - \frac{3F}{k}) \cos \omega_0 t - \frac{F}{k}$$

Il est possible de déterminer l'équation horaire sur chaque tronçon en poursuivant ce raisonnement. Une forme générale de la solution peut s'écrire :

$$x = (X_{\max} - (2p + 1)\frac{F}{k}) \cos \omega_0 t + (-1)^p \frac{F}{k}$$

avec $p \in \mathbb{N}$ et $p\frac{T}{2} \leq t \leq (p+1)\frac{T}{2}$.

Nous présentons sur la figure 5.14 le graphe de $x(t)$ pour un oscillateur amorti par frottement solide. Nous observons que l'amplitude des oscillations décroît linéairement au cours du temps, ce que l'on pouvait prévoir en observant qu'à chaque fois que le temps t s'accroît d'une période propre T_0 l'amplitude décroît de $4F/k$.

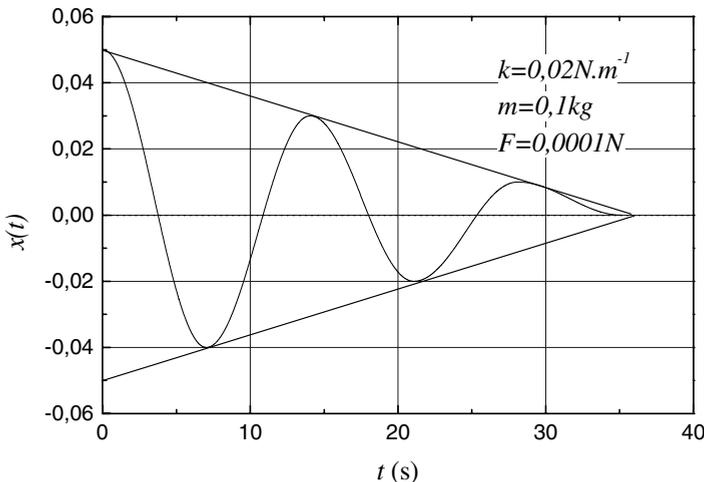


Figure 5.14 • Évolution de la position d'un oscillateur amorti par frottement solide en fonction du temps.

Encart 5.2. Énergie d'un oscillateur amorti par frottement solide

Une autre façon très élégante de résoudre ce problème est d'utiliser l'approche énergétique. L'oscillateur étant amorti, l'énergie mécanique ne se conserve pas et décroît progressivement au cours du temps. La variation d'énergie mécanique est égale au travail de la force de frottement entre deux positions de l'oscillateur. Il convient comme précédemment de raisonner sur les tronçons à vitesse positive ou négative. La force de frottement étant constante, le travail de cette force varie linéairement avec la position de l'oscillateur. Ainsi sur le premier tronçon, la variation d'énergie mécanique entre le point de départ x_{\max} et un point x quelconque est donnée par :

$$E - E_0 = E - E_{P_0} = F(x - X_{\max})$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = Fx - FX_{\max} + \frac{1}{2}kX_{\max}^2$$

La position d'arrêt X_1 de l'oscillateur sur ce tronçon est obtenue en exprimant que l'énergie cinétique de l'oscillateur en X_1 est nulle, soit :

$$\frac{1}{2}kx_1^2 = -Fx_1 + FX_{\max} + \frac{1}{2}kX_{\max}^2$$

$$\frac{1}{2}kx_1^2 + Fx_1 - (FX_{\max} + \frac{1}{2}kX_{\max}^2) = 0$$

Il est facile de voir que la position $X_1 = X_{\max}$ est solution de cette équation du second degré, ce qui correspond au point de départ de l'oscillateur, pour lequel l'énergie cinétique est également nulle. L'autre solution de cette équation est :

$$X_1 = -X_{\max} + \frac{2F}{k}$$

Nous pouvons ainsi obtenir analytiquement toutes les positions d'arrêt de l'oscillateur. En outre, une solution graphique est également possible, comme le montre la figure 5.15.

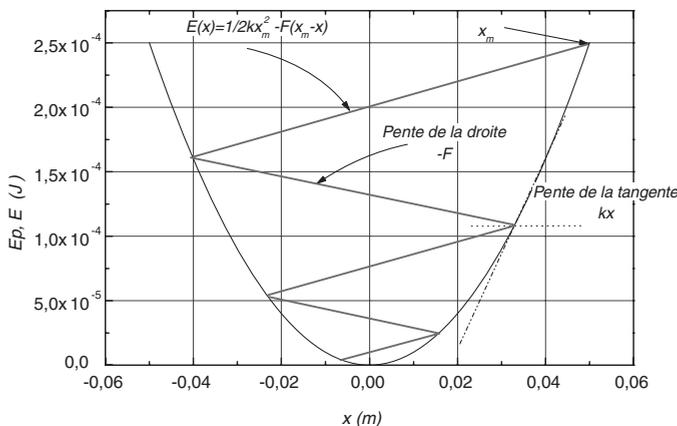


Figure 5.15 • Détermination graphique des positions extrémales atteintes par un oscillateur à frottement solide à partir des tracés de l'énergie mécanique et de l'énergie potentielle.

Les positions d'arrêt correspondent aux intersections de la courbe $E = f(x)$ avec $E_p = g(x)$. Il est également remarquable de constater que la position d'arrêt définitive de l'oscillateur peut être déterminée graphiquement. En effet cette position d'arrêt est obtenue lorsque la tension du ressort devient égale à la force de frottement solide. La

tension du ressort est, au signe près, égale à la dérivée de l'énergie potentielle élastique. Graphiquement elle est représentée en tous points par la pente de la tangente à la courbe $E_P = f(x)$. Il y aura donc arrêt définitif lorsque la pente de la tangente à la courbe $E_P = f(x)$ sera égale à la pente des droites $E = f(x)$, F ou $-F$.

Remarquons enfin, pour conclure cette section, qu'il existe deux différences notables entre l'oscillateur harmonique à frottement solide et l'oscillateur harmonique à frottement visqueux. Pour un frottement solide la période d'oscillation ne dépend pas de la force de frottement et l'amplitude maximale d'oscillation (positions d'arrêt) décroît linéairement.

8. PORTRAIT DE PHASE D'UN OSCILLATEUR

Le mouvement d'un oscillateur, qu'il soit amorti ou non, est en général décrit de façon classique en représentant l'évolution de son élongation en fonction du temps. Ce traitement classique utilisé dans les paragraphes précédents est justifié par la nature déterministe du mouvement de l'oscillateur et par le fait que l'équation différentielle du mouvement est linéaire. Nous rappelons à ce titre que l'équation est linéaire car si $x(t)$ est solution de cette équation, il en va de même pour $ax(t)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Le mouvement des oscillateurs que nous avons étudiés précédemment est régi (sauf dans le cas du frottement solide) par l'équation différentielle suivante

$$\ddot{x} + \frac{2\alpha}{m}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (5.4)$$

L'oscillateur est amorti si $\alpha > 0$ et entretenu si $\alpha < 0$. Ce dernier cas n'est pas fréquent en mécanique car les frottements fluides imposent $\alpha > 0$. Toutefois il est possible de réaliser des oscillations entretenues avec des dispositifs électroniques.

L'équation (5.4) peut se récrire :

$$\frac{d\left(m\frac{\dot{x}^2}{2} + m\frac{\omega_0^2 x^2}{2}\right)}{dx} = -2\alpha\dot{x}$$

L'équation ci-dessus n'est rien d'autre que la traduction énergétique de l'équation différentielle du mouvement. En particulier nous voyons que dans le cas d'un oscillateur harmonique pour lequel $\alpha = 0$, la quantité

$$m\frac{\dot{x}^2}{2} + m\frac{\omega_0^2 x^2}{2} = E$$

se conserve.

Nous voyons ainsi apparaître que si l'on porte sur un graphe la position de l'oscillateur en abscisse et en ordonnée sa vitesse, nous obtenons une ellipse qui définit ce que l'on appelle la **trajectoire de phase** de l'oscillateur. Le **portrait de phase** de l'oscillateur représente l'ensemble des trajectoires de phase réalisées par le même oscillateur à partir de toutes les conditions initiales réalisables¹. L'équation ci-dessus est en effet de la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\dot{x}^2}{b^2} = 1 \quad \text{à condition de poser} \quad a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}} \quad \text{et} \quad b = \sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

1. À lire : *Le portrait de phase des oscillateurs* par H. Gié et J.P. Sarmant, B.U.P. 1992, n°744, 719-755 et *De l'oscillateur harmonique à Van der Pol* par L. Sartre, B.U.P., 1998, n°804.

Pour un oscillateur harmonique, la trajectoire de phase est donc une ellipse² (figure 5.16). L'ellipse se répète indéfiniment dans le temps, ce qui est une signature de la conservation de l'énergie de l'oscillateur. Nous remarquons de plus qu'elle peut être parcourue dans un sens ou dans un autre, ce qui montre que le mouvement est invariant par renversement du temps. Pour un oscillateur harmonique donné, il est clair que le portrait de phase ne dépend que de l'énergie mécanique E de l'oscillateur.

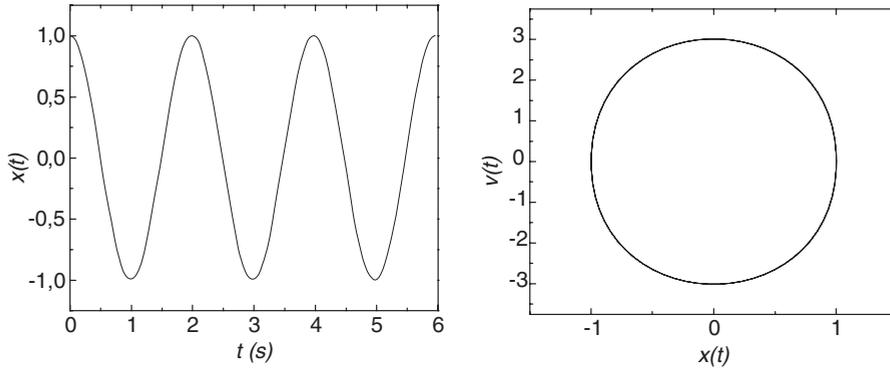


Figure 5.16 • Représentation de l'élongation de l'oscillateur harmonique en fonction du temps (à gauche) et du portrait de phase (à droite).

Pour un oscillateur amorti, l'énergie ne se conserve plus et diminue au cours du temps. L'amplitude des oscillations décroît exponentiellement au cours du temps ainsi que la vitesse. La trajectoire de phase est alors caractérisée par une spirale logarithmique dont le centre ($x = 0, v = 0$) porte le nom d'**attracteur** (figure 5.17).

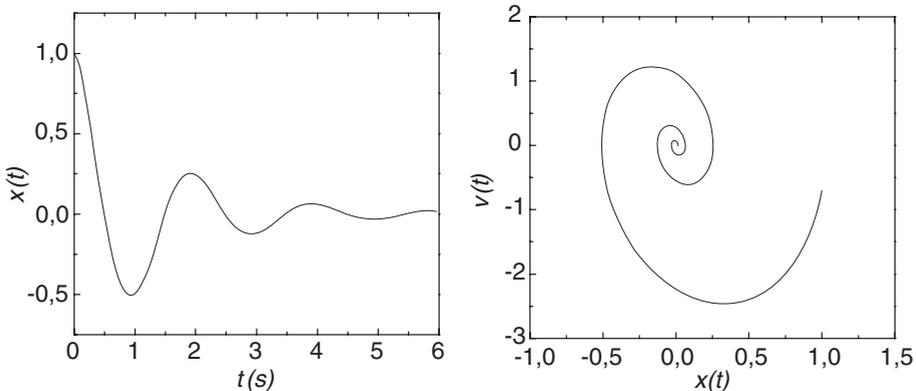


Figure 5.17 • Représentation de l'élongation de l'oscillateur amorti en fonction du temps (à gauche) et du portrait de phase (à droite).

Il n'est pas indifférent de parcourir la spirale dans un sens ou dans l'autre, ce qui montre bien que le mouvement n'est plus invariant par renversement du temps. Il est clair en effet que le frottement engendre inéluctablement l'irréversibilité du mouvement.

2. Il arrive souvent que l'on utilise comme coordonnées de l'espace des phases x et v/ω . Dans ce cas l'ellipse se transforme en cercle.

À RETENIR

► Définitions

On appelle *oscillateur harmonique* tout système dont le paramètre ou degré de liberté $x(t)$ peut se mettre sous la forme :

$$x(t) = x_{\max} \cos(\omega t + \varphi)$$

Si un oscillateur est harmonique alors

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \implies \begin{cases} x(t) = x_{\max} \cos(\omega t + \varphi) \\ x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \\ \tilde{x}(t) = x_{\max} e^{j(\omega t + \varphi)} \end{cases}$$

L'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique se conserve

$$E = E_C + E_P = cste$$

► Oscillateur mécanique à frottement visqueux

L'équation différentielle

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

présente une solution du type :

$$x(t) = Ae^{rt}$$

ce qui conduit à l'équation caractéristique suivante :

$$r^2 + \frac{\alpha}{m} r + \frac{k}{m} = 0$$

Selon la valeur du discriminant $\Delta = \frac{\alpha^2}{m^2} - 4\frac{k}{m} = \frac{\alpha^2}{m^2} - 4\omega_0^2$ de l'équation caractéristique, trois régimes sont à distinguer :

| $\Delta < 0$ | $\Delta = 0$ | $\Delta > 0$ |
|--|---------------------------------------|--|
| Régime pseudopériodique | Régime critique | Régime apériodique |
| $x = x_+ + x_-$ $x_+ = Ae^{-\frac{\alpha}{2m}t} e^{jt\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{4m^2}}}$ $x_- = Be^{-\frac{\alpha}{2m}t} e^{-jt\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{4m^2}}}$ | $x = (At + B)e^{-\frac{\alpha}{2m}t}$ | $x = x_+ + x_-$ $x_+ = Ae^{-\frac{\alpha}{2m}t} e^{t\sqrt{\frac{\alpha^2}{4m^2} - \omega_0^2}}$ $x_- = Be^{-\frac{\alpha}{2m}t} e^{-t\sqrt{\frac{\alpha^2}{4m^2} - \omega_0^2}}$ |

► Oscillateur mécanique à frottement solide

L'équation différentielle est valable par morceaux et s'écrit

$$m\ddot{x} + kx = \varepsilon F \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } \dot{x} < 0 \\ -1 & \text{si } \dot{x} > 0 \end{cases}$$

Les solutions sont à déterminer par morceaux.

► **Trajectoire de phase d'un oscillateur**

On appelle trajectoire de phase d'un oscillateur le graphe de sa vitesse en fonction de sa position.

EXERCICES D'APPLICATION AVEC SOLUTION DÉTAILLÉE

Oscillateur

Une masse m , considérée comme ponctuelle, repose sur un plan incliné d'un angle θ par rapport à l'horizontale. Elle est accrochée à l'extrémité d'un ressort de raideur k , de longueur à vide l_0 , l'autre extrémité étant fixe par rapport au plan.

Données numériques : $m = 0,1 \text{ kg}$; $\theta = 30^\circ$; $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$; $k = 10 \text{ N.m}^{-1}$.

On repère la position de la masse par rapport à sa position O d'équilibre (voir figures)

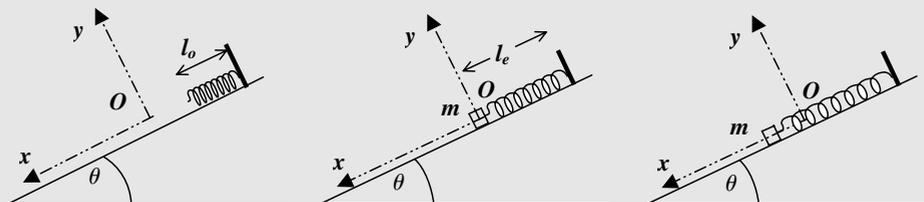


Fig. a) Ressort à vide (ni allongé, ni comprimé)

Fig. b) Position d'équilibre
 O : origine du repère pour m
 $l_e = l_0 + \Delta l_1$

Fig. c) Position $x(t)$ à l'instant t quelconque.

Figure 5.18

I. La masse m est en équilibre (fig. b)

1) On suppose qu'il n'y a pas de frottement solide entre le plan et la masse m . Faire l'étude du système et en déduire l'expression de l'allongement Δl_1 du ressort. Calculer cet allongement.

2) En réalité la mesure expérimentale Δl_2 de l'allongement du ressort correspond à la moitié de la valeur Δl_1 calculée précédemment. Pour expliquer la différence il faut introduire une force résultante f de frottement solide entre la masse et le support.

- Pourquoi n'introduit-on pas de forces de frottement de type fluide ?
- Reprendre l'étude de l'équilibre de la masse et en déduire l'expression de la force de frottement f . Calculer f .

II. La masse m est en mouvement (fig. c)

Dans tout ce qui suit, on *néglige* de nouveau les forces de frottement solide

On tire sur la masse de $X_0 = +5 \text{ cm}$ et on la lâche, à l'instant $t = 0$, sans vitesse initiale.

Étude du système (on néglige aussi les forces de frottement visqueux avec l'air).

- a) En appliquant le principe fondamental de la dynamique et en utilisant la condition d'équilibre, montrer que $x(t)$ vérifie l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique :

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0$$

Donner l'expression de la pulsation propre ω_o et de la période propre T_o . Calculer ω_o et T_o .

- b) En tenant compte des conditions initiales, donner la solution $x(t)$ et son expression numérique.

III. Approche énergétique

a) Donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur E_{pp} à un instant t quelconque, la masse se trouvant à l'abscisse x . On prendra $E_{pp}(O) = 0$

b) Donner l'expression de l'énergie potentielle élastique E_{pe} à un instant t quelconque, la masse se trouvant à l'abscisse x . On prendra $E_{pe}(O) = 0$

c) Donner l'expression de l'énergie mécanique E_m du système à un instant t quelconque, la masse se trouvant à l'abscisse x avec la vitesse \dot{x} .

d) Le système est-il conservatif? Que peut-on dire alors de E_m ? que vaut $\frac{dE_m}{dt}$?

e) À partir de l'expression de E_m obtenue précédemment au (III.c) exprimer $\frac{dE_m}{dt}$ et retrouver l'équation différentielle obtenue précédemment (II.a).

Solution

Données numériques : $m = 0,1 \text{ kg}$; $\theta = 30^\circ$; $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$; $k = 10 \text{ N.m}^{-1}$.

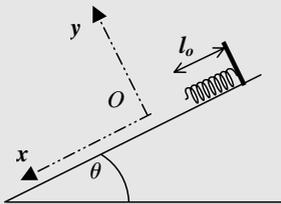


Fig. a) Ressort à vide (ni allongé, ni comprimé)

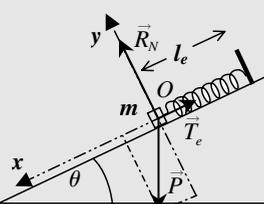


Fig. b) Position d'équilibre
O : origine du repère pour m
 $l_e = l_o + \Delta l_1$

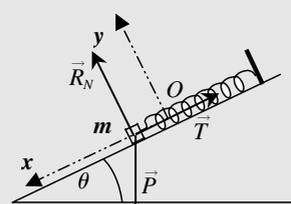


Fig. c) Position $x(t)$ à l'instant t quelconque.

Figure 5.19

I. La masse m est en équilibre (fig. b)

1) *Système* : la masse m ; *Référentiel* terrestre considéré galiléen,

Forces : poids $\vec{P} = m\vec{g}$; réaction normale du support \vec{R}_N , pas de frottement et la tension du ressort \vec{T} . Condition d'équilibre : $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R}_N = \vec{0}$

Repère (O, x, y) : $\vec{P} = m\vec{g} = mg \sin \theta \cdot \vec{u}_x - mg \cos \theta \cdot \vec{u}_y$; $\vec{R}_N = R_N \vec{u}_y$;

$$\vec{T} = -k\Delta l_1 \vec{u}_x$$

Projection sur Ox :

$$mg \sin \theta - k\Delta l_1 = 0 \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{mg \sin \theta}{k} = \frac{0,1 \cdot 10 \cdot 1/2}{10} = 0,05 \text{ m} = 5 \text{ cm}$$

2) $\Delta l_2 = \Delta l_1/2$

a) Pour un équilibre, la vitesse est nulle. Les forces de frottement fluide n'interviennent que si le système est en mouvement. Il ne peut donc y avoir que des forces de frottement solide. La masse aurait tendance à descendre donc la force f est opposée à \vec{u}_x .

b) Il faut donc ajouter $\vec{f} = -f\vec{u}_x$ et $\vec{T} = -k\Delta l_2\vec{u}_x = -k\frac{\Delta l_1}{2}\vec{u}_x = -\frac{1}{2}mg \sin \theta\vec{u}_x$.

Suivant Ox :

$$\begin{aligned} mg \sin \theta - \frac{1}{2}k\Delta l_1 - f &= 0 \Rightarrow f = mg \sin \theta - \frac{1}{2}mg \sin \theta = \frac{1}{2}mg \sin \theta \\ &= \frac{0,1 \cdot 10 \cdot 1/2}{2} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ N} \end{aligned}$$

c) Projection sur Oy :

$$R_N - mg \cos \theta = 0 \Rightarrow R_N = mg \cos \theta = \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2 = 0,866 \text{ N}$$

d) $\tan \phi = \frac{f}{R_N} = \frac{0,25}{0,866} = 0,2887 \Rightarrow \phi = 16^\circ$

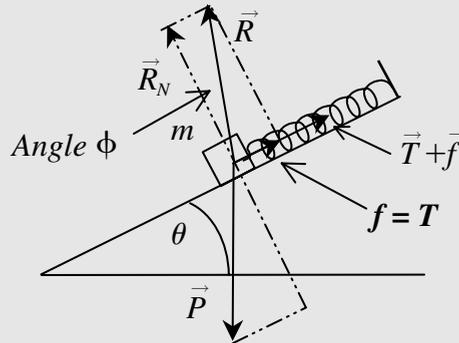


Figure 5.20

II. La masse m est en mouvement (fig. c)

On tire sur la masse de $x = X_0 = 5 \text{ cm}$ et on la lâche, à l'instant $t = 0$, sans vitesse initiale.

1) Comme I.1. avec : $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R}_N = m\vec{a}$

a) En projetant sur Ox :

$$\begin{aligned} mg \sin \theta - k(\Delta l_1 + x) &= m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \\ \Rightarrow \omega_o^2 &= \frac{k}{m} = \frac{10}{0,1} = 100 \Rightarrow \omega_o = 10 \text{ rad.s}^{-1} \end{aligned}$$

$$T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0,628 \text{ s}$$

b) $x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ et $\dot{x} = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$.

Avec

$$x(0) = X_0 = X_m \cos \varphi \quad \text{et} \quad \dot{x}(0) = -\omega_0 X_m \sin \varphi = 0,$$

on obtient :

$$x = X_0 \cos \omega_0 t = 5 \cos 10t \quad (x \text{ exprimé en cm})$$

2) Approche énergétique

a) $E_{PP} = -mgx \sin \theta$

b) $E_{Pe} = \frac{1}{2}k(\Delta l_1 + x)^2$

c) $E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx \sin \theta + \frac{1}{2}k(\Delta l_1 + x)^2$

d) Pas de frottement donc le système est conservatif : $E_m = \text{constante}$ soit $\frac{dE_m}{dt} = 0$

e) $\frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{2}2m\dot{x}\ddot{x} - mg\dot{x} \sin \theta + \frac{1}{2}2k(\Delta l_1 + x)\dot{x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$

(même résultat qu'au 2.1.)

3) Mouvement avec frottement visqueux

a) Il faut ajouter : $\vec{f}_v = -\alpha \vec{v} = -\alpha \dot{x} \vec{u}_x$. On obtient alors

$$\begin{aligned} mg \sin \theta - k(\Delta l_1 + x) - \alpha \dot{x} &= m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \\ \Rightarrow \omega_0^2 &= \frac{k}{m} = \frac{10}{0,1} = 100 \\ \Rightarrow \omega_0 &= 10 \end{aligned}$$

b) $\Delta = (12)^2 - 400 = -256 = j^2 \cdot 16^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm j16 \Rightarrow r = -6 \pm 8j$

$x(t) = \exp(-6t)[A \cos 8t + B \sin 8t]$ régime pseudo périodique avec $\omega = 8 \text{ rad.s}^{-1}$ (pseudo pulsation) et la pseudo période $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6,28}{8} = 0,785 > T_0 = 0,628 \text{ s}$

$$\dot{x}(t) = -6 \exp(-6t)[A \cos 8t + B \sin 8t] + \exp(-6t)[-8A \sin 8t + 8B \cos 8t]$$

$$\dot{x}(0) = -6A + 8B = 0 \Rightarrow 3A = 4B \text{ et } x(0) = A = X_0 = 5$$

$$x(t) = 5 \exp(-6t)[\cos 8t + 0,75 \sin 8t]$$

Oscillateurs

I. Un ressort, de raideur k et longueur à vide l_0 , pouvant travailler en compression, est posé verticalement sur le sol. Un plateau de *masse négligeable* est fixé à l'extrémité libre de ce ressort (**Fig. a**).

On pose sur le plateau une masse m (considérée ponctuelle). À l'équilibre, le ressort est comprimé d'une quantité $X_e = \Delta l_e$ (**Fig. b**).

Par la suite (**Fig. c et d**) on repère la position de la masse m par son abscisse x sur un axe Ox vertical dirigé vers le haut, l'origine O correspondant à la position d'équilibre du plateau.

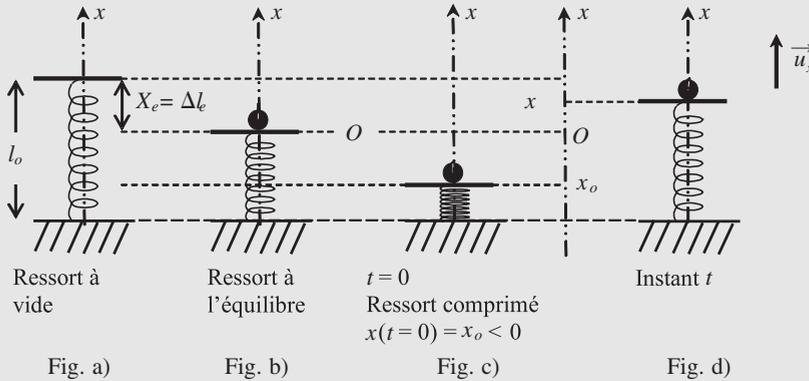


Figure 5.21

Données numériques : $k = 10 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$; $m = 0,1 \text{ kg}$; $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

I.1. Étudier le système (masse+plateau) à l'équilibre. En déduire l'expression de la compression $X_e = \Delta l_e$. Faire l'application numérique.

I.2. On comprime le ressort jusqu'à l'abscisse x_0 et à $t = 0$ on lâche le plateau sans vitesse initiale $\{x(0) = x_0 \text{ et } v(0) = 0\}$ (**Fig. c**). On suppose que la masse reste sur le plateau.

- Exprimer la tension \vec{T} du ressort à l'instant t (**Fig. d**).
- Faire l'étude du système à l'instant t (**Fig. d**) et montrer que l'équation différentielle du mouvement peut s'écrire : $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$; comment se nomme ce type d'oscillateur ?
- Donner l'expression de ω et calculer sa valeur.
- Donner l'expression générale $x(t)$ de la solution de l'équation différentielle.
- En tenant compte des conditions initiales, montrer que $x(t) = x_0 \cos \omega t$

I.3. On fixe la valeur de x_0 telle que : $x_0 = -2X_e$

- Exprimer l'abscisse $x(t)$ et l'accélération $\ddot{x}(t)$
- En considérant comme système uniquement la masse m posée sur le plateau, faire un bilan des forces. En déduire, en appliquant le principe fondamental de la dynamique, l'expression de la réaction R du plateau sur la masse en fonction de l'accélération \ddot{x} puis en fonction du temps t .
- Cette réaction peut-elle s'annuler ? Si oui, quand ? Que peut-il arriver ensuite pour la masse m ?

II. Question de cours

On considère un oscillateur constitué d'une masse m accrochée à l'extrémité d'un ressort de raideur k . La masse peut osciller suivant un axe Ox , le point O correspondant à la position d'équilibre du système, et on repère la masse par son abscisse x .

À l'instant $t = 0$ on écarte la masse de sa position d'équilibre ($x(t = 0) = x_0$) et on la lâche sans vitesse initiale ($v(t = 0) = 0$). On étudie alors l'abscisse x de la masse en fonction du temps.

On constate que la fonction $x(t)$ est de la forme :

$$x(t) = e^{-\lambda t}(X_1 \cos \omega t + X_2 \sin \omega t)$$

II.1. À quel type d'oscillateur correspond ce système ? L'oscillateur est-il harmonique ? Le régime est-il apériodique, critique ou pseudopériodique ?

II.2. Que représentent les grandeurs ω et $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (nom et unité) ?

II.3. Déterminer l'expression des constantes X_1 et X_2 en utilisant les conditions initiales.

Solution

I.

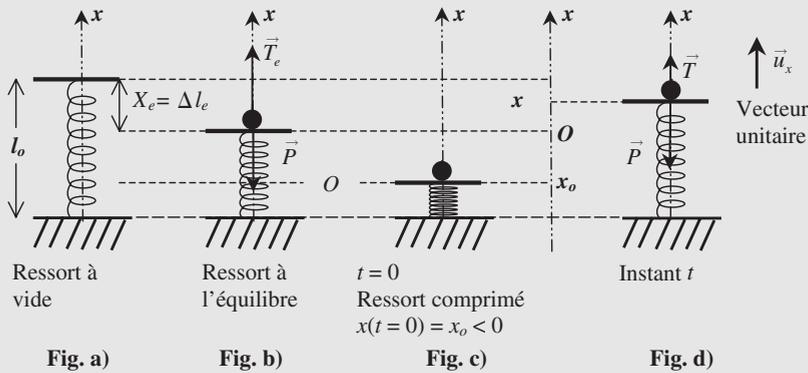


Figure 5.22

I.1. Système (masse+plateau) à l'équilibre. Référentiel terrestre galiléen.

Forces : le poids $\vec{P} = m \vec{g} = -mg \vec{u}_x$ et la tension du ressort : $\vec{T}_e = k \Delta l_e \vec{u}_x = kX_e \vec{u}_x$

À l'équilibre : $\vec{P} + \vec{T}_e = \vec{0} \Rightarrow -mg \vec{u}_x + kX_e \vec{u}_x = 0 \Rightarrow X_e = \frac{mg}{k} = 0,1 \text{ m} = 10 \text{ cm}.$

I.2. a) $\vec{T} = k(\Delta l_e - x) \vec{u}_x = (kX_e - kx) \vec{u}_x = -mg \vec{u}_x - kx \vec{u}_x$

b) Principe fondamental de la dynamique (projeter selon Ox) :

$$\vec{P} + \vec{T} = m \vec{a} \Rightarrow -mg + kX_e - kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \text{ avec } \omega^2 = \frac{k}{m}$$

Ce type d'oscillateur : c'est un oscillateur harmonique

c) $\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10 \text{ rad.s}^{-1}$

d) $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$

e) $x(0) = x_0 \Rightarrow \boxed{x_0 = X_m \cos \varphi}$ et $\dot{x}(t) = -\omega X_m \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow \boxed{\dot{x}(0) = 0 = -\omega X_m \sin \varphi}$

On en déduit donc comme solution $\varphi = 0$ $X_m = x_0$ soit $x(t) = x_0 \cos \omega t$

I.3. a) $x(t) = x_0 \cos \omega t = -2X_e \cos \omega t$; $\dot{x} = +2X_e \omega \sin \omega t$ et donc

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x_0 \cos \omega t = -\omega^2 x(t) = +2X_e \omega^2 \cos \omega t$$

b) Système uniquement la masse m posée sur le plateau, référentiel terrestre galiléen,

Bilan des forces extérieures : le poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_x$ et la réaction du plateau $\vec{R} = R\vec{u}_x$.

Principe fondamental de la dynamique : $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a} \Rightarrow -mg + R = m\ddot{x}$

En remplaçant l'accélération par son expression : $R = m(\ddot{x} + g) = m(g + 2\omega^2 X_e \cos \omega t)$

c) $R = m(\ddot{x} + g) = m(g + 2\omega^2 X_e \cos \omega t) = 0 \Rightarrow -g = 2\omega^2 X_e \cos \omega t$

$$g = -2\omega^2 X_e \cos \omega t \Rightarrow \cos \omega t = \frac{-g}{2\omega^2 X_e} = \frac{-10}{2 \cdot 100 \cdot 0,1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \omega t = \frac{2\pi}{3}$$

À l'instant $t = \frac{2\pi}{3\omega} = \frac{2\pi}{30} = 0,21$ s, la réaction s'annule.

La masse peut alors décoller du plateau

II. Question de cours

$$x(t) = e^{-\lambda t}(X_1 \cos \omega t + X_2 \sin \omega t)$$

II.1. Oscillateur faiblement amorti. L'oscillateur n'est pas harmonique. Le régime est pseudopériodique.

II.2. Pseudopulsation ω en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et la pseudo-période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ en seconde

II.3. $x(t) = e^{-\lambda t}(X_1 \cos \omega t + X_2 \sin \omega t) \Rightarrow x(0) = x_0 = X_1$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = e^{-\lambda t}[-\lambda X_1 \cos \omega t - \omega X_1 \sin \omega t - \lambda X_2 \sin \omega t + \omega X_2 \cos \omega t]$$

$$\dot{x}(0) = -\lambda X_1 + \omega X_2 = 0 \Rightarrow X_2 = \frac{\lambda}{\omega} X_1 = \frac{\lambda}{\omega} x_0$$

On a donc :

$$x(t) = x_0 e^{-\lambda t} \left(\cos \omega t + \frac{\lambda}{\omega} \sin \omega t \right)$$

Tunnel traversant la Terre

Le poids d'un corps correspond, en première approximation, à l'attraction gravitationnelle qu'exerce la Terre sur ce corps.

Dans le cas où la Terre est supposée sphérique et homogène, on peut montrer que, pour tout point P à l'intérieur de la Terre (voir figure), de masse m , situé à la distance $CP = r$ du centre C de la Terre, l'attraction terrestre est une force agissant sur ce point, dirigée vers le centre de la Terre et de mesure : $\vec{F} = -mg \frac{r}{R} \vec{u}$ avec $r \leq R$ et \vec{u} vecteur unitaire de C vers P .

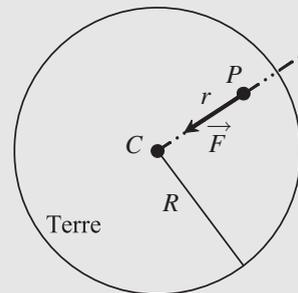


Figure 5.23

Dans cette relation, g est le champ de gravitation à la surface de la Terre et R est le rayon de la Terre.

1) En considérant, pour le point P , un petit déplacement élémentaire : $d\vec{l} = dr \cdot \vec{u}$, exprimer le travail élémentaire δW de la force \vec{F} . Montrer que ce travail élémentaire δW peut s'écrire comme l'opposé de la différentielle d'une fonction de r et appelée énergie potentielle $E_P(r)$: $\delta W = -dE_P$. Donner l'expression de E_P en fonction de m , g , r et R . On choisira l'énergie potentielle nulle au centre C .

2) On considère un tunnel rectiligne traversant la Terre. Une masse ponctuelle m peut s'y déplacer sans frottement. La distance du tunnel au centre C de la Terre est : $CH = d$. On abandonne, sans vitesse initiale, la masse m à l'entrée S du tunnel. On repère alors la position du point P par l'abscisse $HP = x$.

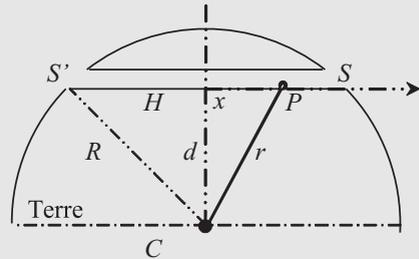


Figure 5.24

a) Donner l'expression de l'énergie potentielle E_P en fonction de la position x dans le tunnel. En déduire l'expression de l'énergie mécanique E de la masse m .

b) Exprimer la dérivée par rapport au temps de l'énergie mécanique : $\frac{dE}{dt}$. Que peut-on dire de la valeur de cette dérivée ? En déduire l'équation différentielle en x du mouvement.

c) Quelle est la nature du mouvement de m . Donner la forme de la solution $x(t)$.

d) Calculer la vitesse maximale de m en H .

A.N. : $d = 5 \cdot 10^6$ m, $R = 6,4 \cdot 10^6$ m, $g = 10$ m.s⁻².

Solution

1) Le travail élémentaire δW pour un petit déplacement élémentaire : $d\vec{l} = dr \cdot \vec{u}$ est $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l} = -mg \frac{r}{R} \vec{u} \cdot \vec{u} dr$

$$\delta W = -mg \frac{r}{R} dr = -d \left(\frac{1}{2} mg \frac{r^2}{R} \right) = -dE_P$$

Avec l'énergie potentielle nulle au centre C on a :

$$E_P(r) = \frac{1}{2} mg \frac{r^2}{R}$$

2) a) On a : $r^2 = d^2 + x^2 \Rightarrow E_P = \frac{1}{2} mg \frac{d^2 + x^2}{R}$

L'énergie mécanique : $E = E_c + E_p = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} mg \frac{d^2 + x^2}{R}$

b) $\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} 2mv \frac{dv}{dt} + \frac{1}{2} 2mg \frac{x}{R} \frac{dx}{dt} = mv\dot{x} + m \frac{g}{R} xv = mv \left(\dot{x} + \frac{g}{R} x \right)$

Le système est conservatif (par de frottement) donc l'énergie mécanique se conserve et donc la dérivée par rapport au temps est nulle. On en déduit, sachant que la vitesse v ne peut pas être identiquement nulle, :

$$mv \left(\ddot{x} + \frac{g}{R}x \right) = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{g}{R}x = 0$$

C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique

c) Mouvement sinusoïdal : $x(t) = X_M \cos(\omega t + \varphi)$

X_M et φ dépendant des conditions initiales et $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$.

Pour $t = 0$, $x(0) = HS = \sqrt{R^2 - d^2} = X_M \cos \varphi$ et $\dot{x}(0) = 0 = -\omega X_M \sin \varphi$

On en déduit : $\sqrt{R^2 - d^2} = X_M$ avec $\varphi = 0$ soit $x(t) = \sqrt{R^2 - d^2} \cos \omega t$ avec $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$

La période T : $T = 2\pi \frac{1}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$ (indépendant de la distance d). Cette période appelée période de Schuler correspond à la période d'un pendule simple dont la longueur est égale au rayon de la Terre $l = R$. ($T \approx 84$ minutes)

d) Vitesse maximale :

$$v = -\omega \sqrt{R^2 - d^2} \sin \omega t \quad \text{donc} \quad v_{\max} = \omega \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{\frac{g}{R}} (R^2 - d^2)$$

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{g}{R}} (R^2 - d^2) = \sqrt{\frac{10}{6,4 \cdot 10^6}} (6,4^2 - 5^2) 10^{12} = 5 \cdot 10^6 \text{ m.s}^{-1} = 5\,000 \text{ km.s}^{-1}$$

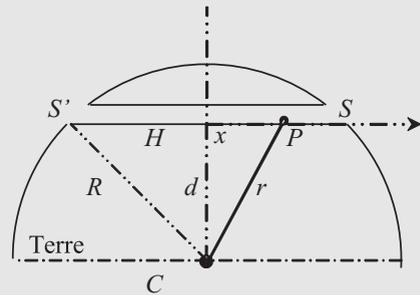


Figure 5.25

EXERCICES CORRIGÉS

- 1) 1) On met en parallèle deux ressorts de même longueur, de constante de raideur k_1 et k_2 et de masses négligeables. On exerce sur l'ensemble une force de tension T qui se communique à chacun des ressorts et allonge l'ensemble de Δl . Déterminer la constante de raideur équivalente à celle de ces deux ressorts. En déduire la période propre des oscillations d'une masse m accrochée à ces deux ressorts (on considère que les deux ressorts sont verticaux).
2) Mêmes questions si les deux ressorts sont maintenant placés bout à bout.
- 2) Un corps ponctuel de masse m est assujéti à glisser sans frottement sous l'action de son poids sur un guide circulaire de rayon a . Déterminer la période T_0 de ses petits mouvements autour de sa position d'équilibre.

- 3** Une sphère de rayon r et de masse m est suspendue à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 . Elle est plongée dans un liquide de coefficient de viscosité η et soumise alors à une force de frottement fluide donnée par la formule de Stokes :

$$\vec{F} = -6\pi\eta r \vec{v}$$

où \vec{v} est la vitesse. Dans l'air, où les frottements fluides sont négligeables sur la sphère, la période des oscillations est T_0 . Déterminer le coefficient de viscosité η en fonction de m , r , T_0 et de la pseudo-période T des oscillations dans le fluide.

- 4** Un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 , prend une longueur L quand on lui accroche un point matériel M de poids mg .

1) Exprimer la pulsation q des oscillations verticales de M .

2) Exprimer la pulsation p des petites oscillations d'un pendule de longueur L .

3) On considère les oscillations de M dans le plan vertical (xOy) , avec Oy verticale ascendante, au voisinage de la position d'équilibre O . Établir les équations différentielles du mouvement de M en supposant x et y comme des infiniment petits du 1^{ier} ordre.

4) Intégrer ces équations. Quelle condition doivent vérifier p et q pour que le vecteur \vec{OM} soit une fonction périodique ? Étudier le cas $p/q = 1/2$, $v(t=0) = 0$, $x(t=0) = a$ et $y(t=0) = b$.

Solutions

- 1** 1) Nous considérons le système constitué des deux ressorts. Si l'on exerce une force de tension \vec{T} sur les deux ressorts, ils s'allongent de Δl . On en conclut que si \vec{u}_x est un vecteur unitaire dans la direction verticale de l'allongement, alors $\vec{T} = -(k_1 + k_2)\Delta l \vec{u}_x$.

La constante de raideur de ces deux ressorts est donc $k_1 + k_2$. Si l'on attache une masse m aux deux ressorts cette masse sera soumise à :

- son poids \vec{P} ;
- la tension \vec{T} .

À l'équilibre le poids \vec{P} compense la tension \vec{T} et l'allongement des deux ressorts vérifie :

$$mg \vec{u}_x - (k_1 + k_2)\Delta l_0 \vec{u}_x = \vec{0}.$$

On en déduit que le ressort équivalent à ces deux ressorts placés en parallèle a une raideur k vérifiant $k = k_1 + k_2$.

Pour une position hors équilibre quelconque de la masse m et en prenant comme origine de l'axe des x la position d'équilibre de la masse m , le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse m conduit à :

$$mg \vec{u}_x - (k_1 + k_2)(\Delta l_0 + x) \vec{u}_x = m\ddot{x} \vec{u}_x$$

qui, compte tenu de la condition d'équilibre, entraîne $[m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x] \vec{u}_x = \vec{0}$. Le vecteur \vec{u}_x étant un vecteur unitaire cette équation devient : $[m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x] = 0$, ce qui est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de période propre T , $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$.

2) Dans ce cas la tension des deux ressorts est la même mais leur allongement Δl est différent. Nous avons donc :

$$\vec{T}_1 = -k_1\Delta l_1 \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{T}_2 = -k_2\Delta l_2 \vec{u}_x.$$

À l'équilibre, sous l'action de la masse m , nous avons :

$$mg\vec{u}_x - k_2\Delta l_{20}\vec{u}_x = mg\vec{i} - k_1\Delta l_{10}\vec{u}_x = \vec{0}.$$

Nous déduisons que l'allongement total pris par les deux ressorts mis bout à bout est : $\Delta l_{20} + \Delta l_{10} = mg\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)$.

Un ressort unique équivalent à ces deux ressorts s'allongerait de $\Delta l_0 = \frac{mg}{k}$, ce qui permet d'affirmer que l'on peut remplacer les deux ressorts par un ressort de raideur k vérifiant : $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$. La période d'oscillation de la masse est donc $T = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1+k_2)}{k_1k_2}}$.

2 L'énergie mécanique de la masse m se conserve. C'est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de pesanteur, soit : $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + mga(1 - \cos\theta)$, car pour un guide circulaire $v = a\dot{\theta}$. La dérivée par rapport au temps de l'énergie est nulle puisque E est constante, soit : $\frac{dE}{dt} = 0 \implies ma^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mga\sin\theta\dot{\theta} = 0$ ce qui, pour θ petit, conduit à $ma^2\ddot{\theta} + mga\theta = 0$.

Cette équation différentielle est celle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a}}$. La période propre des petites oscillations est donc $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$.

3 Dans l'air la période des oscillations est donnée par $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\pi}{k}}$.

Dans le fluide, on considère la masse m dans le référentiel galiléen R du laboratoire ; elle est soumise aux trois forces suivantes :

- \vec{P} son poids appliqué en G ;
- \vec{T} tension du ressort appliquée au point de contact ;
- \vec{F} localisée sur toute la surface de la bille.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au système bille conduit à :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F} = m\vec{a}_{G/R}.$$

Si l'on appelle z l'axe vertical descendant du référentiel R , nous avons :

$$mg - k(z + \Delta l_0) - 6\pi r\eta\dot{z} = m\ddot{z},$$

ce qui compte tenu des conditions d'équilibre ($mg = k\Delta l_0$), conduit à l'équation différentielle :

$$m\ddot{z} + 6\pi r\eta\dot{z} + kz = 0.$$

Cette équation admet une solution sinusoïdale amortie si le frottement fluide est faible. Dans ce cas, la pseudopulsation est donnée par :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{3\pi r\eta}{m}\right)^2} = \omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{3\pi r\eta}{\omega_0 m}\right)^2} \implies 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = \left(\frac{3\pi r\eta}{\omega_0 m}\right)^2.$$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{T_0}{T}\right)^2} = \frac{3\pi r\eta}{\omega_0 m}.$$

La viscosité du fluide est donc donnée par

$$\eta = \frac{\omega_0 m}{3\pi r}\sqrt{1 - \left(\frac{T_0}{T}\right)^2} = \frac{2m}{3rT_0}\sqrt{1 - \left(\frac{T_0}{T}\right)^2}.$$

$$\eta = \frac{2m}{3r}\sqrt{\frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{T^2}}.$$

CHAPITRE 6

OSCILLATIONS FORCÉES, RÉSONANCE

Pré-requis

- Il importe avant d'aborder ce chapitre de bien connaître les résultats du chapitre précédent. La notation complexe est ici primordiale.

Objectif

- ▶ Comprendre qu'un oscillateur peut en étant excité et sous certaines conditions d'amortissement entrer en résonance.
- ▶ Assimiler la notion de résonance en mécanique en faisant la différence entre l'évolution de l'amplitude et celle de la vitesse en fonction de la fréquence.
- ▶ Comprendre le bilan énergétique d'un oscillateur forcé.

L'amortissement des oscillations est un phénomène inéluctable auquel il convient parfois de remédier. En effet, il importe parfois d'entretenir les oscillations d'un oscillateur comme par exemple celles d'une horloge à balancier ou tout simplement celles d'une balançoire. Lorsque le mouvement d'oscillation est entretenu périodiquement, on dit que les oscillations sont **forcées** par opposition au cas où elles sont non entretenues où elles sont qualifiées de **libres**.

1. OSCILLATIONS FORCÉES

1.1. Montage expérimental

Pour étudier les oscillations forcées d'un oscillateur, il est nécessaire d'exciter l'oscillateur périodiquement dans le temps. Le montage présenté figure 6.1 permet d'exciter de façon sinusoïdale un ressort de raideur k au bout duquel est accrochée une masse m .

Le moteur tourne à la vitesse angulaire ω constante et il entraîne la masse m dans un mouvement de va-et-vient périodique. Ce mouvement de va-et-vient est obtenu en attachant un fil au ressort dans une position excentrée de e de l'axe de rotation du moteur. On constate expérimentalement qu'en régime permanent la masse m suit le mouvement du moteur en oscillant à la même fréquence que celle du moteur. Pour une fréquence d'excitation proche de la fréquence propre de l'oscillateur harmonique, l'amplitude de vibration de la masse m devient maximale. On dit que l'oscillateur entre en **résonance**. Par la suite le moteur sera qualifié d'excitateur et la masse accrochée au ressort de **résonateur**.

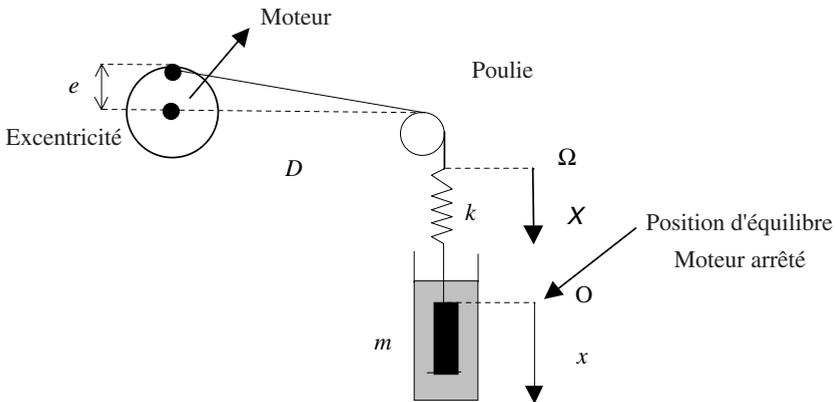


Figure 6.1 • Schéma de principe d'un montage permettant l'étude des oscillations forcées en mécanique.

1.2. Équation différentielle du mouvement

Nous considérons le mouvement de la masse m dans un référentiel Galiléen lié au sol $R(O, x, t)$ avec le vecteur \vec{i} vecteur unitaire servant de base à R . L'origine du référentiel est prise sur la position d'équilibre de la masse pour laquelle l'allongement du ressort est Δl_0 . À l'équilibre le poids \vec{P} de la masse m compense la tension \vec{T} du ressort (figure 6.2) soit :

$$mg - k\Delta l_0 = 0$$

Pour une position arbitraire $x(t)$ de l'oscillateur et lorsque le moteur est bloqué, la masse m est soumise à son poids \vec{P} , à la force de tension \vec{T} du ressort dont l'allongement est $(x + \Delta l_0)$, à la force de frottement visqueux. Dès que le moteur tourne, le fil fait subir au ressort une force supplémentaire qui tire ou pousse le ressort selon la position de l'excentrique. Cette force engendre un allongement $(x(t) - X(t) + \Delta l_0)$ du ressort. Il importe de noter que dans cette expression les quantités $x(t)$ et $X(t)$ sont des quantités algébriques. Ainsi sur le schéma de la figure 6.2 et dans la position où le moteur tourne nous avons $x(t) > 0$ et $X(t) < 0$.

L'application de la relation fondamentale de la dynamique conduit à l'équation différentielle du mouvement donnée par :

$$\vec{F} + \vec{F}_e + \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}_{G/R}$$

L'allongement du ressort est alors :

$$x(t) - X(t) + \Delta l_0$$

où $X(t)$ correspond au déplacement, par rapport à la position d'équilibre, de l'extrémité du ressort reliée au moteur.

Par projection sur l'axe des abscisses, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$m\ddot{x} = -k(\Delta l_0 + x - X(t)) + \alpha\dot{x} + mg$$

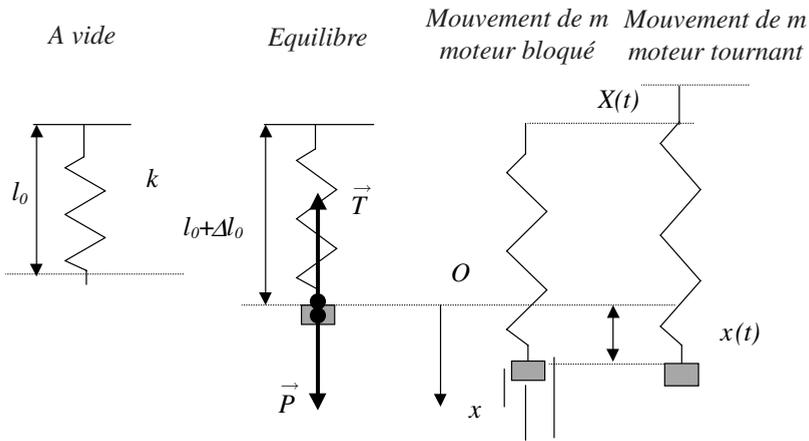


Figure 6.2 • Représentation de l’allongement du ressort dans différents cas de déplacement de la masse m et pour différents mouvements de rotation du moteur.

En tenant compte de la condition d’équilibre, il vient :

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = kX(t) \tag{6.1}$$

Encart 6.1. Déplacement $X(t)$ de l’extrémité supérieure du ressort

L’équation (6.1) est l’équation différentielle de l’oscillateur entretenu. Nous voyons qu’elle est équivalente à l’équation d’un oscillateur libre qui est le membre de gauche dans laquelle il faut ajouter une force $F(t) = kX(t)$ dans le membre de droite. Cette force fait clairement intervenir l’allongement spécifique du ressort lié à la rotation du moteur. Elle peut être explicitée quantitativement dans le cas de ce montage expérimental. En effet, il est possible d’exprimer $X(t)$ en fonction de la vitesse angulaire de rotation du moteur et de l’excentricité e .

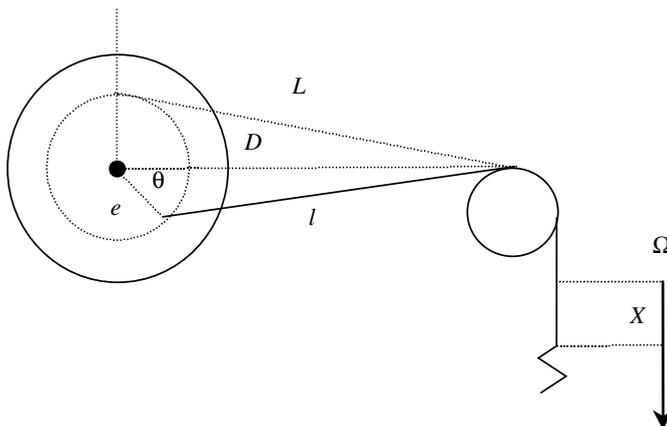


Figure 6.3 • Interprétation du mouvement $X(t)$ de l’extrémité supérieure du ressort.

Nous appellerons L la longueur du fil, à l'équilibre, entre le point d'attache sur le moteur et la poulie et l cette longueur pour une position quelconque repérée par l'angle θ (figure 6.3). Nous supposons $D \gg e$ ce qui permet de faire un développement limité au premier ordre par rapport à e/D . Dans ces conditions, nous avons :

$$X = L - l = (D^2 + e^2)^{1/2} - (D^2 + e^2 - 2eD \cos \theta)^{1/2} \simeq e \cos \theta$$

Si le moteur tourne à la vitesse angulaire constante ω , nous pouvons écrire :

$$X(t) = e \cos \omega t$$

Le terme $kX(t)$ du second membre de l'équation différentielle qui est homogène à une force s'écrit donc :

$$F(t) = kX(t) = ke \cos \omega t = F_0 \cos \omega t \quad (6.2)$$

$F_0 = ke$ représente l'amplitude maximale de la force excitatrice. Il apparaît donc clairement que ce montage permet de réaliser un générateur de force sinusoïdale. L'équation différentielle peut donc écrire :

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

2. SOLUTION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

2.1. Étude de l'amplitude

Après quelques oscillations qui correspondent à un régime transitoire, le système adopte en régime permanent un mouvement de type sinusoïdal dont la pulsation est la même que la pulsation de la force excitatrice mais dont la phase diffère de celle de la force excitatrice. Il est donc logique d'écrire que la solution du régime permanent est du type :

$$x(t) = X_0 \cos(\omega t + \phi)$$

La détermination des quantités X_0 et ϕ se fait en reportant cette solution dans l'équation différentielle.

De même, la solution du régime transitoire est la solution de l'équation différentielle sans second membre dont nous avons vu qu'elle conduit à l'expression suivante :

$$x_i(t) = Ae^{-\frac{\alpha t}{2m}} \cos(\omega' t + \phi)$$

avec $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{4m^2}}$ (voir chapitre 5). La solution générale de l'équation différentielle est la somme de ces deux solutions. Cependant, il est clair que la contribution du régime transitoire devient très vite négligeable par rapport à celle du régime permanent, en raison du terme exponentiel présent dans cette expression. Pour cette raison nous ne nous intéresserons qu'au régime permanent que nous appellerons le **régime forcé**.

Pour des raisons pratiques, il est commode d'utiliser la représentation complexe. On écrit alors que :

$$\begin{aligned}x(t) &= X_0 e^{j(\omega t + \phi)} \\ F(t) &= F_0 e^{j\omega t}\end{aligned}$$

En transposant dans l'équation différentielle du mouvement il vient :

$$X_0 e^{j(\omega t + \phi)} (-m\omega^2 + j\omega\alpha + k) = F_0 e^{j\omega t}$$

En utilisant la pulsation propre de l'oscillateur harmonique et en simplifiant par la partie dépendante du temps on aboutit à :

$$X_0 e^{j\phi} (\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\alpha}{m}) = \frac{F_0}{m}$$

avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

De cette équation complexe on peut tirer la valeur de X_0 et de ϕ . En prenant le module de l'équation nous obtenons :

$$X_0(\omega) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2\alpha^2}{m^2}}}$$

soit encore

$$X_0(\omega) = \frac{e\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2\alpha^2}{m^2}}}$$

En raisonnant sur les arguments des nombres complexes nous obtenons la valeur de la tangente de la phase ϕ :

$$\tan \phi(\omega) = -\frac{\omega\alpha}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Les expressions ci-dessus montrent que l'amplitude et la phase de l'oscillateur entretenu dépendent de la pulsation de l'excitateur. En particulier, l'amplitude des oscillations passe par un maximum dont la position est déterminée par l'équation suivante :

$$\frac{dX_0(\omega)}{d\omega} = 0$$

Le calcul de la dérivée ne pose pas de problème majeur et l'équation ci-dessus est vérifiée lorsque

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{2m^2}$$

L'amplitude passe donc par un maximum non nul si la condition $\omega_0 > \frac{\alpha}{m\sqrt{2}}$ est vérifiée. La figure 6.4 montre l'évolution de l'amplitude et de la phase en fonction de la fréquence.

Il est important de noter que l'amplitude des oscillations passe par un maximum au voisinage de la pulsation propre de l'oscillateur harmonique non entretenu ce qui correspond à un phénomène qui, de façon impropre (pour des raisons que nous évoquerons plus tard), est qualifié de **résonance**. L'acuité de ce phénomène dépend fortement du coefficient de frottement α . Si celui est très faible on dit que la résonance est *aiguë* ; c'est notamment le cas pour la valeur $\alpha = 0,01$ de la figure 6.4. Quand α augmente la résonance devient *floue*. De plus l'observation du maximum n'est possible que si le coefficient de frottement

reste assez faible. Le maximum n'est plus visible sur la figure 6.4 pour $\alpha = 0,1$. La position de ce maximum d'amplitude s'éloigne de la valeur $\omega = \omega_0$ dès que le coefficient de frottement augmente comme on peut le voir pour $\alpha = 0,04$. Nous noterons qu'à très basse fréquence l'amplitude du résonateur correspond à la valeur de l'excentrique e . De même, à haute fréquence nous constatons que l'amplitude du résonateur tend vers zéro.

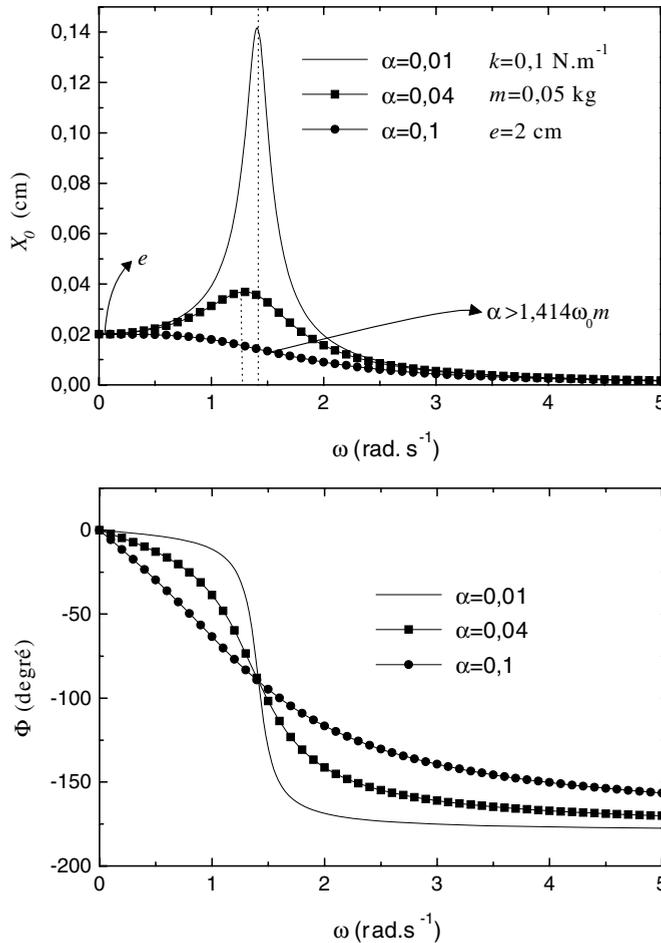


Figure 6.4 • Courbes donnant l'amplitude et la phase de l'oscillateur en fonction de la pulsation de l'excitateur pour différentes valeurs de l'amortissement. On notera que l'amplitude passe par un maximum pour une valeur proche mais inférieure à la pulsation propre sauf si l'amortissement devient trop fort. Il convient de noter qu'à basse fréquence l'excitateur est en phase avec le résonateur puis vibre en opposition de phase avec celui-ci à haute fréquence. À la fréquence propre les deux systèmes sont en quadrature.

Nous constatons que la phase du résonateur varie de façon très importante avec la valeur de la pulsation excitatrice. Tant que la fréquence d'excitation est faible, le résonateur « suit » le mouvement et vibre en phase avec l'excitateur. Ce régime est facile à observer car quand la masse m monte il en va de même pour l'extrémité haute du ressort. Progressivement la différence de phase croît pour atteindre 180° à haute fréquence. Le résonateur est

alors en opposition de phase avec l'excitateur. Là encore l'observation du phénomène est facile : quand la masse descend le haut du ressort monte et vice versa. À la résonance, le résonateur est en quadrature par rapport à l'excitateur et il est alors plus difficile de visualiser clairement les mouvements respectifs du résonateur et de l'excitateur. Cette difficulté est accrue par le fait que le résonateur se déplace très vite.

Nous venons de voir qu'à la résonance, l'amplitude des oscillations du résonateur passe par un maximum. Toutefois nous observons que ce phénomène ne se produit pas toujours à la même fréquence, en particulier si l'amortissement change. Cette observation impose d'être prudent sur la terminologie du mot résonance. En effet, nous allons voir que la vitesse du résonateur passe, elle, par un maximum lorsque la pulsation de l'excitateur est rigoureusement égale à la pulsation propre du résonateur et ceci quelle que soit la valeur de l'amortissement. De plus, c'est à cette fréquence que le transfert d'énergie entre l'excitateur et le résonateur est optimal. La résonance en mécanique est donc de façon rigoureuse plus une résonance de vitesse que d'amplitude. Toutefois, comme il est plus facile d'étudier l'amplitude du mouvement plutôt que la vitesse instantanée du résonateur, il est d'usage d'appréhender la résonance en mécanique par l'étude de l'amplitude. Nous étudions maintenant le comportement de la vitesse du résonateur en fonction de la pulsation de l'excitateur.

2.2. Résonance de vitesse

Par définition, la vitesse de l'oscillateur est égale à la dérivée de la position soit :

$$v = \frac{dx}{dt} = j\omega X_0 e^{j(\omega t + \phi)} = \omega X_0 e^{j(\omega t + \phi + \pi/2)}$$

Il est facile de voir que l'on peut écrire la vitesse de la façon suivante :

$$v(t) = V_0 e^{j(\omega t + \phi_v)}$$

à condition de poser : $V_0 = \omega X_0$ et $\phi_v = \phi + \frac{\pi}{2}$

L'équation différentielle du mouvement de l'oscillateur s'écrit en termes de vitesse :

$$m \frac{dv}{dt} + \alpha v + k \int v dt = F_0 e^{j\omega t}$$

Le report de l'expression de la vitesse dans cette équation conduit à :

$$V_0 e^{j(\omega t + \phi_v)} \left(m j \omega + \alpha + \frac{k}{j \omega} \right) = F_0 e^{j\omega t}$$

ce qui aboutit à : $V_0(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{\alpha^2 + (m\omega - \frac{k}{\omega})^2}}$ et $\tan \phi_v(\omega) = -\frac{m\omega - \frac{k}{\omega}}{\alpha}$

Ces relations montrent que si la pulsation ω de l'excitateur est égale à la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ de l'oscillateur, alors la force et la vitesse sont en phase. De plus la vitesse $V_0(\omega_0)$ est alors maximale ; on dit qu'il y a **résonance de vitesse**. À la résonance de vitesse nous avons donc :

$$\phi_v(\omega_0) = 0 \quad \text{et} \quad V_0(\omega_0) = V_{\max} = \frac{F_0}{\alpha}$$

Contrairement à ce qui se passe pour l'amplitude, la résonance de vitesse se produit toujours lorsque la pulsation de l'excitateur est égale à la pulsation propre de l'oscillateur.

Nous retiendrons qu'à la résonance mécanique, la vitesse de l'oscillateur est en phase avec la force excitatrice et que l'amplitude de la vitesse passe par un maximum.

Les figures 6.5 et 6.6 représentent l'évolution de l'amplitude et de la phase de la vitesse en fonction de la pulsation.

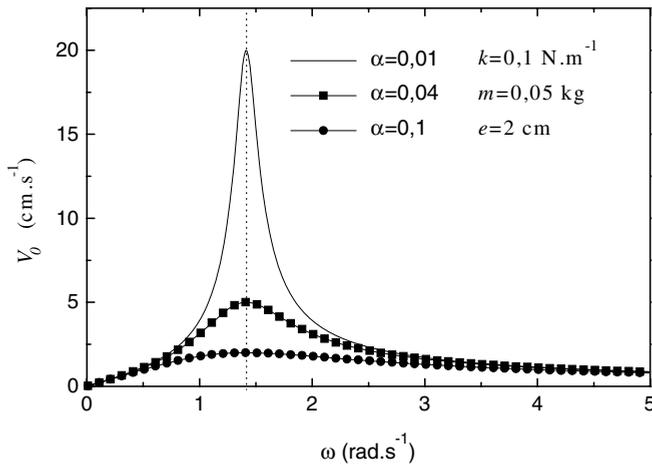


Figure 6.5 • Évolution de la vitesse du résonateur en fonction de la pulsation de l'excitateur pour différentes valeurs de l'amortissement. Il convient de noter que la résonance de vitesse se produit toujours à la pulsation propre du résonateur et qu'elle est d'autant plus aiguë que l'amortissement est faible.

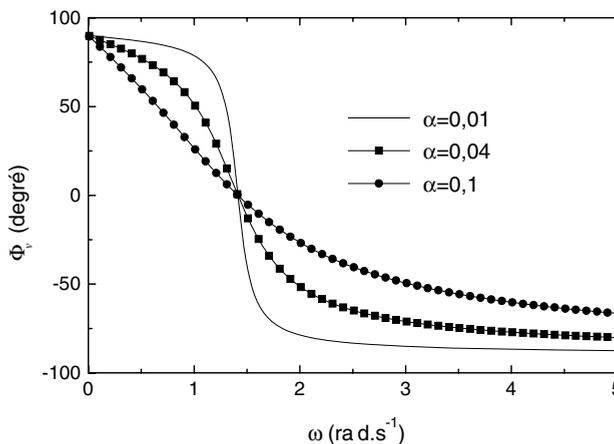


Figure 6.6 • Évolution de la phase de la vitesse du résonateur par rapport à la phase de l'excitateur en fonction de la pulsation de l'excitateur pour différentes valeurs de l'amortissement. Il convient de noter qu'à la résonance la vitesse du résonateur et la force excitatrice sont en phase.

Nous voyons également que la phase de la vitesse est simplement translatée de $\pi/2$ par rapport à celle de l'amplitude.

Encart 6.2. Impédance mécanique

L'étude de la résonance de vitesse montre qu'à force excitatrice constante la vitesse passe par un maximum lorsque la pulsation de l'excitateur est égale à la pulsation propre du résonateur. Par analogie avec l'électricité, il est utile d'introduire la notion d'*impédance mécanique* Z définie par :

$$F = Z(\omega)v$$

Cette relation est formellement équivalente à la loi d'Ohm en électricité $u = Zi$ dans laquelle Z est l'impédance électrique. En revenant à la définition de la vitesse et de la force (voir début du paragraphe 2) nous voyons que

$$V_0 e^{j(\omega t + \phi_v)} (mj\omega + \alpha + \frac{k}{j\omega}) = F_0 e^{j\omega t}$$

soit

$$Z(\omega) = \alpha + j \left(m\omega - \frac{k}{\omega} \right)$$

Si l'on passe au module l'équation précédente devient :

$$F_0 = |Z(\omega)| V_0(\omega)$$

ce qui conduit à

$$V_0(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{\alpha^2 + (m\omega - \frac{k}{\omega})^2}} \quad (6.3)$$

$$\tan \phi_v(\omega) = -\frac{m\omega - \frac{k}{\omega}}{\alpha} \quad \text{ou} \quad \cos \phi_v = \frac{\alpha}{|Z(\omega)|}$$

À la résonance, la vitesse passe par un maximum à force constante, ce qui impose à l'impédance mécanique d'être minimale et de prendre la valeur :

$$|Z(\omega_0)| = \alpha$$

3. TRANSFERT DE PUISSANCE

3.1. Puissance instantanée

L'impédance mécanique est une quantité qui traduit l'opposition d'un système mécanique à se déplacer à une certaine vitesse sous l'action d'une force. Quand l'impédance est minimale, l'opposition est faible et la vitesse peut devenir grande. Ainsi la résonance se produit en mécanique parce que le transfert de la puissance de l'excitateur est maximal vers le résonateur quand la fréquence d'excitation est égale à la fréquence propre. En effet, nous savons que la puissance est définie par :

$$P_{\vec{F}}(t) = \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t)$$

Il s'ensuit que la puissance instantanée fournie par la force excitatrice est donnée par

$$P_{\vec{F}}(t) = F_0 \cos(\omega t) V_0 \cos(\omega t + \phi_v)$$

Nous noterons que pour faire ce type de calcul il importe de bien considérer les parties réelles des quantités complexes. En effet la partie réelle d'un produit de deux nombres complexes n'est pas égale au produit des parties réelles de ces deux nombres. C'est cette dernière quantité qui nous intéresse dans ce calcul.

En utilisant l'expression de V_0 (6.3) et en développant le produit des cosinus, nous déduisons que

$$P_{\vec{F}}(t) = \frac{F_0^2}{2\sqrt{\alpha^2 + (m\omega - \frac{k}{\omega})^2}} [\cos(2\omega t + \phi_v) + \cos(\phi_v)]$$

ce qui montre bien que le transfert de puissance est maximal à la résonance. En outre on peut vérifier que la puissance moyenne fournie par la force excitatrice compense la puissance développée par la force de frottement.

3.2. Puissance moyenne

La puissance moyenne fournie par la force \vec{F} se calcule en prenant la valeur moyenne de la puissance sur une période T , ce qui s'écrit :

$$\langle P_{\vec{F}}(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P_{\vec{F}}(t) dt$$

Il s'ensuit que

$$\langle P_{\vec{F}}(t) \rangle = \frac{F_0^2}{2\sqrt{\alpha^2 + (m\omega - \frac{k}{\omega})^2}} \cos(\phi_v) = \frac{F_0^2}{2|Z(\omega)|} \cos(\phi_v)$$

soit en utilisant (6.3)

$$\langle P_{\vec{F}}(t) \rangle = \alpha \frac{V_0^2(\omega)}{2}$$

La puissance développée par la force de frottement s'écrit :

$$P_{\vec{f}}(t) = \vec{f} \cdot \vec{v} = -\alpha \vec{v} \cdot \vec{v} = -\alpha V_0^2 \cos^2(\omega t + \phi_v)$$

ce qui conduit à une puissance moyenne

$$\langle P_{\vec{f}}(t) \rangle = -\alpha \frac{V_0^2(\omega)}{2}$$

Nous concluons donc que la puissance fournie par l'excitateur compense bien la puissance développée par la force de frottement. De plus, *la résonance mécanique est définie par la valeur de la pulsation qui permet le transfert maximal de puissance entre l'excitateur et le résonateur*. Il s'ensuit que la résonance se produit quand $V_0(\omega)$ passe par un maximum ce qui est vérifié quand $\omega = \omega_0$.

Nous avons vu dans les paragraphes précédents que l'amortissement jouait un rôle primordial sur l'acuité de la résonance. Il est possible de rendre la notion d'acuité plus quantitative en introduisant la notion de facteur de qualité.

4. FACTEUR DE QUALITÉ

Comme en électricité, il est possible de qualifier l'acuité de la résonance de vitesse par un **facteur de qualité** Q . Pour cela on considère les pulsations ω_1 et ω_2 pour lesquelles on a :

$$V_0(\omega_1) = V_0(\omega_2) = \frac{V_0(\omega_0)}{\sqrt{2}}$$

Ces deux pulsations peuvent facilement se mesurer sur la courbe de résonance de vitesse comme le montre la figure 6.7 et elles définissent la **bande passante** en pulsation :

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$$

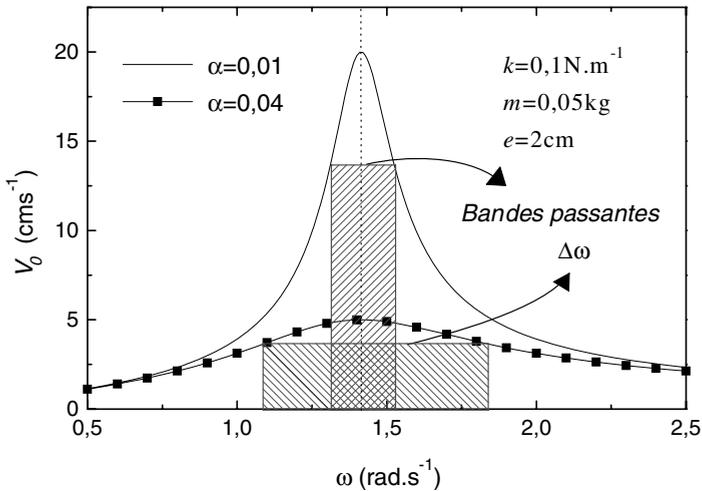


Figure 6.7 • Représentation en hachurés des bandes passantes observées pour deux valeurs de l'amortissement.

Le facteur de qualité se définit alors par :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad (6.4)$$

Les deux pulsations qui limitent la bande passante peuvent être déterminées analytiquement. La définition de la bande passante à partir de la vitesse conduit à :

$$\alpha^2 + \left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)^2 = 2\alpha^2 \implies m\omega - \frac{k}{\omega} = \pm\alpha \quad (6.5)$$

Les solutions physiquement acceptables (pulsation positive) donnent :

$$\omega_1 = -\frac{\alpha}{2m} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 + \omega_0^2}$$

$$\omega_2 = \frac{\alpha}{2m} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 + \omega_0^2}$$

ce qui conduit à :

$$\Delta\omega = \frac{\alpha}{m} \implies Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{k}{\alpha\omega_0}$$

Remarques

Nous revenons maintenant sur la résonance d'amplitude qui, rappelons-le, est la plus facile à mesurer. Nous avons vu que l'amplitude maximale des oscillations dépendait de la pulsation. En particulier lorsque la pulsation est égale à la pulsation propre de l'oscillateur nous avons :

$$X_0(\omega_0) = \frac{F_0}{\alpha\omega_0} \implies X_0(\omega_0) = \frac{ke}{\alpha\omega_0} = Qe$$

Nous voyons ainsi que le facteur de qualité représente simplement le rapport de l'amplitude maximale à la pulsation propre sur la valeur de l'excentrique e . Cette observation est particulièrement utile pour déterminer le facteur de qualité Q . En effet la valeur de e se mesure facilement, de même que celle de $X_0(\omega_0)$. Si l'on revient à la figure 6.4, on voit par exemple que pour $\alpha = 0,01$, l'amplitude maximale à la pulsation propre est de 14 cm pour un excentrique de 2 cm. Le facteur de qualité est donc de 7, ce qui est confirmé par le calcul direct.

Si Q est grand, la tension du ressort peut devenir très importante devant la force excitatrice. L'amplitude devenant très grande, il y a un risque de rupture du ressort. Il faut donc faire extrêmement attention, quand on étudie un oscillateur, à ne pas passer par la résonance quand le coefficient d'amortissement α est très petit. C'est le cas d'une masse attachée à un ressort excitée par l'excentrique dans l'air, pour lequel le facteur de qualité peut être très grand (de l'ordre de 1 000).

À RETENIR

► Étude de l'amplitude

Équation différentielle d'un oscillateur entretenu

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

En passant en notation complexe et en posant $x(t) = X_0 e^{j(\omega t + \phi_a)}$ on obtient

$$X_0 = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2\alpha^2}{m^2}}} \quad \text{et} \quad \tan \phi_a = -\frac{\omega\alpha}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

► Étude de la vitesse

L'équation qui donne l'amplitude et la phase de la vitesse est

$$V_0 e^{j(\omega t + \phi_v)} (mj\omega + \alpha + \frac{k}{j\omega}) = F_0 e^{j\omega t}$$

ce qui aboutit à :

$$V_0(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{\alpha^2 + (m\omega - \frac{k}{\omega})^2}} \quad \text{et} \quad \tan \phi_v(\omega) = -\frac{m\omega - \frac{k}{\omega}}{\alpha}$$

► Résonance

Il y a résonance quand la force excitatrice et la vitesse sont en phase. À la résonance de vitesse nous avons donc :

$$\phi_v(\omega_0) = 0 \quad \text{et} \quad V_0(\omega_0) = \frac{F_0}{\alpha}$$

► Impédance mécanique

On appelle impédance mécanique le rapport $Z(\omega) = \frac{F}{v}$.

À la résonance, l'impédance mécanique est minimale et vaut $Z(\omega) = \alpha$. Le transfert de puissance entre l'excitateur et le résonateur est alors maximal.

► Facteur de qualité

Le facteur de qualité se définit par :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

avec $\Delta\omega$ représentant la bande passante de la courbe de résonance de vitesse, c'est-à-dire la différence de pulsation correspondant à

$$V_0(\omega_1) = V_0(\omega_2) = \frac{V_0(\omega_0)}{\sqrt{2}}$$

On démontre que

$$\Delta\omega = \frac{\alpha}{m} \implies Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{k}{\alpha\omega_0}$$

ce qui montre que le facteur de qualité est très élevé si le coefficient de frottement α est faible (résonance aiguë).

EXERCICES D'APPLICATION AVEC SOLUTION DÉTAILLÉE

Oscillateurs

Une masse m , considérée comme ponctuelle, repose sur un plan horizontal. Elle est accrochée à l'extrémité d'un ressort de raideur k , de longueur à vide l_0 , l'autre extrémité étant fixe par rapport au plan.

On repère la position de la masse par rapport à sa position O d'équilibre (voir figure)

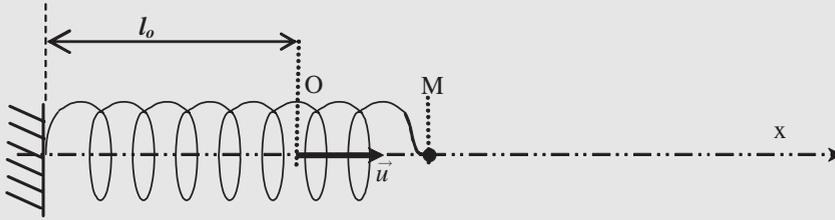


Figure 6.8

On repère la position M de la masse m à la date t par $\overrightarrow{OM} = x \vec{u}$.

À $t = 0$, on écarte la masse de $x_0 = X_m$ et on lâche sans vitesse initiale.

1) La masse peut se déplacer sur le plan horizontal sans frottement. Déterminer l'équation horaire $x(t)$ du mouvement de cette masse. Comment qualifie-t-on cet oscillateur ? Déterminer les expressions et valeurs de sa pulsation propre ω_0 , de sa période propre T_0 et de sa fréquence propre N_0 .

2) La masse subit des forces de frottement fluide dont la résultante est de la forme

$$\vec{f} = -\alpha \vec{v}$$

où \vec{v} est le vecteur vitesse de m et α une constante positive.

- Donner la nouvelle équation différentielle du mouvement de m .
 - Indiquer brièvement quels sont les 3 types de mouvement possible en fonction de la valeur de α et représenter l'allure des graphes $x(t)$ correspondant. Que se passe-t-il au bout d'un temps suffisamment long ?
- 3) Le point M est maintenant soumis à une force supplémentaire de type sinusoïdal :

$$\vec{F} = F \cdot \vec{u}$$

avec $F = F_0 \cos \omega t$.

- Exprimer la nouvelle équation différentielle à laquelle obéit $x(t)$.
La solution de cette nouvelle équation différentielle est la somme de la solution de l'équation différentielle sans second membre qui correspond à un régime transitoire (voir question précédente) et d'une solution particulière qui correspond au régime permanent.
En régime permanent, l'amplitude est de la forme $x(t) = X_0 \cos(\omega t + \phi)$ et la vitesse $v = V_0 \cos(\omega t + \varphi)$.
On utilisera la notation complexe :

$$\tilde{F} = F_0 e^{j\omega t} \quad \tilde{x} = \tilde{X}_0 e^{j\omega t} = X_0 e^{j\phi} e^{j\omega t} \quad \tilde{v} = \tilde{V}_0 e^{j\omega t} = V_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t}$$

- Définir la vitesse v et en déduire la relation entre V_0 et X_0 et entre φ et ϕ .
- En remplaçant, dans l'équation différentielle, \tilde{x} , $\dot{\tilde{x}}$ et $\ddot{\tilde{x}}$ par leur expression complexe, montrer qu'on a la relation suivante :
 $F_0 = \tilde{Z} \tilde{X}_0$ où \tilde{Z} , appelé impédance mécanique complexe (liée au déplacement x), ne dépend que de k , m , α et ω .
- Donner l'expression de X_0 en fonction de F_0 , m , $\lambda = \frac{\alpha}{m}$, ω_0 et ω .

Montrer que si l'oscillateur est faiblement amorti (pour $\alpha < \sqrt{2km}$), l'amplitude passe par un maximum pour une pulsation excitatrice ω_m légèrement différente de ω_o . Donner l'expression de ω_m .

- e) Déterminer l'expression de $\tan \phi$ où ϕ représente le déphasage de $x(t)$ par rapport à F
- f) En utilisant **b)** et **d)** déduire l'expression de V_o en fonction de F_o , m , $\lambda = \frac{\alpha}{m}$, ω_o et ω .
Que se passe-t-il pour $\omega = \omega_o$? Quel nom porte ce phénomène? Donner l'allure de la courbe $V_o = f(\omega)$.

Solution

1) Système la masse m , référentiel terrestre galiléen, forces : $\vec{P}, \vec{R}, \vec{T} = -kx\vec{u}$

Principe fondamental : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = \vec{0} + \vec{T} = -kx\vec{u} = m\vec{a} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

$\ddot{x} + \omega_o x = 0$ (équation différentielle de l'oscillateur harmonique) avec $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$

pulsation propre de l'oscillateur et donc $T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{1}{N_o} \Rightarrow 2\pi N_o = \omega_o$

Solution : $x(t) = X \cos(\omega_o t + \phi)$. Avec $x(0) = X_m$ et $\dot{x}(0) = 0$,

on a : $X_m = X \cos \phi$ et $\dot{x}(t) = -\omega_o \sin(\omega_o t + \phi) \Rightarrow \dot{x}(0) = 0 = -\omega_o \sin \phi$

On obtient $\phi = 0$ et $X = X_m$ c'est à dire $x(t) = X_m \cos(\omega_o t)$

2) La masse subit des forces de frottement fluide de la forme $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$

a) $-\alpha \vec{v} - kx\vec{u} = m\vec{a} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ (oscillateur amorti)

b) Pour α faible, $\frac{\alpha}{m} < 2\omega_o \Rightarrow \alpha < 2\sqrt{km}$: Régime pseudo périodique (oscillations avec une amplitude qui diminue exponentiellement.

Pour $\frac{\alpha}{m} = 2\omega_o \Rightarrow \alpha = 2\sqrt{km}$: Régime critique, retour à l'équilibre sans oscillation le plus rapidement.

Pour α fort, $\frac{\alpha}{m} > 2\omega_o \Rightarrow \alpha > 2\sqrt{km}$: Régime apériodique, retour à l'équilibre sans oscillations.

Dans tous les cas : Retour à l'équilibre $x = 0$ au bout d'un certain temps (régime transitoire)

3) On force la masse à osciller avec une pulsation ω en lui appliquant une force sinusoïdale $\vec{F} = F \cdot \vec{u}$ avec $F = F_o \cos \omega t$.

a) $\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \omega_o^2 x = \frac{F_o}{m} \cos \omega t$

b) $v = \dot{x} \Rightarrow v = -X_o \omega \sin(\omega t + \phi) = X_o \omega \cos(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}) = V_o \cos(\omega t + \varphi)$

$$V_o = \omega X_o \quad \text{et} \quad \varphi = \phi + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{c) } -\omega^2 \tilde{X}_0 + j\omega \frac{\alpha}{m} \tilde{X}_0 + \omega_0^2 \tilde{X}_0 = \frac{F_0}{m} \Rightarrow F_0 = [m(\omega_0^2 - \omega^2) + j\omega\alpha] \tilde{X}_0$$

L'impédance mécanique complexe en amplitude $\tilde{Z} = [m(\omega_0^2 - \omega^2) + j\omega\alpha]$ avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

$$\text{d) } X_0 = |\tilde{X}_0| = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\alpha^2}} = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\lambda^2}}$$

$$\begin{aligned} \frac{dX_0}{d\omega} &= \frac{dX_0}{d\omega^2} \frac{d\omega^2}{d\omega} = 2\omega \frac{dX_0}{d\omega^2} = \frac{2\omega F_0}{m} \frac{d}{d\omega^2} [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\lambda^2]^{-1} \\ &= \frac{2\omega F_0}{m} \frac{(-1) [\lambda^2 + 2(-1)(\omega_0^2 - \omega^2)]}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\lambda^2]^2} \frac{dX_0}{d\omega} \\ &= -\frac{2\omega F_0}{m} \frac{[\lambda^2 + 2(\omega^2 - \omega_0^2)]}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\lambda^2]^2} \end{aligned}$$

La dérivée s'annule pour $\omega = 0$ et pour $\omega_m^2 = \omega_0^2 - \frac{\lambda^2}{2}$ à la condition que

$$\omega_m^2 = \omega_0^2 - \frac{\lambda^2}{2} \geq 0 \Rightarrow \lambda \leq \omega_0\sqrt{2} \Rightarrow \alpha \leq m\omega_0\sqrt{2} = \sqrt{2mk}$$

$$\text{e) } \tan \phi = -\frac{\omega\lambda}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\text{f) } V_o = \omega X_0 = \frac{\omega F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\lambda^2}} = \frac{F_0/m}{\sqrt{\lambda^2 + (\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega)^2}}$$

Pour $\omega = \omega_0$, V_o prend une valeur maximale $V_{om} = \frac{F_0}{m\lambda} = \frac{F_0}{\alpha}$. C'est le phénomène de résonance.

Allure du graphe $V_o f(\omega)$:

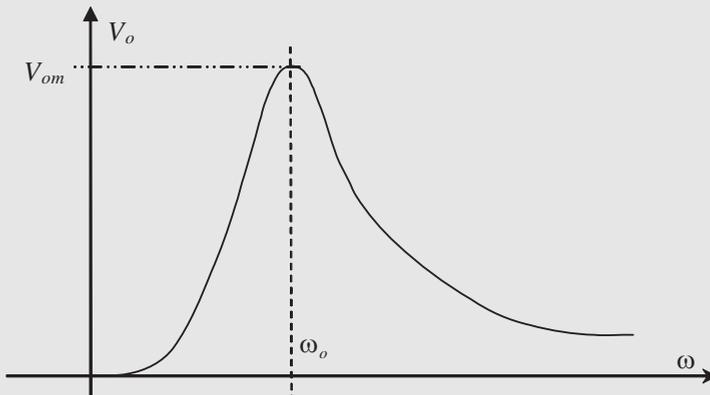


Figure 6.9

Principe du sismographe

Soit un point matériel M (masse m) suspendu à un socle (S) par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 (voir figures ci-dessous).

On associe au référentiel socle (S) un repère constitué d'une origine O correspondant à la position de la masse à l'équilibre suspendue au ressort (figure 2) et d'un axe (Ox) vertical dirigé vers le bas.

Lorsque le point M se déplace verticalement, il subit une force de frottement fluide de la forme : $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ (α coefficient de frottement fluide, réel positif). On désigne par $x(t)$ le déplacement de M par rapport à sa position d'équilibre O (figure 3).

Le socle repose sur le sol terrestre. Dans tout ce qui suit, le Référentiel Terrestre lié au centre de la Terre (R) est considéré comme galiléen.

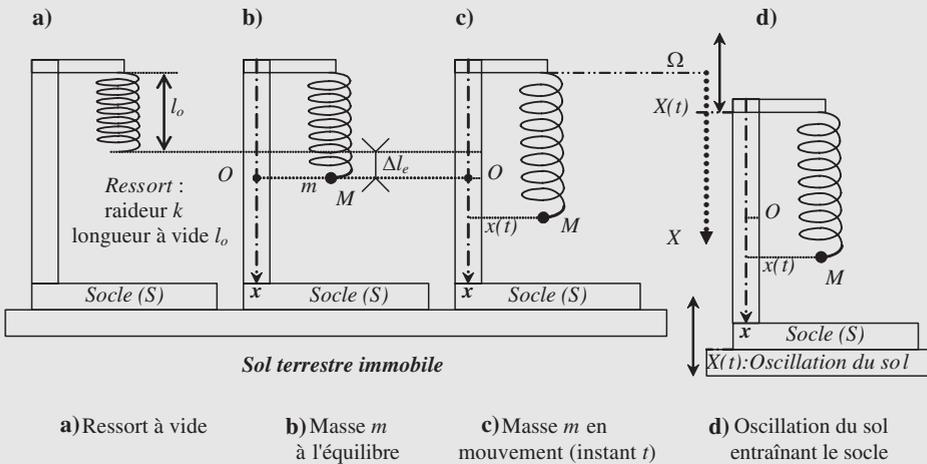


Figure 6.10

A) Absence de tremblements de Terre (ou mouvements sismiques).

1) Que peut-on dire du référentiel socle(S) dans le cas où le sol serait immobile dans le référentiel terrestre (R) (figure a, b et c), ?

2) Étude de la masse dans la position d'équilibre (figure b)

Étudier la masse m dans le cas de la figure 2 et en déduire l'expression de l'allongement Δl_e du ressort.

3) Étude de la masse en mouvement (figure c) dans le référentiel socle (S)

On écarte la masse m de sa position d'équilibre puis on la lâche.

- Exprimer la Tension \vec{T} du ressort à un instant t quelconque.
- Étudier le système masse m (cas de la figure 3) et montrer que l'équation différentielle du mouvement de M est de la forme : $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$
Donner l'expression de λ et de ω_0 . Que représente ω_0 ?
- Deux solutions possibles pour ce type d'équation différentielle sont les suivantes :

$$\text{avec } \omega \text{ réel positif } \begin{cases} x(t) = e^{-\lambda t} (Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}) & \text{régime apériodique} \\ x(t) = Ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \phi) & \text{régime pseudo périodique} \end{cases}$$

Quelle est la forme de la troisième solution possible et comment nomme-t-on ce régime ?

- d) On se place dans le cas où les frottements seraient très faibles. On a alors $\lambda \ll \omega_0$. Parmi les 2 premières solutions précédentes possibles, laquelle correspond au cas présent ?
- e) Donner l'expression de w en fonction de λ et ω_0 . Que peut-on dire de w lorsque $\lambda \ll \omega_0$?

B) Présence de tremblements de Terre (ou mouvements sismiques).

Au cours d'un tremblement de Terre, une onde sismique se propage et vient faire osciller le sol sur lequel repose le socle étudié précédemment dans la partie A.

On suppose que le sol est animé alors, par rapport à (R) , d'un mouvement $X(t)$ vertical dirigé vers le bas, sinusoïdal, de pulsation ω (voir *figure d*) : $X(t) = X_m \cos(\omega t)$.

Dans ce cas, le mouvement du socle par rapport à (R) est un mouvement de translation rectiligne non uniforme. Le référentiel socle (S) n'est plus galiléen. l'étude du mouvement de m peut se faire de la même façon que précédemment : il suffit d'ajouter, dans le bilan des forces, la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_i = -m\vec{a}_e = -m\ddot{X}\vec{u}_x$ (voir chapitre sur les référentiels non galiléens).

Étude des oscillations forcées dans le référentiel socle (S)

- a) Étude du système masse m (cas de la *figure d*) dans le référentiel socle (S) : Quelle différence y a-t-il par rapport au cas du **A3)a**) ? En déduire alors que l'équation différentielle du mouvement de M est de la forme :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = A \cos(\omega t) \quad \text{avec } A = \omega^2 X_m$$

- b) On constate, au bout d'un certain temps, que la masse m oscille avec la même pulsation ω que le socle (oscillation forcées : régime permanent). La solution est de la forme :

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

En notation complexe on pose :

$$\begin{cases} X(t) = X_m \cos(\omega t) & \Rightarrow \bar{X}(t) = X_m e^{j\omega t} \\ x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi) & \Rightarrow \bar{x}(t) = x_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \bar{x}_m e^{j\omega t} \end{cases} \quad \text{avec } j^2 = -1$$

Reporter les grandeurs complexes dans l'équation différentielle du mouvement de m et en déduire une expression de \bar{x}_m puis de x_m en fonction de λ , ω , ω_0 et X_m .

- c) Pour le fonctionnement en sismographe, on a : $\lambda \ll \omega_0$ ainsi que $\omega_0 \ll \omega$. Que peut-on dire alors, en première approximation, de x_m par rapport à X_m . Montrer qu'on peut ainsi mesurer l'amplitude du tremblement de Terre.

Solution

Principe du sismographe

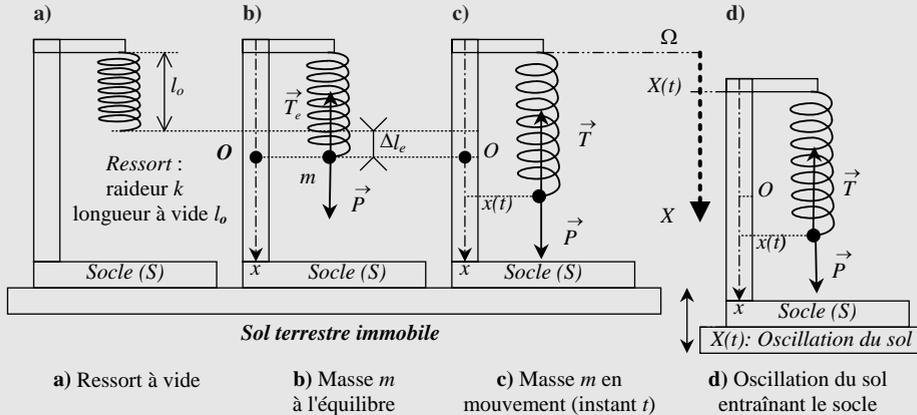


Figure 6.11

A) Absence de tremblements de Terre (ou mouvements sismiques).

1) Le référentiel socle (S), dans le cas où le sol serait immobile dans le référentiel terrestre (R), est un **référentiel galiléen** comme le référentiel terrestre

2) Étude de la masse dans la position d'équilibre (figure b)

Système masse m , référentiel socle (S) galiléen,

Forces : poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_x$ et tension $\vec{T} = -k\Delta l_e\vec{u}_x$

Condition d'équilibre : $\vec{P} + \vec{T} = \vec{0} \Rightarrow mg = k\Delta l_e \Rightarrow \Delta l_e = \frac{mg}{k}$

3) Étude de la masse en mouvement (figure c) dans le référentiel socle (S)

a) La tension du ressort, à un instant t quelconque, est $\vec{T} = -k(x + \Delta l_e)\vec{u}_x$.

b) Force : $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_x$, $\vec{T} = -k(x + \Delta l_e)\vec{u}_x$, et frottement fluide : $\vec{f} = -\alpha\vec{v} = -\alpha\dot{x}\vec{u}_x$

Principe fondamental de la dynamique :

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= m\ddot{x}\vec{u}_x = mg\vec{u}_x - k(\Delta l_e + x)\vec{u}_x - \alpha\dot{x}\vec{u}_x \\ &\Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = g - \frac{k\Delta l_e}{m} = 0 \end{aligned}$$

$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2x = 0$ avec $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, pulsation propre de l'oscillateur.

c) Régime critique : $x(t) = (At + B)e^{-\lambda t}$

d) $\lambda \ll \omega_0$ (frottement très faible) alors la solution correspond à un régime pseudo périodique : $x(t) = Ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \phi)$

- e) Équation caractéristique : $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \Delta = 4(\lambda^2 - \omega_0^2) = (2j)^2(\omega_0^2 - \lambda^2)$.
On a donc comme solution : $r = -\lambda \pm j\omega$ avec

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\omega_0^2}} \approx \omega_0 \quad (\text{cas } \lambda \ll \omega_0)$$

B) Présence de tremblements de Terre (ou mouvements sismiques).

Le socle a le même mouvement que le sol par rapport à (R) . Le référentiel socle (S) n'est plus galiléen car il n'est pas en translation rectiligne uniforme par rapport à (R) galiléen. Il est en translation rectiligne sinusoïdale. L'accélération d'entraînement correspond à l'accélération du point O ou d'un point quelconque du socle. On a donc :

$$X(t) = X_m \cos(\omega t) \Rightarrow \dot{X} = -\omega X \sin \omega t \Rightarrow \ddot{X} = a_e = -\omega^2 X \cos \xi t$$

Le référentiel socle n'est plus galiléen, il faut donc ajouter la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_i = -m \vec{a}_e = [m\omega^2 X_m \cos \omega t] \vec{u}_x$

Étude des oscillations forcées dans le référentiel socle (S)

- a) Étude du système masse m (cas de la figure d) dans le référentiel socle (S) :

$$\begin{aligned} m \vec{a} &= m \ddot{x} \vec{u}_x = -kx \vec{u}_x - \alpha \dot{x} \vec{u}_x + m\omega^2 X_m \cos \omega t \\ &\Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{m\omega^2 X_m}{m} \cos \omega t \end{aligned}$$

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = A \cos(\omega t) \text{ avec } A = \omega^2 X_m$$

- b) $x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$ En notation complexe on pose :

$$\begin{cases} X(t) = X_m \cos(\omega t) & \Rightarrow \bar{X}(t) = X_m e^{j\omega t} \\ x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi) & \Rightarrow \bar{x}(t) = x_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \bar{x}_m e^{j\omega t} \end{cases} \quad \text{avec } j^2 = -1$$

$$\begin{aligned} (-\omega^2 + 2\lambda j\omega + \omega_0^2) \bar{x}_m &= \omega^2 X_m \Rightarrow \bar{x}_m = \frac{\omega^2 X_m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2j\omega\lambda} \\ \bar{x}_m &= \frac{X_m}{2j\frac{\lambda}{\omega} - (1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2})} \\ x_m &= \frac{X_m}{\sqrt{4\frac{\lambda^2}{\omega^2} + (1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2})^2}} \end{aligned}$$

- c) avec $\lambda \ll \omega_0 \ll \omega$ on a :

$$\begin{aligned} x_m &\approx \frac{X_m}{\sqrt{1 - 2\frac{\omega_0^2}{\omega^2} + 4\frac{\lambda^2}{\omega^2}}} \\ &\approx X_m \left(1 - 2\frac{\omega_0^2}{\omega^2} + 4\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\approx X_m \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} + 2\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right) \approx X_m \end{aligned}$$

au deuxième ordre près. La mesure de x_m permet de mesurer l'amplitude du tremblement.

CHAPITRE 7

INTERACTION GRAVITATIONNELLE

Pré-requis

- Pour aborder ce chapitre il faut connaître la définition de l'énergie potentielle et avoir une bonne idée de la notion de champ de vecteurs. Le principe fondamental de la dynamique doit être acquis.

Objectif

- ▶ Se familiariser avec la loi de la gravitation universelle (loi de Newton).
- ▶ Comprendre la notion de champ de gravitation terrestre et son évolution en fonction de l'altitude considérée.
- ▶ Maîtriser la notion d'énergie potentielle de gravitation.

Nous considérons dans ce chapitre que toutes les masses sont à symétrie sphérique. Pour ne pas surcharger le texte nous admettons que les masses se comportent comme des objets ponctuels. La détermination du champ de gravitation est réalisée au niveau le plus simple. Nous renvoyons le lecteur soucieux de comprendre comment calculer le champ de gravitation de façon exacte au cours d'électrostatique et à l'utilisation du théorème de Gauss que l'on applique à une distribution volumique de masse.

1. ATTRACTION UNIVERSELLE

1.1. Force de gravitation newtonienne

On appelle **force de gravitation** ou **force d'interaction gravitationnelle**, la force exercée par une masse M sur une autre masse m . Cette force d'interaction a été découverte par Newton¹ en 1665. Celui-ci a montré que deux masses m et M interagissent entre elles de façon d'autant plus forte que les masses sont grandes et que la distance qui les sépare est petite. La loi qu'il a formulée est dite loi de Newton et s'énonce de la façon suivante :

Loi de Newton

Les masses de deux corps s'attirent en raison de leurs masses et de l'inverse du carré de leur distance.

1. Isaac Newton (1642-1727). La théorie fut publiée en 1686 dans *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis*.

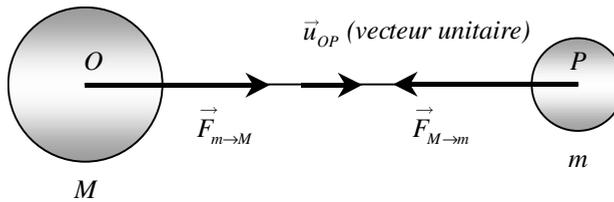


Figure 7.1 • Interaction gravitationnelle entre deux masses.

L'action de M sur m peut s'écrire :

$$\vec{F}_{M \rightarrow m} = -\mathcal{G} \frac{mM}{OP^2} \vec{u}_{OP}$$

Cette force, attractive, est portée par l'axe qui sépare les deux centres d'inertie des masses m et M . Il est pratique alors de définir, sur cet axe, un vecteur unitaire \vec{u}_{OP} dont le sens est celui de O (acteur de la force) vers P (receveur : celui qui subit la force). Dans ces conditions, la force exercée par M sur m est de même direction mais de sens opposé à ce vecteur unitaire.

Elle est proportionnelle à m et M et inversement proportionnelle au carré de la distance séparant les deux centres d'inertie O et P . Elle fait intervenir une constante d'interaction appelée constante d'interaction gravitationnelle (figure 7.1). Cette constante est universelle et a pour valeur $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11}$ USI (unités du système international).

Notons que comme $\vec{OP} = OP \vec{u}_{OP}$ la force de Newton peut aussi s'écrire

$$\vec{F}_{M \rightarrow m} = -\mathcal{G} \frac{mM}{OP^3} \vec{OP}$$

Il importe de remarquer que si M attire m selon la loi précédente il en est de même pour m qui attire M selon la même loi. Il s'agit d'une interaction à distance. Nous pouvons écrire :

$$\vec{F}_{m \rightarrow M} = -\mathcal{G} \frac{mM}{OP^3} \vec{PO} = -\vec{F}_{M \rightarrow m}$$

Nous retrouvons là le principe des actions réciproques.

1.2. Champ de gravitation

Une masse m au voisinage d'une masse M subit donc une force. Celle-ci est liée à la présence d'un champ de gravitation créé par la masse M au point où est située la masse m . En effet, on peut exprimer cette force sous la forme suivante :

$$\vec{F}_{M \rightarrow m} = m \left(-\mathcal{G} \frac{M}{OP^3} \vec{OP} \right) = m \vec{G}(P)$$

La masse M étant fixée, le vecteur $\vec{G}(P)$ ne dépend que de la position du centre d'inertie P de la masse m par rapport au centre d'inertie O de M . On définit ainsi un champ de vecteurs qui correspond au champ de gravitation de la masse M .

En tout point P de l'espace, ce champ a pour expression

$$\vec{G}(P) = -\mathcal{G} \frac{M}{OP^3} \vec{OP} = -\mathcal{G} \frac{M}{OP^2} \vec{u}_{OP}$$

Une masse m placée en un point P de l'espace subit alors la force

$$\vec{F}_{M \rightarrow m} = m \vec{G}(P)$$

Dans le cas où la densité volumique du corps M est à symétrie sphérique (ce qui est le cas pour les astres), le champ de gravitation l'est aussi et est donc radial et centripète. La force $\vec{F}_{M \rightarrow m}$ est alors une force centrale.

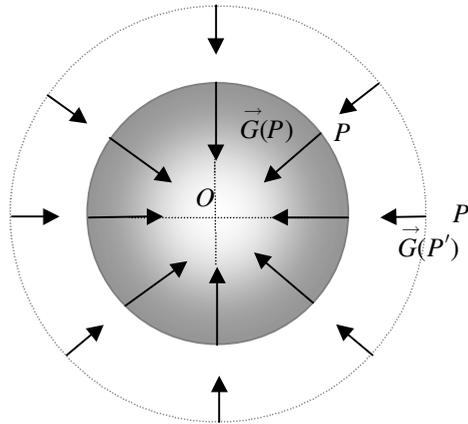


Figure 7.2 • Champ de gravitation de la Terre.

2. CHAMP DE GRAVITATION TERRESTRE

2.1. Champ de gravitation à la surface de la Terre

Lorsque la masse M est la masse de la Terre et que m est à la surface de la Terre, la distance OP correspond au rayon terrestre R_T , et la force de Newton représente l'attraction de la Terre sur la masse m .

La force de Newton peut alors s'écrire :

$$\vec{F}_{M \rightarrow m} = -\mathcal{G} \frac{mM}{R_T^2} \vec{u}_{OP} = m \vec{G}_0(P)$$

où $\vec{G}_0(P)$ représente le champ de gravitation de la Terre au point P considéré, soit :

$$\vec{G}_0(P) = -\mathcal{G} \frac{M}{R_T^2} \vec{u}_{OP} = -\mathcal{G} \frac{M}{OP^3} \vec{OP}$$

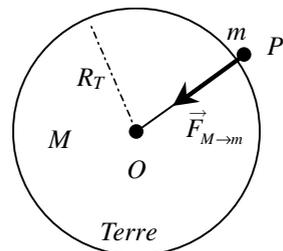


Figure 7.3 • Attraction de la Terre au niveau de sa surface.

Ce champ est un champ centripète et radial. Il est en première approximation à symétrie sphérique ce qui signifie que le module de \vec{G}_0 est constant à la surface de la Terre. Ceci n'est pas tout à fait vérifié car la Terre tourne sur elle-même. Il se produit une déformation qui rend la Terre plus aplatie aux pôles qu'à l'équateur.

Encart 7.1. Valeur du champ de gravitation à la surface de la Terre

Le champ de gravitation correspond au rapport d'une force sur une masse et est donc homogène à une accélération. Avec $G = 6,64 \cdot 10^{-11}$ USI; $M = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg et $R_T = 6,37 \cdot 10^6$ m, on obtient :

$$G_0 = \mathcal{G} \frac{M}{R_T^2} = 9,83 \text{ m.s}^{-2}$$

Remarque. Cette valeur est proche de celle du champ de pesanteur g à la surface de la Terre. La différence provient principalement de la rotation de la Terre autour de son axe Sud-Nord. La comparaison entre ces deux grandeurs est traitée au chapitre 8. Cependant il est possible, en première approximation, de considérer que le champ de gravitation G_0 correspond au champ de pesanteur g .

2.2. Champ de gravitation au voisinage de la surface terrestre

Nous allons maintenant considérer le cas où la masse m n'est plus en contact avec la surface terrestre mais se trouve à l'altitude z de la Terre avec $z \ll R_T$.

Le champ de gravitation de la Terre à l'altitude z s'écrit :

$$\vec{G}(z) = -\mathcal{G} \frac{mM}{(R+z)^2} \vec{u}_{OP}$$

En introduisant le module G_0 du champ \vec{G}_0 à la surface de la Terre ($z = 0$), le module du champ de gravitation $G(z)$ à l'altitude z peut s'écrire :

$$G(z) = -\mathcal{G} \frac{mM}{R_T^2 \left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^2} = G_0 \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^2}$$

Si l'on considère que z est très inférieur à R_T , la quantité z/R_T est infiniment petite par rapport à 1 et l'on peut utiliser un développement limité de l'expression de $G(z)$ à l'altitude z . Rappelons que, lorsque a est petit devant 1 :

$$(1+a)^n = 1 + na + \frac{n(n-1)}{2} a^2 + \dots$$

Dans notre cas $n = -2$ et $a = z/R_T$, ce qui conduit à l'expression du champ, à l'ordre 1 en z/R_T , suivante :

$$G(z) = G(0) \left(1 - 2 \frac{z}{R_T}\right)$$

$G(z)$ décroît avec l'altitude. Pour une altitude $z = 32000$ m, on obtient une variation relative du champ de l'ordre de 1%. On peut donc souvent négliger cette variation lorsqu'on reste au voisinage de la Terre.

Remarque. Les rayons terrestres issus de deux points séparés par un mille (1 852 m) font entre eux un angle de 1' et sont donc pratiquement parallèles. On peut donc, dans un volume dont les dimensions sont de l'ordre de quelques kilomètres, considérer le champ de gravitation comme uniforme :

$$\vec{G}(z) = G(0)\vec{u}_{OP}$$

3. ÉNERGIE POTENTIELLE DE GRAVITATION

3.1. Expression de l'énergie potentielle de gravitation

Considérons une masse m de centre d'inertie P placée dans le champ de gravitation d'une masse M de centre d'inertie O .

La force de gravitation que subit m est donnée par la loi de Newton :

$$\vec{F}_{M \rightarrow m} = -\mathcal{G} \frac{mM}{OP^3} \vec{OP}$$

Au cours d'un déplacement quelconque dans l'espace, la force de Newton est variable. L'énergie potentielle de gravitation peut être calculée à partir de la relation différentielle suivante :

$$dE_p = -\vec{F} \cdot d\vec{l}$$

où $d\vec{l}$ est un déplacement élémentaire de P .

La force de gravitation étant à symétrie sphérique, il convient de travailler en coordonnées sphériques (voir annexe). Cependant on peut se contenter de décomposer ce déplacement en un déplacement élémentaire suivant le vecteur radial \vec{u}_r , qui correspond donc à une variation dr de la distance r , et un déplacement $d\vec{l}'$ perpendiculaire à \vec{u}_r . L'expression en coordonnées sphériques est :

$$d\vec{l}' = r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi$$

On peut donc écrire : $d\vec{l} = dr \vec{u}_r + d\vec{l}'$.

Il en résulte que la différentielle de l'énergie potentielle s'écrit :

$$dE_p = \mathcal{G} \frac{mM}{r^3} r \vec{u}_r \cdot (dr \vec{u}_r + d\vec{l}') = \mathcal{G} \frac{mM}{r^2} dr$$

L'intégration de la différentielle de E_p conduit à :

$$E_p = -\mathcal{G} \frac{mM}{r} + C$$

Ce résultat peut être obtenu en utilisant les coordonnées cartésiennes mais le calcul est un peu plus lourd. Le déplacement élémentaire et la force de gravitation s'écrivent respectivement :

$$d\vec{l} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$$

$$\vec{F}_{M \rightarrow m} = -\mathcal{G} \frac{mM}{OP^3} \vec{OP} = -\mathcal{G} \frac{mM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z)$$

La différentielle de l'énergie potentielle s'écrit alors :

$$dE_P = \mathcal{G} \frac{mM(x dx + y dy + z dz)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

L'intégration est plus délicate qu'en coordonnées sphériques et il est utile de faire le changement de variable suivant :

$$r^2 = u = (x^2 + y^2 + z^2) \Rightarrow du = 2(x dx + y dy + z dz)$$

ce qui conduit à :

$$dE_P = \mathcal{G} \frac{mM(x dx + y dy + z dz)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{1}{2} \mathcal{G} m M u^{-3/2} du$$

Par intégration, nous obtenons :

$$E_P = -\mathcal{G} \frac{mM}{u^{1/2}} + C$$

ce qui conduit, en revenant à la variable r , à :

$$E_P = -\mathcal{G} \frac{mM}{r} + C$$

L'expression de l'énergie potentielle de pesanteur dans un champ de gravitation variable s'écrit donc toujours :

$$E_P = -\mathcal{G} \frac{mM}{r} + C$$

Remarque. La valeur de la constante C dépend du choix arbitraire du zéro de l'énergie potentielle. On choisit habituellement de prendre nulle l'énergie potentielle de la masse m lorsqu'elle est à l'infini par rapport à M .

Le choix de l'origine de l'énergie potentielle :

$$E_P(\infty) = 0$$

conduit à prendre la constante C nulle. L'énergie potentielle s'écrit alors :

$$E_P = -\mathcal{G} \frac{mM}{r}$$

3.2. Énergie potentielle pour une masse au voisinage de la Terre

Pour une masse m , au voisinage de la Terre, située à l'altitude z par rapport au niveau de la mer, il est commode de prendre l'énergie potentielle nulle à l'altitude 0. L'énergie potentielle de gravitation peut alors s'écrire :

$$E_P(z) = -\mathcal{G} \frac{mM}{r} + C = -\mathcal{G} \frac{mM}{R_T + z} + C$$

avec $E_P(R_T) = 0$, ce qui donne :

$$E_P = -\mathcal{G} \frac{mM}{r} + \mathcal{G} \frac{mM}{R_T}$$

Dans le cas où la masse m est à une altitude z très petite devant le rayon de la Terre R_T , il est possible de développer l'énergie potentielle au premier ordre en z/R_T . On obtient lorsque le zéro est pris à la surface de la Terre :

$$E_P(z) = -\mathcal{G} \frac{mM}{R_T + z} + \mathcal{G} \frac{mM}{R_T} = -\mathcal{G} \frac{mM}{R_T(1 + \frac{z}{R_T})} + \mathcal{G} \frac{mM}{R_T}$$

soit

$$E_P(z) = -\mathcal{G} \frac{mM}{R_T} \left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^{-1} + \mathcal{G} \frac{mM}{R_T}$$

Le développement limité de l'énergie potentielle à l'ordre 1 en z/R_T conduit à :

$$E_P(z) = -\mathcal{G} \frac{mM}{R_T} + \mathcal{G} \frac{mM}{R_T^2} z + \mathcal{G} \frac{mM}{R_T} = mG_0 z$$

Nous avons vu qu'au voisinage de la Terre, localement, le champ de gravitation \vec{G}_o peut être considéré comme uniforme et égal au champ de pesanteur \vec{g} . On retrouve bien, alors, l'expression de l'énergie potentielle d'une masse m dans un champ de pesanteur uniforme \vec{g}

$$E_P(z) = mG_0 z \simeq mgz$$

avec l'axe des z ascendant.

4. APPLICATIONS

4.1. Comparaison de l'interaction Terre-Lune et Soleil-Lune

Nous allons comparer les forces d'attraction terrestre et solaire sur la Lune. Nous reportons dans le tableau 7.1 ci-dessous les différentes grandeurs utiles :

| Terre | Soleil | Lune |
|----------------------|----------------------|----------------------------|
| $M_T = 6.10^{24}$ kg | $M_S = 2.10^{30}$ kg | $M_L = 7,4.10^{22}$ kg |
| $R_T = 6400$ km | $ST = 150.10^6$ km | $TL = 60R_T = 384\,000$ km |

Tableau 7.1 • Masses et distances caractéristiques de la Terre du Soleil et de la Lune.

La force d'attraction du Soleil sur la Lune est donnée par :

$$\vec{F}_{M_S \rightarrow M_L} = -\mathcal{G} \frac{M_S M_L}{SL^2} \vec{u}_{SL} \approx -\mathcal{G} \frac{M_S M_L}{ST^2} \vec{u}_{SL}$$

La force d'attraction de la Terre sur la Lune s'écrit :

$$\vec{F}_{M_T \rightarrow M_L} = -\mathcal{G} \frac{M_T M_L}{TL^2} \vec{u}_{TL}$$

Le rapport de l'intensité de ces deux forces s'écrit donc :

$$r = \frac{F_{M_S \rightarrow M_L}}{F_{M_T \rightarrow M_L}} = \frac{M_S T L^2}{M_T S L^2} \approx 2$$

Le calcul précédent montre que la force d'attraction solaire sur la Lune est supérieure d'un facteur 2 à la force d'attraction terrestre sur la Lune. Il n'y a donc pas plus de raisons de considérer que la Lune est un satellite de la Terre ou du Soleil. Le mouvement de la Lune autour de la Terre et autour du Soleil est un mouvement à trois corps dont les caractéristiques ont été données par les conditions initiales du mouvement.

4.2. Champ de gravitation des astres à la surface de la Terre

Toute masse située à la surface de la Terre subit l'attraction de gravitation terrestre mais aussi celles exercées par tous les autres astres et en particulier la Lune (astre le plus proche de la Terre) et le Soleil (pour l'importance de sa masse). Il est intéressant de comparer ces différents effets.

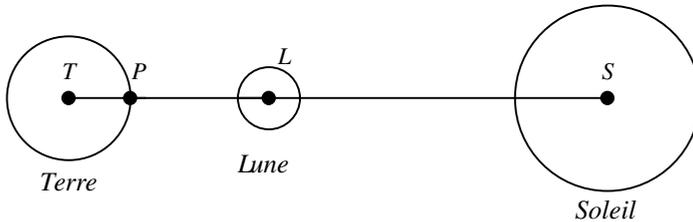


Figure 7.4 • Représentation du Soleil, de la Terre et de la Lune avec les différents points utilisés dans les calculs.

Pour un point P à la surface de la Terre, on aura :

$$TP = R_T ; LP \simeq 60R_T - R_T = 59R_T ;$$

$$SP \simeq ST - R_T \simeq ST ; ST = 150.10^6 \text{ km}$$

Soit $\vec{G}_S(P)$, $\vec{G}_L(P)$ et $\vec{G}_T(P)$ respectivement les champs de gravitation du Soleil, de la Lune et de la Terre au point P , la comparaison de la valeur des deux premiers champs par rapport au champ de gravitation terrestre donne :

$$\frac{G_T(P)}{G_S(P)} = \frac{M_T}{M_S} \left(\frac{TS}{R_T} \right)^2 \simeq 1,65.10^3$$

$$\frac{G_T(P)}{G_L(P)} = \frac{M_T}{M_L} \left(\frac{59R_T}{R_T} \right)^2 \simeq 2,8.10^5$$

Les rapports que nous venons de calculer montrent que le champ de gravitation terrestre est très supérieur aux champs de gravitation de la Lune ou du Soleil en tout point de la surface de la Terre. Les effets gravitationnels du Soleil et de la Lune peuvent donc être négligés devant l'attraction de la Terre. Cependant, ces effets peuvent être mis en évidence à partir de phénomènes comme celui des marées, dont une interprétation est donnée dans le chapitre suivant.

4.3. Satellites en orbite circulaire

a) Détermination de la période de révolution

Nous allons nous intéresser au mouvement d'un satellite de masse m très petite devant la masse M de la Terre. Il peut être considéré comme ponctuel et soumis uniquement à l'attraction gravitationnelle de la Terre. De plus nous nous limitons au cas de la trajectoire circulaire. Une étude plus générale sur le mouvement d'une masse dans un champ de gravitation est développée dans le chapitre 10.

Le rayon $r = r_0$ de l'orbite est constant donc $dr/dt = 0$.

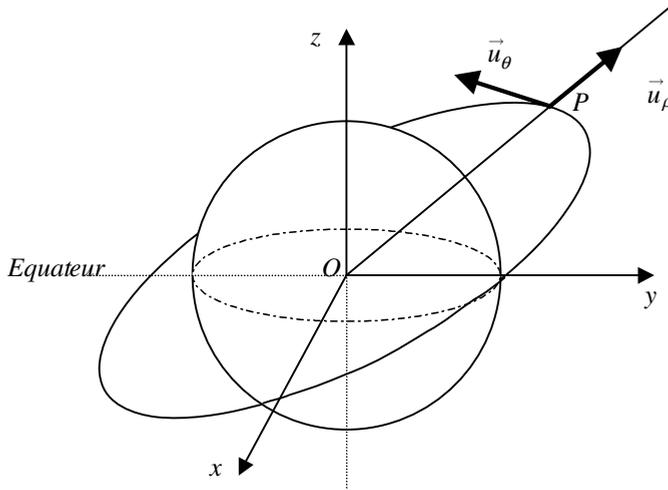


Figure 7.5 • Représentation d'un satellite en orbite circulaire autour de la Terre.

Le référentiel d'étude est le référentiel géocentrique R , galiléen, dans lequel la Terre a un mouvement de rotation uniforme, de période 86164 s, autour de son axe sud-nord.

Le satellite P subit la force de gravitation de la Terre :

$$\vec{f}_{M \rightarrow m} = -\mathcal{G} \frac{mM}{r_0^2} \vec{u}_\rho$$

L'application, à la masse m , du principe fondamental de la dynamique permet d'écrire :

$$\vec{f}_{M \rightarrow m} = m \vec{a}$$

où \vec{a} est le vecteur accélération du point P dans le référentiel géocentrique R .

La trajectoire circulaire qu'on recherche est plane. Nous pouvons donc travailler en coordonnées polaires. Dans ces conditions, avec $r = r_0 = cste$, l'accélération s'écrit :

$$\vec{a} = -r_0 \dot{\theta}^2 \vec{u}_\rho + r_0 \ddot{\theta} \vec{u}_\theta$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{cases} \mathcal{G} \frac{mM}{r_0^2} = r_0 \dot{\theta}^2 \\ r_0 \ddot{\theta} = 0 \implies \dot{\theta} = \omega_0 = cste \end{cases}$$

Le mouvement est nécessairement uniforme. Le vecteur vitesse s'écrit en coordonnées polaires :

$$\vec{v} = v_0 \vec{u}_\theta = r_0 \omega_0 \vec{u}_\theta$$

Nous obtenons donc la relation suivante entre vitesse et rayon :

$$\mathcal{G} \frac{M}{r_0^2} = r_0 \omega_0^2 = \frac{v_0^2}{r_0} \implies v_0^2 = \mathcal{G} \frac{M}{r_0}$$

La trajectoire circulaire s'effectue dans un plan passant par le centre de la Terre O , le point P et contenant le vecteur vitesse. La période T du mouvement est :

$$T = \frac{2\pi r_0}{v_0} \implies T^2 = \frac{4\pi^2 r_0^2}{v_0^2} = \frac{4\pi^2 r_0^3}{\mathcal{G}M}$$

La vitesse du satellite est inversement proportionnelle à la racine carrée du rayon et la période au carré est proportionnelle au rayon au cube ce qui constitue l'une des lois de Kepler comme nous le verrons au chapitre 10.

b) Satellite géostationnaire

Un satellite *géostationnaire* est un satellite qui paraît toujours immobile par rapport à un observateur situé sur Terre. Il est donc immobile dans un référentiel terrestre. Ce dernier ayant un mouvement de rotation autour de son axe avec une vitesse angulaire Ω , le satellite doit admettre le même axe de rotation et la même vitesse angulaire Ω . Son mouvement étant uniforme, sa trajectoire est *circulaire* dans un plan contenant le centre O de la Terre et perpendiculaire à l'axe Sud-Nord. Il s'effectue donc nécessairement dans le *plan équatorial*.

La vitesse angulaire d'un satellite étant fixée, le rayon de sa trajectoire l'est automatiquement.

Si T_l est la période de rotation de la Terre sur elle-même, nous obtenons :

$$T_l^2 = \frac{4\pi^2 r_s^3}{\mathcal{G}M} \implies r_s = \sqrt[3]{\frac{\mathcal{G}M T_l^2}{4\pi^2}}$$

On trouve un rayon d'orbite circulaire d'environ 42 000 km ce qui, compte tenu du rayon terrestre, conduit à une altitude de 36 000 km.

De tels satellites permettent des liaisons radio permanentes entre deux continents d'où ils sont visibles.

c) Énergie d'un satellite géostationnaire

L'énergie mécanique du satellite est égale à la somme de son énergie cinétique E_c et de son énergie potentielle E_p . En utilisant les résultats précédents, nous voyons que :

$$E_c = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{\mathcal{G}Mm}{2r_0} \quad \text{et} \quad E_p = -\frac{\mathcal{G}mM}{r_0}$$

soit :

$$E = E_c + E_p = -\frac{\mathcal{G}mM}{2r_0}$$

Cette énergie est négative et correspond à la moitié de l'énergie potentielle de gravitation.

À RETENIR

► **Loi de Newton ou loi d'attraction universelle**

Les masses M et m de deux corps situés en O et en P s'attirent en raison de leurs masses et de l'inverse du carré de leur distance.

$$\vec{F}_{M \rightarrow m} = -\mathcal{G} \frac{mM}{OP^2} \vec{u}_{OP}$$

avec $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11}$ USI

► **Champ de gravitation**

Une masse M située en un point O crée au point P un champ de gravitation radial qui vaut :

$$\vec{G}(P) = -\mathcal{G} \frac{M}{OP^3} \vec{OP} = -\mathcal{G} \frac{M}{OP^2} \vec{u}_{OP}$$

► **Énergie potentielle de gravitation**

L'énergie potentielle de gravitation (encore appelée de pesanteur) s'écrit toujours :

$$E_p = -\mathcal{G} \frac{mM}{r} + C$$

avec C constante arbitraire fixée par l'observateur. En général on pose $E_p(\infty) = 0$ sauf pour calculer E_p au voisinage de la Terre.

Pour une masse m à une altitude z immédiatement voisine de la surface de la Terre $C = 0$ en $r = R_T$ et

$$E_p = mgz.$$

CHAPITRE 8

RÉFÉRENTIELS NON GALILÉENS

Pré-requis

- La maîtrise du principe fondamental de la dynamique dans un référentiel galiléen (chapitre 4) est impérative ainsi que tout ce qui concerne la cinématique des changements de référentiel (chapitre 3).

Objectif

- ▶ Apprendre ce que sont les référentiels non galiléens et être capable d'appliquer la relation fondamentale de la dynamique dans un référentiel non galiléen en identifiant les forces d'inertie.
- ▶ Interpréter sur des exemples comment agissent les forces d'inertie.
- ▶ Appréhender comment les forces d'inertie permettent de passer de la force de gravitation à la force de pesanteur et bien cerner la différence entre ces deux forces.
- ▶ Pour les lecteurs motivés appréhender la notion de marée.
- ▶ Comprendre le phénomène de déviation vers l'est et interpréter quantitativement son amplitude.

1. INTRODUCTION

Nous avons vu, dans le chapitre 3, qu'il était possible de prédire le mouvement d'un point matériel en connaissant les forces qui sont exercées sur ce point. Pour cela, nous disposons du principe fondamental de la dynamique qui permet d'obtenir l'équation différentielle du mouvement. Cependant, ce principe n'est valable que si l'étude est effectuée dans un référentiel galiléen, ce qui, pour des raisons pratiques, n'est pas toujours le cas. En général, les expériences de mécanique que nous sommes amenés à réaliser s'effectuent sur Terre. Il est donc logique de prendre, comme référentiel d'étude, le référentiel terrestre.

Or nous avons vu que ce référentiel n'est pas rigoureusement galiléen puisqu'il a, dans le référentiel de Copernic qui est un excellent référentiel galiléen, un mouvement de translation circulaire autour du Soleil combiné à un mouvement de rotation autour de son axe sud-nord. Heureusement, dans de nombreux cas, le référentiel terrestre peut, en première approximation être considéré comme galiléen. Mais ceci n'est pas toujours possible comme par exemple lorsque l'on cherche à expliquer la déviation vers l'est d'un corps en chute libre, problème qui est traité dans ce chapitre. De même, si une expérience est réalisée dans un véhicule en accélération par rapport à la Terre, le référentiel pratique « véhicule » n'est pas galiléen.

Il importe donc de considérer comment le principe fondamental de la dynamique doit être modifié lorsque le référentiel d'étude choisi est non galiléen.

2. LOI DE LA DYNAMIQUE DANS UN RÉFÉRENTIEL NON GALILÉEN

Soit deux référentiels dont l'un, R , est galiléen et l'autre, R' , non galiléen. La loi de composition des accélérations (voir chapitre 2) permet de relier l'accélération d'un point M dans le référentiel R à l'accélération de ce même point dans le référentiel R' :

$$\vec{a}_{M/R} = \vec{a}_{M/R'} + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

L'accélération d'entraînement et celle de Coriolis ont pour expressions :

$$\begin{aligned}\vec{a}_e &= \frac{d^2 \overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \vec{\omega}_{R'/R} \wedge (\vec{\omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}) + \frac{d\vec{\omega}_{R'/R}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} \\ \vec{a}_c &= 2\vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_{M/R'}\end{aligned}$$

avec $\vec{\omega}_{R'/R}$ vecteur rotation de R' par rapport à R , O origine du repère lié à R et O' celle du repère lié à R' .

Dans le référentiel R galiléen, il est possible d'écrire que :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_{M/R}$$

En reportant la loi de composition des accélérations dans la relation fondamentale de la dynamique, on obtient une nouvelle équation qui fait intervenir le produit de la masse m du point matériel par son accélération

$$m\vec{a}_{M/R'} = \sum \vec{F}_{ext} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c$$

Cette équation est connue sous le nom de relation fondamentale de la dynamique dans un référentiel non galiléen.

Il est à remarquer qu'il importe de tenir compte dans R' de deux termes supplémentaires :

- $-m\vec{a}_e$ que l'on écrit \vec{f}_{ie} et qui s'appelle force d'**inertie d'entraînement** ;
- $-m\vec{a}_c$ que l'on écrit \vec{f}_{ic} et qui s'appelle force d'**inertie de Coriolis** ou force d'inertie complémentaire.

Il en résulte que la relation fondamentale dans un référentiel non galiléen s'écrit :

$$m\vec{a}_{M/R'} = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$$

où \vec{f}_{ie} et \vec{f}_{ic} sont des grandeurs homogènes à des forces et sont proportionnelles à la masse m d'où leur nom de **forces d'inertie** d'entraînement et de Coriolis. Ce ne sont pas de véritables forces mais plutôt des pseudo-forces, introduites pour pouvoir avoir une relation équivalente à la relation fondamentale mais applicable dans un référentiel non galiléen. Elles n'interviennent que si l'étude est faite dans un référentiel R' non galiléen. Elles sont dues au mouvement non rectiligne uniforme de R' par rapport à R . On les appelle parfois **forces de repère**.

Il est important de noter que pour mettre en évidence l'effet de la force de Coriolis, il faut que le système que l'on étudie dans le référentiel R' non galiléen (qui doit être en rotation par rapport à R) soit en mouvement dans R' . Un livre posé sur une table dans votre bureau (liée au référentiel terrestre non galiléen) ne peut pas subir la force de Coriolis. Cette force a été mise en évidence au cours d'expériences célèbres comme celle du pendule de Foucault. Elle est aussi responsable du mouvement rotatoire d'un fluide en écoulement dans une baignoire.

La force d'inertie d'entraînement est plus facile à appréhender car elle se perçoit plus facilement. Quand nous sommes installés dans un véhicule en décélération ou en accélération, nous sommes projetés vers l'avant du siège au cours d'un freinage brutal et collés au fond au cours de l'accélération. Vu de l'extérieur du véhicule, ceci est la conséquence d'une décélération ou accélération par rapport au référentiel terrestre (considéré ici comme galiléen). Vu de l'intérieur du véhicule (référentiel non galiléen), tout se passe comme si une force nous projetait vers l'avant ou nous collait sur le siège. Citons également la célèbre force centrifuge que nous subissons quand nous sommes installés dans un véhicule en mouvement de rotation et qui est mise à profit dans les centrifugeuses.

3. EXEMPLES D'APPLICATION

3.1. Translation non uniforme

Considérons un référentiel R' en mouvement de translation rectiligne uniformément accéléré par rapport à un référentiel R considéré comme galiléen (figure 8.1).

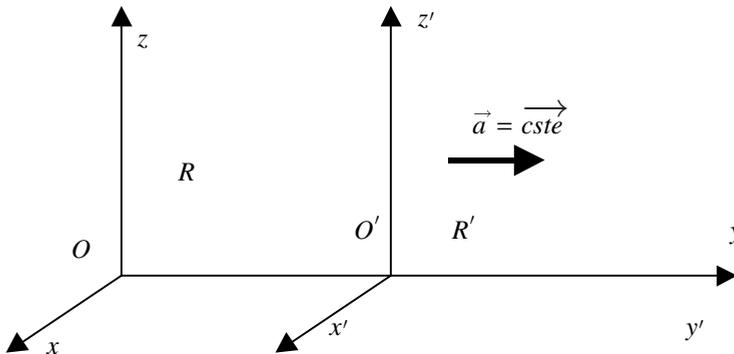


Figure 8.1 • Référentiel R' en mouvement accéléré par rapport au référentiel R galiléen.

Le référentiel R' étant en mouvement de translation par rapport à R , nous constatons que la force de Coriolis est nulle et que la force d'inertie d'entraînement se limite à :

$$\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e = -m \frac{d^2 \vec{OO}'}{dt^2} = -m\vec{a}$$

Dans R' , la relation fondamentale de la dynamique s'écrit donc :

$$m\vec{a}_{M/R'} = \sum \vec{F}_{ext} - m\vec{a}$$

À titre d'exemple, considérons le cas d'un pendule simple accroché au plafond d'un wagon d'un train en mouvement rectiligne uniformément accéléré. On se place dans le cas où le mouvement est établi (accélération constante). L'étude du mouvement de ce pendule peut se faire dans le référentiel R terrestre, considéré galiléen, ou dans le référentiel R' lié au wagon, non galiléen puisqu'en accélération constante par rapport à la Terre. Commençons par le référentiel R' .

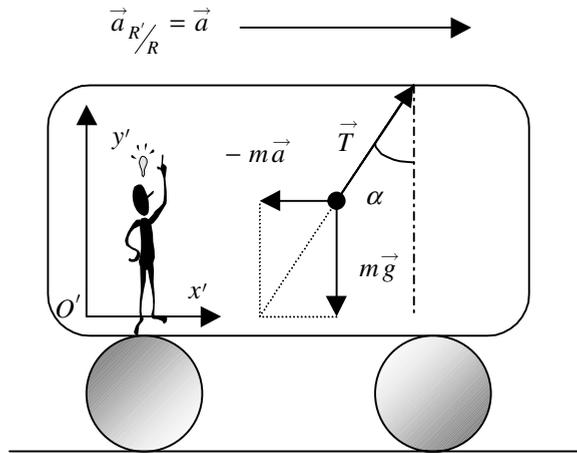


Figure 8.2 • Étude de l'équilibre d'un pendule dans le référentiel non galiléen d'un wagon.

a) Étude dans le référentiel R' (véhicule) non galiléen

Nous étudions le système point matériel M de masse m . Le référentiel R' est en translation par rapport au référentiel R galiléen terrestre du quai. En conséquence la force de Coriolis est nulle. Le système subit donc les forces suivantes :

- $\vec{P} = m\vec{g}$: poids de la masse m ;
- \vec{T} : tension du fil;
- \vec{f}_{ie} : force d'inertie $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_{R'/R} = -m\vec{a}$.

Pour l'observateur situé en O' , la masse m est immobile donc $\vec{a}_{M/R'} = \vec{0}$. On peut donc écrire la condition d'équilibre de la masse m dans R' :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{f}_{ie} = \vec{0} \implies \vec{P} + \vec{T} - m\vec{a} = \vec{0}$$

Il est facile de décomposer les différentes forces dans la base $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ du référentiel R' . Nous avons en effet

$$\vec{P} = \begin{cases} 0 \\ -mg \\ 0 \end{cases} \quad \vec{T} = \begin{cases} T \sin \alpha \\ T \cos \alpha \\ 0 \end{cases} \quad \vec{f}_{ie} = \begin{cases} -ma \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

Après projection sur les deux axes x' et y' du mouvement nous obtenons

$$\begin{cases} T \sin \alpha = ma \\ T \cos \alpha = mg \end{cases}$$

On en déduit donc que l'angle d'inclinaison est donné par :

$$\tan \alpha = \frac{a}{g} \quad (8.1)$$

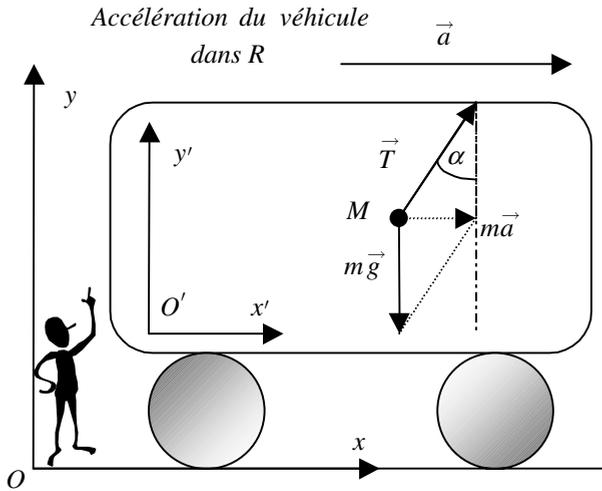


Figure 8.3 • Étude du mouvement du pendule dans le référentiel galiléen lié au sol.

b) Étude dans le référentiel Terrestre R, galiléen

Le système est le point matériel M de masse m qui subit les forces :

- \vec{P} : poids de la masse m;
- \vec{T} : tension du fil.

Pour l’observateur en O, la masse m a le même mouvement que le véhicule et donc le même vecteur accélération. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à M dans R conduit à

$$\vec{P} + \vec{T} = m \vec{a}$$

On en déduit donc que l’angle d’inclinaison est aussi donné par (8.1).

3.2. Mouvement de rotation

Considérons un pendule en mouvement de rotation uniforme, de vitesse angulaire ω , par rapport à un référentiel galiléen $R(O, x, y, z)$. Nous pouvons étudier le mouvement de la masse m dans ce référentiel ou dans le référentiel $R'(O, x', y', z')$ en rotation avec la masse m. Cette masse est alors fixe par rapport à R' (figure 8.4).

Dans le référentiel R, la masse a un mouvement circulaire uniforme, de vecteur vitesse angulaire. Le rayon du cercle décrit par M est $r = OM = l \sin \alpha$; les vecteurs vitesse et accélération, en coordonnées polaires, sont donc :

$$\begin{cases} \vec{v} = r\omega \vec{u}_\theta \\ \vec{a} = -r\omega^2 \vec{u}_\rho \end{cases}$$

Le référentiel $R'(O, x', y', z)$, lié au point M, est en mouvement de rotation uniforme par rapport à R, de vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}_{R'/R} = \omega \vec{u}_z$. Dans ce référentiel, la masse m apparaît immobile.

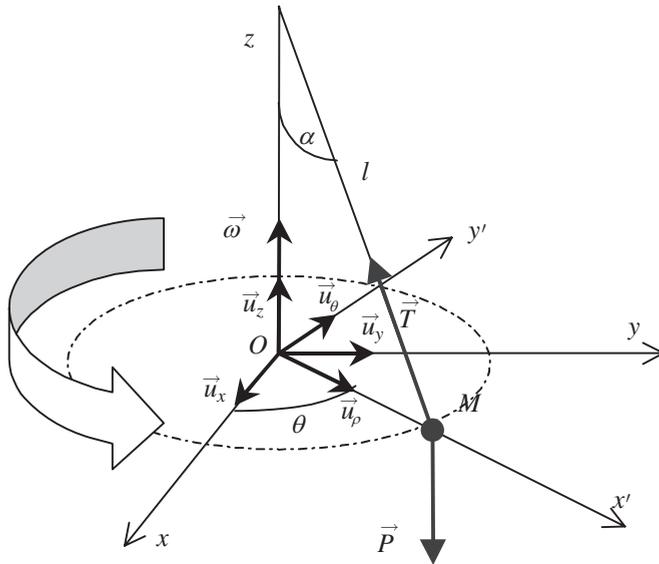


Figure 8.4 • Mouvement de rotation uniforme d'un pendule simple.

a) Étude dans le référentiel $R(O, x, y, z)$, galiléen

Le système est la masse m (en rotation) qui subit les forces :

- \vec{P} : poids de m ;
- \vec{T} : tension du fil.

Le principe fondamental de la dynamique conduit à

$$\vec{P} + \vec{T} = m \vec{a}$$

soit : $\vec{P} + \vec{T} = m \vec{a} = -m\omega^2 \sin \alpha \vec{u}_\rho$.

Par projection de cette relation sur \vec{u}_ρ nous avons

$$-T \sin \alpha = -m\omega^2 \sin \alpha$$

En projection sur \vec{u}_z nous obtenons

$$-mg + T \cos \alpha = 0$$

soit $\tan \alpha = \frac{l\omega^2 \sin \alpha}{g}$.

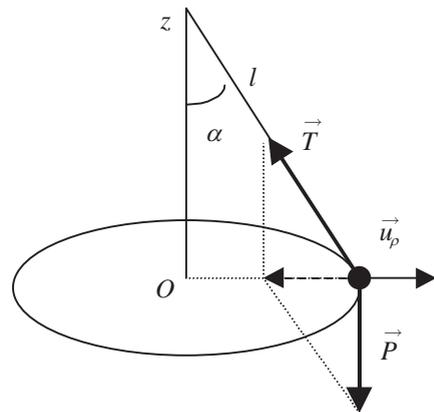


Figure 8.5 • Étude du mouvement dans le référentiel galiléen lié au sol.

b) Étude dans le référentiel $R'(O, x', y', z)$, non galiléen

Nous étudions dans R' le système masse m (immobile) qui subit les forces

- \vec{P} : poids de m ;
- \vec{T} : tension du fil;
- f_{ie} forces d'inertie.

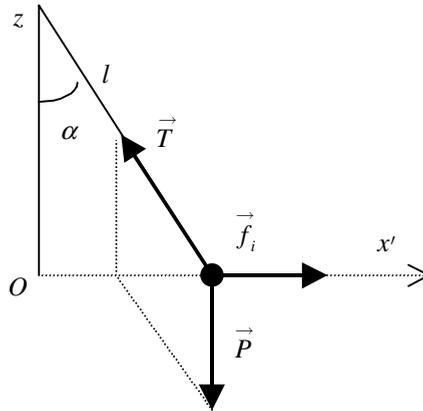


Figure 8.6 • Étude de l'équilibre dans le référentiel lié au pendule.

La force d'inertie de Coriolis est nulle puisque la masse est immobile dans R' . La seule force d'inertie à considérer est donc la force d'inertie d'entraînement qui est donnée par :

$$\vec{f}_{ie} = -m \vec{a}_e = -m \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}) = -m \vec{a}$$

soit $\vec{f}_{ie} = -m\omega^2 l \sin \alpha \vec{u}_\rho$.

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit alors :

$$\vec{P} + \vec{T} + m\omega^2 l \sin \alpha \vec{u}_\rho = \vec{0}$$

ce qui, compte tenu de la figure 8.6, conduit à :

$$\tan \alpha = \frac{f_{ie}}{mg} = \frac{\omega^2 l \sin \alpha}{g}$$

Les deux façons de raisonner aboutissent évidemment au même résultat. Ce sont les mêmes équations qui sont présentées différemment.

Vu du référentiel R , la masse ayant un mouvement circulaire uniforme, il est nécessaire que le fil s'incline pour que la somme des forces conduise à une accélération normale, centripète.

Vu du référentiel R' , le fil s'incline du fait de l'existence d'une force d'inertie. La masse est alors en équilibre sous l'action de trois forces. La force d'inertie est ici *centrifuge* et maintient, dans R' , l'objet sous un angle α par rapport à la verticale.

La condition d'équilibre peut se réécrire sous cette forme :

$$\tan \alpha = \frac{l\omega^2 \sin \alpha}{g} \implies \sin \alpha \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \frac{\omega^2 l}{g} \right) = 0$$

ce qui conduit aux solutions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha = 0 \implies \alpha = 0 \\ \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{\omega^2 l}{g} \end{array} \right.$$

La dernière condition n'est valable que dans la limite possible des valeurs du cosinus ce qui impose une condition supplémentaire sur la vitesse angulaire de rotation du système pour que l'on puisse observer la déviation sous l'angle α . Il faut en effet que :

$$\cos \alpha \leq 1 \implies \omega^2 \geq \frac{g}{l}$$

Cette vitesse de rotation est la vitesse en dessous de laquelle le pendule ne dévie pas. Un tel problème est un magnifique exemple de *bifurcation* en physique. On peut en effet représenter l'angle de déviation en fonction de la vitesse angulaire ω et vérifier que l'angle α bifurque quand on atteint la vitesse angulaire limite (figure 8.7).

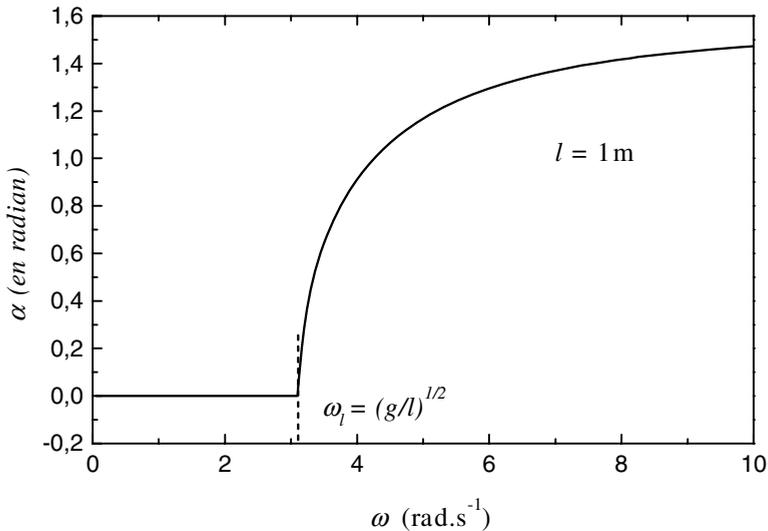


Figure 8.7 • Angle de déviation du pendule en fonction de la vitesse angulaire.

3.3. Poids apparent dans un ascenseur

Considérons, pour commencer, une personne immobile sur un pèse-personne posé sur le sol (figure 8.8). Le référentiel terrestre peut être pris comme galiléen. Les forces agissant alors sur la personne sont la réaction du support \vec{R} (c'est-à-dire du pèse-personne) et son poids \vec{P} . La condition d'immobilité de la personne conduit à écrire :

$$\vec{P} + \vec{R} = 0 \implies \vec{P} = -\vec{R}$$

\vec{R} est l'action du pèse-personne sur la personne. D'après le principe des actions réciproques, $(-\vec{R})$ représente l'action de la personne sur le pèse-personne, c'est-à-dire son poids \vec{P} .

Considérons maintenant la même situation mais qui se déroule dans un ascenseur en accélération par rapport à la Terre (figure 8.9).

L'ascenseur se déplace suivant un axe vertical Oz , orienté vers le haut. Le vecteur accélération de la cabine par rapport à la Terre est $\vec{a} = a\vec{u}_z$. Le référentiel R' , lié à l'ascenseur,

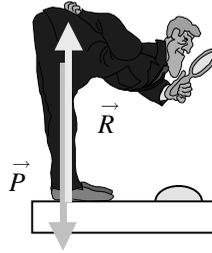


Figure 8.8 • Personne en équilibre sur un pèse-personne.

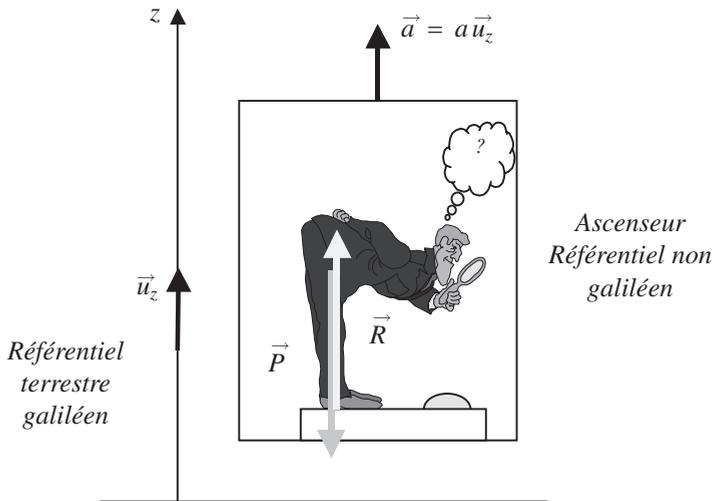


Figure 8.9 • Étude de l'équilibre d'une personne montée sur un pèse-personne placé dans un ascenseur.

n'est pas galiléen sauf si $a = 0$, car alors la cabine se déplacerait d'un mouvement rectiligne uniforme.

Dans le référentiel ascenseur non galiléen, la personne est immobile. Elle subit les forces :

- $\vec{P} = m \vec{g} = -mg \vec{u}_z$: son poids ;
- \vec{R} : la réaction du pèse-personne sur la personne.

Il faut ajouter les forces d'inertie. L'ascenseur étant en mouvement de translation rectiligne non uniforme, la force d'inertie de Coriolis est nulle et seule subsiste la force d'inertie d'entraînement qui s'écrit :

$$\vec{f}_{ie} = -m \vec{a} = -ma \vec{u}_z$$

La condition d'équilibre écrite dans le référentiel ascenseur donne donc :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f}_{ie} = \vec{0} \implies \vec{R} = (mg + ma) \vec{u}_z$$

Nous avons vu que $(-\vec{R})$ correspond à l'action de la personne sur le pèse-personne. Posons alors $\|\vec{R}\| = P_a$, poids apparent que le pèse-personne va indiquer. On a alors :

$$P_a = m(g + a)$$

Examinons les différents cas pouvant se présenter.

- $a > 0$: l'ascenseur démarre en montant ou freine en descendant. On a dans ce cas :

$$P_a = m(g + a) > mg = P$$

Le poids apparent est supérieur au poids réel. Nous nous sentons un peu plus lourd et avons tendance à fléchir légèrement les genoux ;

- $a = 0$: l'ascenseur se déplace à vitesse constante :

$$P_a = mg$$

Le référentiel est alors devenu galiléen. Nous retrouvons notre poids habituel et ne ressentons aucun effet du mouvement de l'ascenseur.

- $a < 0$: l'ascenseur freine en montant ou démarre en descendant. On a alors :

$$P_a = m(g - |a|) < mg = P$$

Cette fois, le poids apparent est inférieur au poids réel et nous nous sentons plus léger. Si le câble de l'ascenseur casse, la cabine se retrouve en chute libre avec une accélération $\vec{a} = \vec{g} = -g\vec{u}_z$. Le poids apparent devient alors nul. Nous nous retrouvons en état d'apesanteur et ne ressentons plus les effets de notre poids (ceci évidemment jusqu'au moment où la cabine s'écrase au sol).

3.4. État d'apesanteur dans un satellite artificiel de la Terre

Considérons un satellite, de masse M_S , en orbite autour de la Terre (figure 8.10). Le mouvement du centre d'inertie I de ce satellite, dans le référentiel géocentrique galiléen $R(T, x, y, z)$, est déterminé par le principe fondamental de la dynamique. La seule force agissant sur le système est la force de gravitation de la Terre. On peut écrire :

$$M_S \vec{a}(I) = M_S \vec{G}(I) \quad \Rightarrow \quad \vec{a}(I) = \vec{G}(I)$$

Le référentiel $R'(I, x', y', z)$, lié au centre d'inertie I du satellite et dont les axes restent parallèles aux axes du référentiel géocentrique, est en translation circulaire par rapport à R et n'est donc pas galiléen.

Étudions maintenant le mouvement, par rapport au satellite, d'un point matériel P (centre d'inertie d'un astronaute), de masse m , situé dans le satellite. Il est soumis à :

- la force de gravitation de la Terre $m\vec{G}(P)$;
- la force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e = -m\vec{a}(I) = -m\vec{G}(I)$.

Dans ce cas, il n'y a pas de force d'inertie de Coriolis puisque le référentiel $R'(I, x', y', z)$ est en translation.

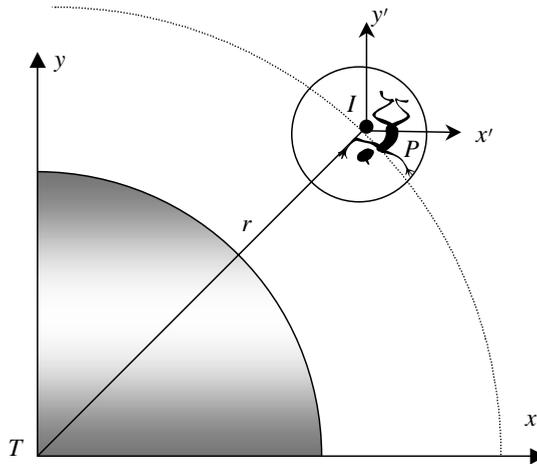


Figure 8.10 • Astronaute en état d'apesanteur dans un satellite.

Les dimensions du satellite étant très petites devant le rayon r de l'orbite du satellite, on peut considérer le champ de gravitation localement uniforme à l'intérieur et donc on peut écrire :

$$\vec{G}(P) = \vec{G}(I)$$

Dans ces conditions, la résultante des forces appliquées à P est :

$$m(\vec{G}(P) - \vec{G}(I)) = \vec{0}$$

L'astronaute se trouve en état d'apesanteur¹ (ou impesanteur), la force de gravitation terrestre est compensée par la force d'inertie centrifuge .

Nous avons considéré ici que le satellite était fixe dans R' . Il est possible de créer une certaine pesanteur artificielle dans le satellite en le faisant tourner, par exemple, autour de l'axe Iz . Dans ce cas, l'astronaute subit une force d'inertie supplémentaire, centrifuge, qui va lui permettre de retrouver un sol sous ses pieds.

4. DYNAMIQUE TERRESTRE

4.1. Poids d'un corps

Nous avons vu au chapitre 7 que le champ de pesanteur \vec{g} à la surface de la Terre pouvait se confondre avec le champ de gravitation terrestre \vec{G} . Nous allons montrer dans ce paragraphe que cette relation n'est qu'approchée et qu'elle doit être en toute rigueur révisée à cause du mouvement de rotation de la Terre.

Considérons une masse m caractérisée par un point I à la surface de la Terre à la latitude λ et étudions son équilibre dans le référentiel terrestre R' en rotation à la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ par rapport au référentiel géocentrique (origine T , centre de la Terre), lui-même en mouvement de translation circulaire par rapport au référentiel galiléen de Copernic

1. À lire : *Le phénomène d'impesanteur*, par J.P. Penoit B.U.P., 1988, n° 700, 1-44.

(origine S , centre d'inertie du Système Solaire). Dans ce qui va suivre nous considérons que le référentiel galiléen de référence est le référentiel de Copernic.

Le poids $\vec{P} = m\vec{g}$, produit de la masse m par le champ de pesanteur, se définit dans le référentiel terrestre à partir, par exemple, de l'équilibre de la masse posée sur le sol ou suspendue à un fil (ou un ressort) (figure 8.11).

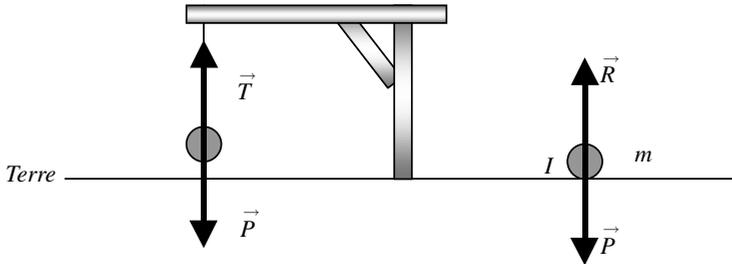


Figure 8.11 • Équilibre d'une masse dans le référentiel terrestre.

À l'équilibre, avec les notations de la figure 8.11, on a :

$$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0} \implies \vec{P} = -\vec{R}$$

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0} \implies \vec{P} = -\vec{T}$$

où \vec{R} est la réaction du sol et \vec{T} la tension du fil.

Pour déterminer ce qu'on appelle le poids d'un corps, il est nécessaire de faire un bilan de toutes les forces agissant sur lui en tenant compte en particulier des forces d'inertie qui apparaissent dans R' .

Dans le référentiel terrestre R' , la masse m subit :

- la force de gravitation de la Terre : $m\vec{G}_T(I)$;
- la force de gravitation de tous les astres (le Soleil, la Lune, etc.) que nous représentons par : $m\vec{G}_A(I)$;
- les forces d'inertie \vec{f}_i du fait que le référentiel terrestre R' n'est pas galiléen.

Comme la masse m est en équilibre dans R' elle ne subit que la force d'inertie d'entraînement \vec{f}_{ie} . L'accélération d'entraînement est donnée par

$$\vec{a}_e = \vec{a}_{T/S} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{TI})$$

avec $\vec{\omega}$ vecteur vitesse angulaire de rotation de la Terre autour de son axe nord-sud et $\vec{a}_{T/S}$ l'accélération du centre T de la Terre par rapport au référentiel de Copernic centré sur S (figure 8.12).

La force d'inertie d'entraînement s'écrit donc

$$\vec{f}_{ie} = -m \left[\vec{a}_{T/S} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{TI}) \right]$$

L'équilibre de la masse m à la surface de la Terre est donc régi par la relation

$$\vec{R} + m\vec{G}_T(I) + m\vec{G}_A(I) + \vec{f}_{ie} = \vec{0}$$

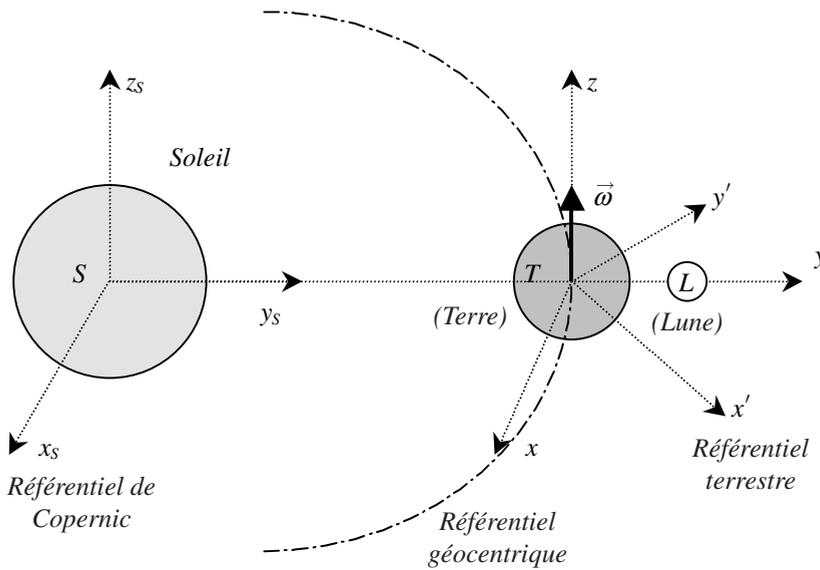


Figure 8.12 • Référentiels de Copernic, géocentrique et terrestre.

De plus, si nous considérons le mouvement du centre de masse de la Terre dans sa course autour du Soleil, nous pouvons écrire en nous plaçant dans le référentiel galiléen de Copernic :

$$M_T \vec{a}_{T/S} = M_T \vec{G}_A(T) \implies \vec{a}_{T/S} = \vec{G}_A(T)$$

Il est résulte que la force d'inertie d'entraînement s'écrit :

$$\vec{f}_{ie} = -m \vec{G}_A(T) - m \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{TI})$$

La somme des forces exercées sur m s'écrit donc dans le référentiel terrestre :

$$\vec{R} + m \vec{G}_T(I) + m \vec{G}_A(I) - m \vec{G}_A(T) - m \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{TI})$$

ce qui, par identification, conduit à :

$$\vec{P} = m \vec{g} = m \left[\vec{G}_T(I) - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{TI}) + \vec{G}_A(I) - \vec{G}_A(T) \right]$$

Nous voyons ainsi que le poids \vec{P} d'un corps n'est pas strictement égal à la force de gravitation qu'exerce la Terre sur lui. Le poids d'un corps est la somme de trois termes :

- $m \vec{G}_T(I)$: force de gravitation de la Terre exercée sur la masse m (centre d'inertie I) ;
- $-m \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{TI})$: force centrifuge due à la rotation de la Terre ;
- $m \vec{G}_A(I) - m \vec{G}_A(T)$ qu'on appelle le terme des marées car il est responsable du phénomène des marées comme nous le verrons à la fin de ce chapitre.

Le premier terme entre crochets est le plus important et correspond, en module, à environ $9,8 \text{ m.s}^{-2}$. Examinons maintenant l'ordre de grandeur des termes correctifs qui apparaissent en estimant leur valeur maximale. Le second terme qui est lié à l'accélération centrifuge vérifie :

$$\left\| \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{TI} \right) \right\| \leq \omega^2 R \simeq 0,034 \text{ m.s}^{-2}$$

Le dernier terme peut se calculer en évaluant la différence entre le champ de gravitation de tous les astres au point I considéré et celui au point T centre de la Terre. Il est facile de voir, en faisant apparaître l'attraction du Soleil (\vec{G}_S), de la Lune (\vec{G}_L) et l'interaction avec les autres astres, que :

$$\vec{G}_A(I) - \vec{G}_A(T) = \vec{G}_S(I) - \vec{G}_S(T) + \vec{G}_L(I) - \vec{G}_L(T) + \dots$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \left\| \vec{G}_S(I) - \vec{G}_S(T) \right\| &= \mathcal{G}M_S \left(\frac{1}{SI^2} - \frac{1}{ST^2} \right) = \frac{\mathcal{G}M_S}{ST^2} \left(\frac{ST^2}{SI^2} - 1 \right) \\ &\leq \frac{\mathcal{G}M_S}{ST^2} \left[\frac{ST^2}{(ST-R_T)^2} - 1 \right] = \frac{\mathcal{G}M_S}{ST^2} \left[\left(1 - \frac{R_T}{ST} \right)^{-2} - 1 \right] \end{aligned}$$

$$\left\| \vec{G}_S(I) - \vec{G}_S(T) \right\| \leq 2\mathcal{G} \frac{M_S R_T}{ST^3} = 5.10^{-7} \text{ m.s}^{-2}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \left\| \vec{G}_L(I) - \vec{G}_L(T) \right\| &\leq \mathcal{G}M_L \left(\frac{1}{LI^2} - \frac{1}{LT^2} \right) = \mathcal{G}M_L \left(\frac{1}{(60R)^2} - \frac{1}{(60R_T)^2} \right) \\ &\simeq \frac{\mathcal{G}M_L}{(60R)^2} \left(\left(1 - \frac{1}{60} \right)^2 - 1 \right) \end{aligned}$$

$$\left\| \vec{G}_L(I) - \vec{G}_L(T) \right\| \leq \frac{\mathcal{G}M_L}{(60R_T)^2} \frac{1}{30} = 11.10^{-7} \text{ ms}^{-2}$$

L'influence des autres astres, très faible devant celle du Soleil ou de la Lune, est absolument négligeable.

On constate que, bien que le champ de gravitation du Soleil en un point de la Terre soit supérieur à celui de la Lune, la différence de ce champ entre le centre T et un point de la surface terrestre est deux fois plus faible que pour la Lune. Néanmoins, ces corrections restent très faibles devant le terme correspondant à la force d'inertie due à la rotation de la Terre sur elle-même. Elles peuvent donc être négligées. Ceci revient à considérer le référentiel géocentrique comme galiléen et à ne pas tenir compte de tous les astres. Nous verrons un peu plus loin que ces termes correctifs peuvent jouer un rôle dans l'interprétation du phénomène des marées.

Toutes ces considérations montrent que finalement le champ de pesanteur terrestre peut s'écrire

$$\vec{g}(I) = \vec{G}_T(I) - \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{TI} \right) \implies \vec{g}(I) = \vec{G}_T(I) + \omega^2 R_T \cos \lambda \vec{u}'_x$$

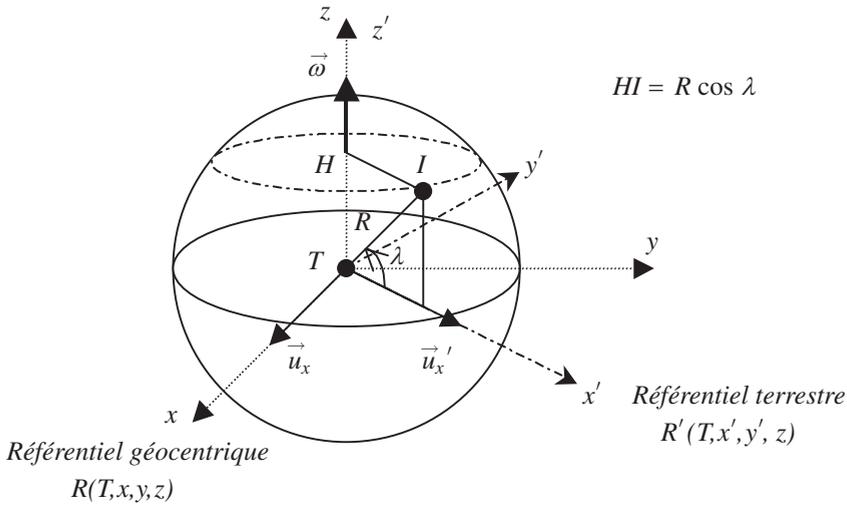


Figure 8.13 • Point I à la surface de la Terre à la latitude λ .

Le champ de pesanteur correspond donc au champ de gravitation corrigé de l'accélération centrifuge.

La tension \vec{T} du fil (ou la réaction du support) qui compense le poids n'est pas selon la direction du rayon terrestre TI mais en dévie un peu à cause de la force d'inertie d'entraînement, comme le montre la figure 8.14. La tension du fil compense la force $m\vec{g}$, qui est la force de pesanteur et dont l'expression est :

$$m\vec{g} = m\vec{G}_T(I) + \vec{f}_{ie} = m(\vec{G}_T(I) + \omega^2 R_T \cos \lambda \vec{u}'_x)$$

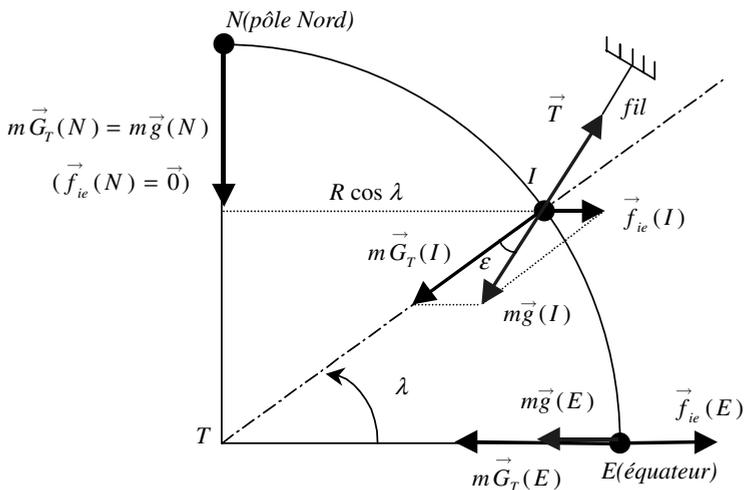


Figure 8.14 • Illustration du poids et de la force de gravitation.

Cela montre donc que le terme de gravitation G_T doit être corrigé de l'effet d'inertie et que l'accélération de la pesanteur diffère de l'accélération de gravitation selon la relation :

$$\vec{g} = \vec{G}_T + \omega^2 R_T \cos \lambda \vec{u}'_x$$

La correction d'inertie dépend bien sûr de la latitude du point considéré. Elle est nulle sur l'axe de rotation terrestre c'est-à-dire aux latitudes -90° et 90° . Elle est maximale à l'équateur. Les valeurs mesurées du champ de pesanteur g aux pôles et à l'équateur sont :

- aux pôles : $g = 9,83 \text{ m.s}^{-2}$;
- à l'équateur : $g = 9,78 \text{ m.s}^{-2}$.

Sachant que la vitesse angulaire de rotation de la Terre est $\omega = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$, la correction maximale est de $0,034 \text{ ms}^{-2}$. Cette correction est à l'équateur opposée à g et est légèrement inférieure à la correction attendue qui est de $0,05 \text{ ms}^{-2}$. La différence est imputable à la non-sphéricité de la Terre. En effet, la force d'inertie centrifuge déforme la Terre qui possède un rayon à l'équateur plus important qu'aux pôles.

La verticale d'un lieu, définie à partir de la direction que prend un fil à plomb, ne passe donc pas exactement par le centre de la Terre (sauf à l'équateur et aux pôles). C'est à la latitude $\lambda = 45^\circ$ que l'écart est maximal. En considérant le triangle formé par les deux vecteurs $\vec{g}(I)$ et $\vec{G}(I)$, on peut écrire la relation suivante faisant intervenir l'angle ε que font ces deux vecteurs :

$$\frac{\sin \varepsilon}{\omega^2 R \cos \lambda} = \frac{\sin(\pi - \lambda - \varepsilon)}{G}$$

Avec $\varepsilon \ll 1$, cette relation devient :

$$\frac{\varepsilon}{\omega^2 R \cos \lambda} = \frac{\sin \lambda + \varepsilon \cos \lambda}{G}$$

Pour $\lambda = 45^\circ$ et sachant que $\omega^2 R \ll G$, on obtient :

$$\varepsilon = \frac{\omega^2 R}{2G - \omega^2 R} = \frac{\omega^2 R}{2G} \left(1 - \frac{\omega^2 R}{2G}\right)^{-1} \simeq \frac{\omega^2 R}{2G} = 1,7410^{-3} \text{ rad}$$

Cet angle maximal, correspondant donc à $0,1^\circ = 6'$, est très faible et il apparaît légitime de considérer avec une bonne approximation que la verticale d'un lieu passe par le centre de la Terre.

En conclusion, on peut en première approximation confondre le champ de gravitation et le champ de pesanteur. Pour plus de précision, on tiendra compte du terme correctif correspondant à la force d'inertie d'entraînement.

4.2. Déviation vers l'est

Nous considérons maintenant le cas d'un objet en mouvement à la surface de la Terre. À titre d'exemple nous traitons le mouvement d'une masse m en chute libre d'une hauteur h en un point de latitude λ à la surface de la Terre.

La projection de l'équation fondamentale de la dynamique sur les trois axes conduit aux équations différentielles du mouvement suivantes :

$$\begin{aligned}\ddot{x}' &= 2\omega\dot{y}' - g \cos \lambda \\ \ddot{y}' &= -2\omega\dot{x}' \\ \ddot{z}' &= -g \sin \lambda\end{aligned}$$

Ces équations différentielles sont couplées par l'intermédiaire des variables x' et y' et leur résolution est quelque peu difficile si l'on ne fait pas l'approximation que la composante de la force de Coriolis selon l'axe des x' est négligeable. Cette hypothèse est justifiée par le fait que la vitesse de la masse m selon l'axe des y' est toujours faible puisqu'au point de départ le mouvement a lieu dans le plan $x'O'z'$. Dans ce cas le terme $2\omega\dot{y}'$ est négligeable devant le terme $g \cos \lambda$. Les équations différentielles se simplifient et s'écrivent :

$$\begin{aligned}\ddot{x}' &= -g \cos \lambda = G_1 \\ \ddot{y}' &= -2\omega\dot{x}' \\ \ddot{z}' &= -g \sin \lambda = G_2\end{aligned}$$

La première équation s'intègre facilement et conduit à :

$$\ddot{x}' = G_1 \Rightarrow \dot{x}' = G_1 t \Rightarrow x' = \frac{1}{2} G_1 t^2 + x_0 = \frac{1}{2} G_1 t^2 + h \cos \lambda$$

La seconde équation se résout en reportant l'expression de la vitesse selon x' dans l'expression de l'accélération de Coriolis, soit :

$$\begin{aligned}\ddot{y}' &= -2\omega\dot{x}' = -2\omega G_1 t \Rightarrow \dot{y}' = -\omega G_1 t^2 \\ \Rightarrow \dot{y}' &= -\frac{1}{3} G_1 \omega t^3 = \frac{1}{3} g \cos \lambda \omega t^3\end{aligned}$$

La dernière équation conduit à l'équation horaire suivante :

$$\ddot{z}' = G_2 \Rightarrow \dot{z}' = G_2 t \Rightarrow z' = \frac{1}{2} G_2 t^2 + z_0 = -\frac{1}{2} g \sin \lambda t^2 + h \sin \lambda$$

La déviation vers l'est est contenue dans le terme en $y' = \frac{1}{3} g \cos \lambda \omega t^3$. Cette quantité est positive, ce qui correspond à une déviation de la masse m vers l'est². On peut évaluer son importance. Supposons que la hauteur de chute soit de 45 m ce qui correspond à un temps de chute t égal à 3 secondes ($h = 1/2gt^2$) et que le point M soit à une latitude de 45° ; on obtient alors $y' = 4,5$ mm.

Remarquons que ce terme s'annule sur l'axe de rotation de la Terre car le vecteur vitesse angulaire est alors parallèle à la vitesse de chute ce qui annule la force de Coriolis.

Si on néglige cette déviation vers l'est, le mouvement se fait suivant la direction TI confondu avec la verticale du lieu. L'équation du mouvement est alors sur cette direction :

$$IM = -\frac{1}{2}gt^2 + h$$

2. À lire : *Vers l'est ou vers l'ouest*, par H. Gié BUP, 1986, n°685, 993-999.

4.3. Phénomène des marées

L'effet de marée est essentiellement attribué à la Lune. En effet, on constate que ce phénomène cyclique a une période proche de 12 h. Cependant une augmentation de 50 minutes environ se produit toutes les 24 h. Cette augmentation de la période est en accord avec le changement journalier de position de la Lune par rapport à la Terre. En effet la période de révolution de la Lune est de 28 jours. En 24 h la Lune aura effectué $1/28^e$ de tour, ce qui fait qu'un point de la Terre qui est en conjonction avec la Lune le sera de nouveau au bout de $24(1 + 1/27)$ h. La différence est ainsi de l'ordre de 53 min, ce qui est pratiquement égal au retard journalier des marées d'un jour sur l'autre. De plus, on constate des variations sur l'importance de ce phénomène au cours de l'année qui dépendent de la position du Soleil et de la Lune par rapport à la Terre. Le Soleil a donc aussi une influence sur les marées.

Si on considère que le référentiel géocentrique (et donc le référentiel terrestre) est non galiléen, nous avons vu que la force exercée sur une masse m d'eau de mer peut s'écrire dans le référentiel terrestre :

$$\vec{F} = m \left[\vec{G}_T(I) - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{TI}) + \vec{G}_A(I) - \vec{G}_A(T) \right]$$

Les seuls astres dont l'action n'est pas infime sont le Soleil et la Lune, en raison de la masse considérable du premier et de la proximité de la seconde. Cette expression peut donc se mettre sous la forme :

$$\vec{F} = m \vec{g} + m \left(\vec{G}_L(I) - \vec{G}_L(T) \right) + m \left(\vec{G}_S(I) - \vec{G}_S(T) \right)$$

soit

$$\vec{F} = m \vec{g} + m \left(\Delta \vec{g}_L + \Delta \vec{g}_S \right)$$

Le premier terme, $m \vec{g}$, correspond au terme de pesanteur (poids de la masse m) tel qu'il a été défini dans le chapitre 7, tandis que le deuxième terme, $m \left(\Delta \vec{g}_L + \Delta \vec{g}_S \right)$, correspond à la force génératrice de la marée. Ce dernier terme, appelé *terme des marées*, doit son nom au fait que la marée est le seul phénomène dans lequel il est pris en compte alors qu'il devrait l'être en toute rigueur dans tous les problèmes de mécanique.

Intéressons-nous principalement au terme $\Delta \vec{g}_L$, représentant l'influence de la Lune, la même étude pouvant être appliquée pour le terme $\Delta \vec{g}_S$, influence du Soleil. Nous avons vu que :

$$\Delta \vec{g}_L = \vec{G}_L(I) - \vec{G}_L(T)$$

Il s'ensuit que :

$$\Delta \vec{g}_L = -\mathcal{G}M_L \left(\frac{\vec{LI}}{LI^3} - \frac{\vec{LI}}{LI^3} \right)$$

Dans le repère (T, x, y, z) les vecteurs suivants ont pour composantes (figure 8.16) :

$$\vec{TI} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad \vec{LI} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -D \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \vec{LI} = \begin{Bmatrix} x \\ y - D \\ z \end{Bmatrix} \quad (8.2)$$

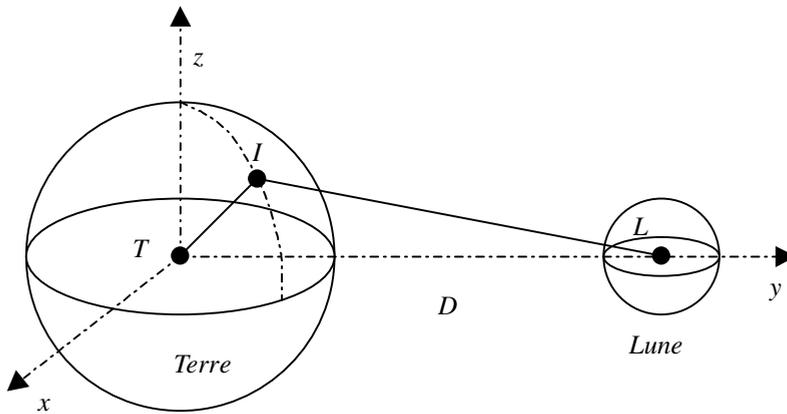


Figure 8.16 • Influence de la Lune sur un point I de la Terre.

Calculons la contribution de la Lune en I . Nous avons dans la base cartésienne :

$$\vec{G}_L(I) = -\mathcal{G}M_L \frac{\vec{LI}}{LI^3} = -\mathcal{G}M_L \frac{x\vec{u}_x + (y-D)\vec{u}_y + z\vec{u}_z}{(x^2 + (y-D)^2 + z^2)^{3/2}}$$

La distance TI (rayon de la Terre) étant très inférieure à la distance TL , il est possible de faire le développement limité de cette expression au premier ordre en y/D :

$$\vec{G}_L(I) = -\mathcal{G}M_L \frac{x\vec{u}_x + (y-D)\vec{u}_y + z\vec{u}_z}{D^3(1 - \frac{2y}{D} + \frac{x^2+y^2+z^2}{D^2})^{3/2}} \approx -\frac{\mathcal{G}M_L}{D^3}(x\vec{u}_x + (y-D)\vec{u}_y + z\vec{u}_z)(1 + \frac{3y}{D})$$

Il en résulte que la quantité $\Delta\vec{g}_L$ s'écrit :

$$\Delta\vec{g}_L \approx -\frac{\mathcal{G}M_L}{D^3}(x\vec{u}_x + (y-D)\vec{u}_y + z\vec{u}_z)(1 + \frac{3y}{D}) - \frac{\mathcal{G}M_L}{D^3}D\vec{u}_y$$

ce qui conduit à :

$$\Delta\vec{g}_L \approx -\frac{\mathcal{G}M_L}{D^3}(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z) + \frac{\mathcal{G}M_L}{D^3}3y\vec{u}_y = -\frac{\mathcal{G}M_L}{D^3}\vec{TI} + \frac{\mathcal{G}M_L}{D^3}3y\vec{u}_y$$

Cette quantité est donc la somme de deux termes. Le premier terme, que l'on notera \vec{g}_1 , s'écrit : $\vec{g}_1 = -\frac{\mathcal{G}M_L}{D^3}\vec{TI}$.

Il est de module constant et n'influence aucunement le mouvement de la mer. Il s'ajoute au champ de pesanteur et son influence est infime ($\|\vec{g}_1\| \simeq 5 \cdot 10^{-7} \text{ ms}^{-2}$).

Le second terme fluctue avec la position de I dans le repère (T, x, y, z) . Il est noté \vec{g}_2 et a pour expression : $\vec{g}_2 = \frac{\mathcal{G}M_L}{D^3}3y\vec{u}_y$.

La figure 8.17 représente le plan équatorial et précise la contribution en différents points I du repère.

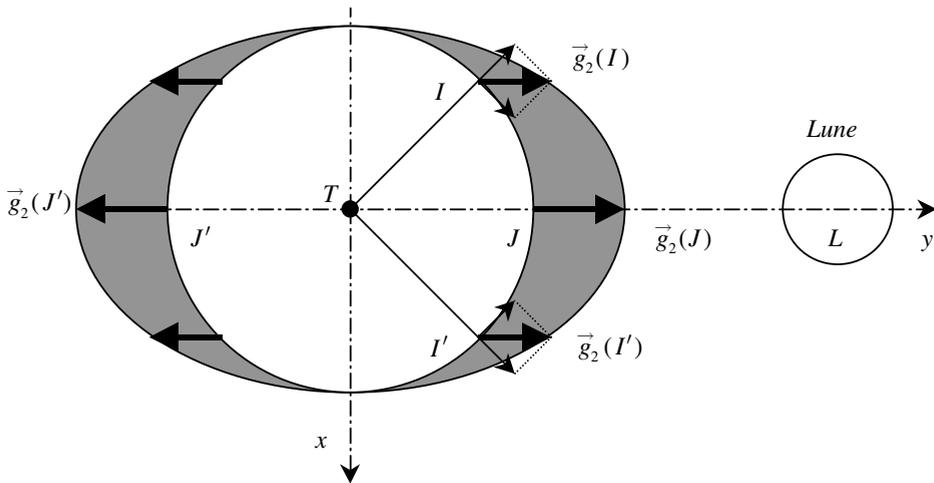


Figure 8.17 • Contribution de la Lune au phénomène des marées.

Il est clair sur ce schéma que la contribution de \vec{g}_2 est nulle lorsque le point I est sur l'axe des x car y est alors nul. On est alors en période de marée basse et au cours de la rotation de la Terre autour d'elle-même cela se produit deux fois. La mer est haute lorsque le point I se trouve sur l'axe des y . Il faut bien remarquer que \vec{g}_2 est alors centrifuge, que le point M soit en regard ou à l'opposé de la Lune.

Le vecteur \vec{g}_2 peut s'écrire : $\vec{g}_2 = \vec{g}_{2v} + \vec{g}_{2h}$ où \vec{g}_{2v} est la composante suivant la direction du rayon TI (verticale du lieu) et \vec{g}_{2h} suivant la direction perpendiculaire (horizontale). Le vecteur \vec{g}_{2v} , comme \vec{g}_1 , est absolument négligeable devant le champ de pesanteur \vec{g} . Par contre, la composante \vec{g}_{2h} peut être prise en compte car elle n'est « étouffée » par aucune autre force de masse, démesurée par rapport à elle. Ainsi malgré sa valeur faible ($0 < g_{2h} < 1,7 \cdot 10^{-6} \text{ m.s}^{-2}$), elle agit sur les éléments liquides pour les pousser vers les positions J et J' (figure 8.17) situées sur la direction TL , donnant l'illusion d'une attraction de la Lune au point J et expliquant une répulsion paradoxale au point J' .

Encart 8.1. Influence du Soleil sur les marées

Un calcul identique peut être fait pour la contribution du Soleil, celle-ci étant environ deux fois plus faible que celle de la Lune. On peut comprendre alors qu'il puisse y avoir des variations sur l'importance des marées au cours de l'année. En effet, l'influence du Soleil peut s'ajouter à celle de la Lune lorsque les trois astres (Terre, Lune et Soleil) se trouvent sur la même direction (époque des *syzygies*). On obtient alors des marées dites marées de vive-eau (figure 8.18). Lorsque la direction Terre-Lune est perpendiculaire à celle Terre-Soleil (époques des *quadratures*), les effets de la Lune sont contrariés par ceux du Soleil et les marées moins importantes sont dites marées de morte-eau (figure 8.19).

En fait, la rotation de la Terre a pour effet de déplacer le bourrelet de marée qui ne se retrouve donc pas exactement en regard de la Lune (points J ou J').

Les mouvements apparents de la Lune et du Soleil étant de période différente, le phénomène résultant est assez complexe et peut être considéré comme une superposition d'un grand nombre d'ondes, la plus importante étant, pour les océans comme l'Atlantique, celle due à la Lune. Viennent s'ajouter à ce phénomène les conditions aux

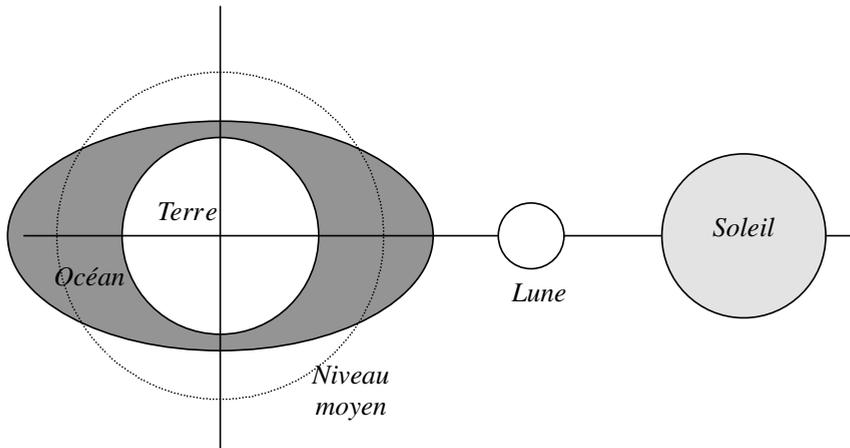


Figure 8.18 • Marée de vive-eau (époques des *syzygies*).

limites que forment les côtes. En effet, elles imposent l'existence d'ondes stationnaires dont l'amplitude peut être considérablement plus importante que celle de la marée océanique (baie du Mont-Saint-Michel en France : 12 à 16 m). Dans les petites mers fermées dont les rivages empêchent l'afflux liquide, les marées sont imperceptibles. Pour les petites mers ouvertes sur l'océan, la marée est indirecte et est entretenue, au travers des embouchures, par la marée de l'océan.

Pour conclure, le phénomène des marées est le phénomène qui met en évidence le fait que le référentiel géocentrique n'est pas galiléen.

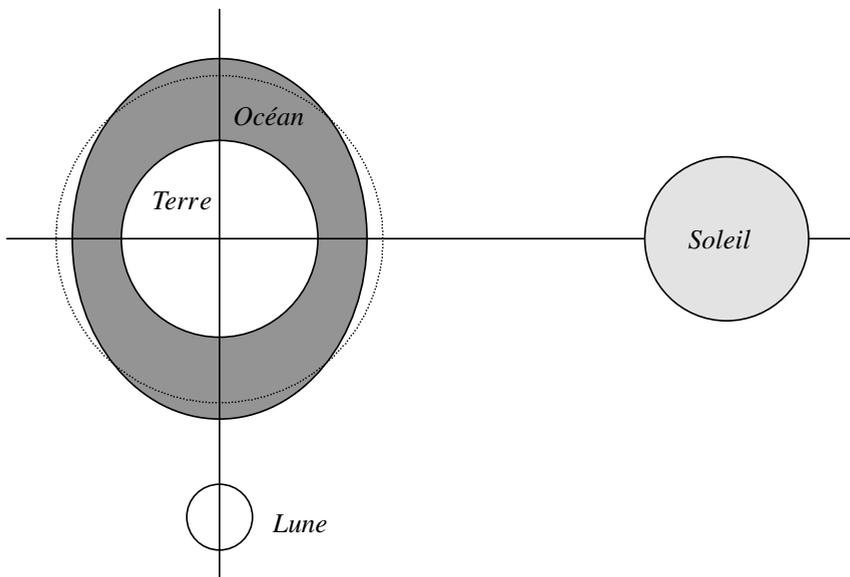


Figure 8.19 • Marée de morte-eau (époques des *quadratures*).

À RETENIR

- La relation fondamentale de la dynamique dans un référentiel R' non galiléen s'écrit :

$$m \vec{a}_{M/R'} = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$$

avec

- $\vec{f}_{ie} = -m \vec{a}_e$ nommée la *force d'inertie d'entraînement* ;
- $\vec{f}_{ic} = -m \vec{a}_c$ nommée la *force d'inertie de Coriolis* ou force d'inertie complémentaire ;

et

$$\vec{a}_e = \frac{d^2 \overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \vec{\omega}_{R'/R} \wedge (\vec{\omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}) + \frac{d\vec{\omega}_{R'/R}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{a}_c = 2 \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_{M/R'}$$

► Applications

- Champ de pesanteur et champ de gravitation en un point I de la surface de la Terre

$$\begin{aligned} \vec{g}(I) &= \vec{G}_T(I) - \vec{\omega}_{R'/R} \wedge (\vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{TI}) \\ \implies \vec{g}(I) &= \vec{G}_T(I) + \omega_{R'/R}^2 R_T \cos \lambda \vec{u}'_x \end{aligned}$$

Le champ de pesanteur $\vec{g}(I)$ est égal au champ de gravitation $\vec{G}_T(I)$ corrigé d'un terme d'inertie centrifuge.

- Les corps lancés à la surface de la Terre subissent une déviation vers l'est.
- Le phénomène des marées met en évidence le fait que le référentiel géocentrique n'est pas galiléen. Il s'interprète en tenant compte de l'attraction des astres et principalement de la Lune. La différence d'attraction de ces astres entre un point à la surface de la Terre et son centre est à l'origine de ce phénomène.

EXERCICES D'APPLICATION AVEC SOLUTION DÉTAILLÉE

Référentiel non galiléen

Un véhicule de masse totale $m = 200$ kg, centre d'inertie G , est abandonné sans vitesse initiale sur un plan incliné OA faisant un angle $\alpha = 60^\circ$ avec l'horizontale. Au cours de son mouvement, il subit des forces de frottement solide dont la résultante \vec{f} est une force de module $f = 1\,000$ N constant. Pour les applications numériques, on prendra $g = 10$ m.s⁻².

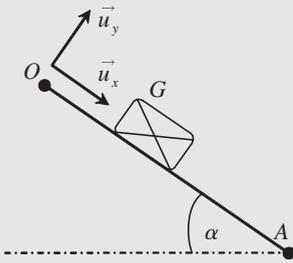


Figure 8.20

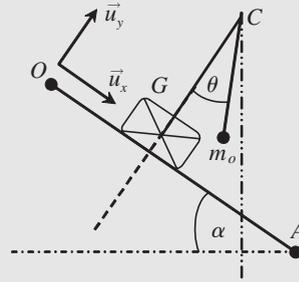


Figure 8.21

1) Dans le référentiel terrestre galiléen, on choisit un repère (O, x, y) et sa base (\vec{u}_x, \vec{u}_y) , l'axe Ox étant suivant la pente OA .

- a) Étudier le mouvement du centre d'inertie G du véhicule (figure 8.20) par rapport au référentiel Terrestre. Préciser la nature du mouvement. Donner l'expression de l'accélération $a(t) = \ddot{x}$ en fonction de m, g, f et α .
- b) Soit le référentiel (R) lié au véhicule. Quel est le mouvement exact de (R) par rapport au référentiel terrestre ? En déduire si ce référentiel est galiléen ou pas (justifier).

2) Sur le véhicule, Il y a une potence GC perpendiculaire au plan incliné. Une masse $m_o = 10^{-2}$ kg y est suspendue par l'intermédiaire d'un fil inextensible et de masse négligeable. Lors du mouvement du véhicule on constate que le pendule s'écarte d'un angle θ par rapport à la potence (figure 8.21) et se trouve en équilibre dans le référentiel (R) lié au véhicule. On étudie la masse m_o dans ce référentiel.

- a) Donner l'expression, dans la base (\vec{u}_x, \vec{u}_y) , de la force d'inertie d'entraînement \vec{F}_{ie} appliquée sur m_o . Faut-il introduire aussi une force d'inertie de Coriolis ?
- b) Quelles sont les autres forces exercées sur la masse m_o . Faire un schéma représentant toutes les forces. Donner les expressions des différents vecteurs forces dans la base (\vec{u}_x, \vec{u}_y) .
- c) La masse m_o étant en équilibre dans le référentiel (R) , en déduire deux équations reliant la tension T du fil et l'angle θ en fonction de m, m_o, f, g et α .
- d) Résoudre le système d'équation et exprimer $\tan \theta$. Montrer que la mesure de l'angle θ permet alors de déterminer les frottements f .

Applications numériques : calculer θ et la valeur de la tension T du fil.

- e) L'angle θ peut-il être nul ? Si oui à quelle condition ? Peut-on avoir $\theta = \alpha$? Si oui à quelle condition ?

Solution

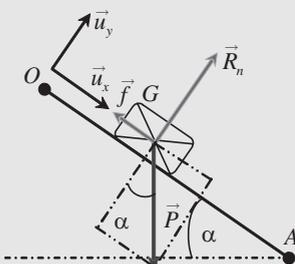


Figure 8.22

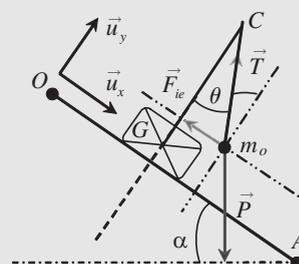


Figure 8.23

- 1) a) *Système* : masse m de centre d'inertie G (**figure 8.22**) ;

Référentiel terrestre galiléen ;

Bilan des forces :

$$\text{le poids } \vec{P} = m \vec{g} = mg[(\sin \alpha) \vec{u}_x - (\cos \alpha) u_y]$$

$$\text{la réaction normale du plan incliné } \vec{R}_n = R_n \vec{u}_y$$

$$\text{la force de frottement } \vec{f} = -f \vec{u}_x$$

$$\text{Principe fondamental de la dynamique : } \vec{P} + \vec{R}_n + \vec{f} = m \vec{a}$$

Projection sur la base d'étude :

$$\text{Sur } \vec{u}_y : R_n - mg \cos \alpha = 0 \Rightarrow R_n = mg \cos \alpha$$

$$\text{Sur } \vec{u}_x : mg \sin \alpha - f = m \ddot{x} \Rightarrow a(t) = \ddot{x} = g \sin \alpha - \frac{f}{m}$$

L'accélération est constante. Le mouvement est rectiligne uniformément accéléré.

- b) Le référentiel (R) lié au véhicule est en translation rectiligne uniformément accéléré, par rapport au référentiel terrestre, avec une accélération $a(t)$. Ce référentiel n'est pas en translation rectiligne uniforme ce qui serait la condition pour qu'il soit galiléen. Il est donc non galiléen.
- 2) a) Le référentiel (R) étant en translation, il n'y a pas de force d'inertie de Coriolis à introduire (elle n'intervient uniquement que lorsque le référentiel non galiléen est en rotation). L'accélération d'entraînement correspond à l'accélération $a(t)$ du point G . La force d'inertie d'entraînement est donc :

$$\vec{F}_{ie} = -m_o \vec{a}_e = -m_o \left[g \sin \alpha - \frac{f}{m} \right] \vec{u}_x = \left[-m_o g \sin \alpha + \frac{m_o}{m} f \right] \vec{u}_x$$

- b) Les autres forces exercées sur la masse m_o (**figure 8.23**) :

$$\text{le poids } \vec{P}_o = m_o \vec{g} = m_o g [(\sin \alpha) u_x - (\cos \alpha) \vec{u}_y]$$

$$\text{la tension } \vec{T} = T [-(\sin \theta) \vec{u}_x + (\cos \theta) \vec{u}_y]$$

- c) Condition d'équilibre de la masse m_o dans le référentiel (R) : $\vec{P}_o + \vec{T} + \vec{F}_{ie} = \vec{0}$

$$\text{Sur } \vec{u}_x : m_o g \sin \alpha - T \sin \theta - m_o g \sin \alpha + \frac{m_o}{m} f = 0$$

$$\text{Sur } \vec{u}_y : T \cos \theta - m_o g \cos \alpha = 0$$

- d) Sur $\vec{u}_y : T \cos \theta - m_o g \cos \alpha = 0 \Rightarrow T \cos \theta = m_o g \cos \alpha$ (1)

$$\text{Sur } \vec{u}_x : m_o g \sin \alpha - T \sin \theta - m_o g \sin \alpha + \frac{m_o}{m} f = 0 \Rightarrow T \sin \theta = \frac{m_o}{m} f \quad (2)$$

Le rapport de (2) sur (1) fait apparaître $\tan \theta$:

$$\tan \theta = \frac{f}{mg \cos \alpha} \quad (\text{la mesure de l'angle } \theta \text{ permet de connaître } f)$$

$$\text{Applications numériques : } \tan \theta = \frac{f}{mg \cos \alpha} = \frac{1000}{200 \cdot 10 \cdot 0,5} = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{La valeur de la tension } T \text{ du fil : } T = m_o g \frac{\cos \alpha}{\cos \theta} = 0,01 \cdot 10 \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 0,1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,0707 \text{ N}$$

- e) Si les frottements sont nuls, alors $f = 0$ et l'angle θ est nul.
Si f augmente, alors l'angle θ augmente jusqu'à $\theta = \alpha$ qui correspond au cas où les frottements sont suffisamment importants pour maintenir le véhicule à l'équilibre.

Référentiel non galiléen

Un étudiant désire déterminer l'accélération que peut avoir l'ascenseur de la Tour Montparnasse. Il a l'idée alors de suspendre, au plafond de la cabine, une masse m accrochée à un ressort de raideur k . Il fixe, le long du ressort, une règle avec un zéro central permettant de mesurer d'éventuels allongements ou étirements du ressort.

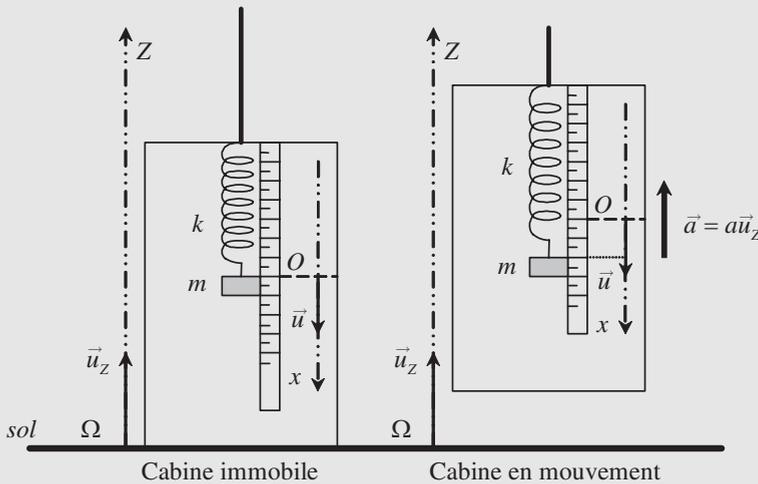


Figure 8.24

Figure 8.25

Le mouvement de l'ascenseur dans le référentiel Terrestre (R_T) est défini par rapport à un axe vertical ascendant ΩZ . Le vecteur accélération de la cabine en mouvement est $\vec{a} = a \vec{u}_Z$ avec \vec{u}_Z vecteur unitaire vertical ascendant.

La position de la masse m est repérée dans le référentiel (R) lié à l'ascenseur. L'étudiant choisit un axe Ox vertical descendant et un vecteur unitaire $\vec{u} = -\vec{u}_Z$. L'origine O (zéro central de la règle) est pris au niveau de la masse en équilibre lorsque la cabine est immobile (figure 8.24).

Lorsque la cabine est en mouvement (figure 8.25), l'étudiant constate que la position de la masse change. Le but de l'exercice est de relier la position algébrique x de la masse dans le référentiel (R) avec la valeur algébrique de l'accélération a de l'ascenseur et fabriquer ainsi un accéléromètre.

1) L'ascenseur est immobile, au rez-de-chaussée de la tour. L'étudiant mesure d'abord la longueur L_0 de son ressort à vide. Puis il accroche la masse m et mesure la nouvelle longueur L_e du ressort lorsque la masse est à l'équilibre.

Donner l'expression de la raideur k du ressort. Calculer la raideur k du ressort.

On donne : $L_0 = 20 \text{ cm}$ $L_e = 24,9 \text{ cm}$ $m = 0,1 \text{ kg}$ $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$

2) Quel est exactement le mouvement du référentiel (R) par rapport au référentiel Terrestre galiléen (R_T) lorsque l'ascenseur fonctionne. Le référentiel (R) est-il galiléen lorsque l'accélération a est non nulle ? Même question si $a = 0$?

3) L'ascenseur est en mouvement. Faire l'étude de l'équilibre de la masse dans le référentiel (R). Déterminer la relation entre a et x . Faire l'application numérique et donner la relation entre l'accélération a exprimée en m.s⁻² et x exprimé en cm.

4) Application numérique :

La masse se trouve devant la graduation -1 cm. Quelle est la valeur de l'accélération \mathbf{a} ?
À quels phases du mouvement de l'ascenseur cela correspond-il ?

Même question si la position correspond à $+1$ cm, puis si $x = 0$.

Dans l'hypothèse où l'ascenseur se trouverait en chute libre, quelle serait la longueur du ressort ?

Solution

1) L'ascenseur est immobile par rapport au référentiel terrestre galiléen. Le référentiel lié à l'ascenseur est donc aussi galiléen. Les forces exercées sur la masse m sont : $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}$ et $\vec{T} = k(L_e - L_0)$. La masse est en équilibre donc : $\vec{P} + \vec{T} = \vec{0} \Rightarrow$

La raideur du ressort :

$$k = \frac{mg}{L_e - L_0} = \frac{0,1 \cdot 9,8}{0,249 - 0,20} = \frac{0,98}{0,049} = 20 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} = 0,20 \text{ N} \cdot \text{cm}^{-1}$$

2) Le référentiel (R) est en mouvement de translation rectiligne par rapport au référentiel Terrestre galiléen (R_T) lorsque l'ascenseur fonctionne. Le référentiel (R) n'est pas galiléen si l'accélération a est non nulle. Si $a = 0$, alors le référentiel (R) est en translation rectiligne uniforme par rapport à (R_T) et est donc galiléen.

3) Système : la masse m ; référentiel non galiléen (R) ; les forces : poids de la masse $\vec{P} = mg\vec{u}$, tension du ressort $\vec{T} = -k(L_e + x - L_0)\vec{u}$ et

$$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e = -m\vec{a} = -ma\vec{u}_z = ma\vec{u} \quad (\text{la force d'inertie d'entraînement}).$$

L'équilibre de la masse dans le référentiel (R) se traduit par :

$$\begin{aligned} \vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{ie} &= \vec{0} = mg\vec{u} - k(L_e + x - L_0)\vec{u} + ma\vec{u} \\ \Rightarrow mg - k(L_e - L_0) + ma - kx &= 0 = ma - mx. \end{aligned}$$

On a donc : $a = \frac{k}{m}x = \frac{20}{0,1}x = 200x$ avec a en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ et x en m.

Avec l'accélération a exprimée en $\underline{\text{m} \cdot \text{s}^{-2}}$ et x exprimé en $\underline{\text{cm}}$: $a = 2x$

4) Application numérique :

$x = -1$ cm alors $\mathbf{a} = -2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. L'accélération est vers le bas donc cela correspond soit à un freinage en montant pour s'arrêter à un étage soit un démarrage vers le bas pour redescendre.

$x = +1$ cm alors $\mathbf{a} = +2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. L'accélération est vers le haut donc cela correspond soit à un freinage en descendant pour s'arrêter à un étage soit un démarrage vers le haut pour atteindre un étage supérieur.

Chute libre alors $\mathbf{a} = -\mathbf{g}$. Alors $a = 200x \Rightarrow x = -0,049$ cm et donc $L = 20$ cm. Le ressort est ni étiré ni comprimé. C'est l'état d'apesanteur.

Mouvement d'une fléchette dans un référentiel tournant

Un joueur de fléchette s'installe sur un grand plateau tournant et s'amuse à tirer sur une cible située au centre. Malgré son bon niveau il est étonné de voir qu'il n'arrive plus à atteindre la cible et cherche à expliquer ce résultat en étudiant les effets du mouvement du plateau sur le mouvement de sa fléchette.

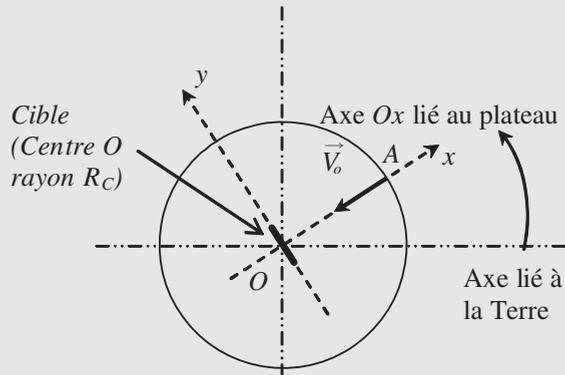


Figure 8.26 • Plateau Oxy tournant. Vitesse angulaire ω par rapport à la Terre.

Le plateau est un disque horizontal de rayon $R = 10$ m et de centre O . On utilise un **repère cartésien** (O, x, y, z) **lié au plateau** (voir figure 8.26) et sa base associée $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

Le joueur A se place suivant l'axe Ox , à l'extrémité du disque c'est-à-dire $OA = R$. La cible est placée le long de l'axe Oy son centre (le « mille ») étant confondu avec le point O . Cette cible a un rayon de $R_C = 5$ cm.

Par rapport au référentiel terrestre galiléen, le plateau tourne lentement suivant l'axe vertical Oz , dans le sens trigonométrique, avec une vitesse angulaire ω correspondant à **1 tour en 10 minutes**.

La fléchette sera considérée comme ponctuelle de masse m et la vitesse que le joueur donne initialement à la fléchette est : $\vec{V}_0 = -V_0 \vec{u}_x$ avec $V_0 = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

I. Le plateau est fixe (par rapport à la Terre)

- 1) Le référentiel plateau est-il galiléen ?
- 2) La fléchette F n'est soumise qu'à son poids. Appliquer le principe fondamental de la dynamique et montrer que le mouvement projeté suivant Ox est uniforme de vitesse \vec{V}_0 . En déduire l'expression de l'équation horaire $x(t)$ en fonction de R et V_0 .
- 3) Donner l'expression du temps T mis par la fléchette pour atteindre la cible. Faire l'application numérique.
- 4) Sans faire de calcul, indiquer quel est l'effet du poids sur le mouvement. Cet effet est-il visible dans le plan xOy (on observe comme sur la figure, vue de dessus).

Par la suite, on s'intéressera uniquement au mouvement de la fléchette dans le plan xOy . Cela reviendra donc à **négliger son poids**.

II. Le plateau tourne (par rapport à la Terre)

II.A. Étude cinématique

- 1) Donner l'expression du vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Donner la valeur de ω dans les unités du système international.
- 2) Si la fléchette était posée sur le sol du plateau à l'abscisse x , quel serait son mouvement par rapport à la terre. En déduire l'expression, dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, de l'accélération qu'elle aurait par rapport au référentiel Terrestre. Donner alors, pour la fléchette en mouvement, située à l'abscisse $x(t)$ (**expression en fonction de R , V_0 et t de la question I.2**), l'expression du vecteur accélération d'entraînement \vec{a}_e de la fléchette par rapport au référentiel terrestre.
- 3) L'accélération de Coriolis ou complémentaire qui intervient dans la loi de composition des accélérations a pour expression : $\vec{a}_C = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}$ avec \vec{V} vecteur vitesse du point considéré dans le référentiel tournant et $\vec{\Omega}$ le vecteur vitesse angulaire du référentiel tournant par rapport au référentiel terrestre. Dans le cas de notre fléchette qui se déplacerait avec une vitesse $\vec{V} = -V_0\vec{u}_x$ par rapport au plateau tournant, donner l'expression de l'accélération de Coriolis \vec{a}_C dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

II.B. Étude dynamique

La rotation du plateau est suffisamment faible pour qu'on puisse, dans un premier temps, considérer que la vitesse de la fléchette est $\vec{V} = -V_0\vec{u}_x$.

- 1) Le référentiel « plateau » est-il galiléen ? Pourquoi ?
- 2) Faire l'étude du système fléchette de masse m dans le référentiel « plateau ». Exprimer les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis en utilisant les résultats de la partie II.A. Appliquer le principe fondamental de la dynamique (équation vectorielle (1)).
- 3) Projeter l'équation (1) suivant l'axe Ox . Après intégration, montrer que :

$$\dot{x}(t) = -V_0(1 + at^2 - bt) \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont 2 constantes positives.}$$

- a) Exprimer a et b en fonction de R , ω et V_0 . Calculer les constantes a et b .
- b) Pour $t \approx T$ (temps mis par la fléchette pour atteindre la cible) calculer $(1 - aT^2 + bT)$. Est-il justifié de considérer dans un premier temps que la vitesse suivant Ox est $-V_0$?
- 4) Projeter l'équation (1) suivant l'axe Oy . Après intégration, montrer que :

$$y(t) = ct^2 \quad \text{où } c \text{ est une constante}$$

- a) Exprimer c en fonction de ω et V_0 . Calculer la constante c .
- b) Exprimer $\dot{y}(t) = v_y$ en fonction de la constante c .
- c) Pour $t \approx T$ (temps mis par la fléchette pour atteindre la cible) calculer $\dot{y}(T) = v_y(T)$ et comparer avec V_0 . Conclure à propos de l'hypothèse faite au début du calcul de considérer dans un premier temps que $\vec{V} = -V_0\vec{u}_x$.
- d) Pour $t \approx T$ (temps mis par la fléchette pour atteindre la cible) calculer $y(T)$. Faire un schéma donnant l'allure de la trajectoire de la fléchette dans le plan xOy .

Conclure : la fléchette atteint-elle la cible ?

(Remarque : cette méthode se nomme : méthode par perturbation).

Solution

I. Le plateau est fixe (par rapport à la Terre)

1) Le référentiel plateau fait parti du référentiel terrestre galiléen.

2) Seule force : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$. En appliquant le principe fondamental de la dynamique on obtient : $-mg\vec{u}_z = m\vec{a}$ soit $\vec{a} = -g\vec{u}_z$. En projetant suivant Ox on a : $\ddot{x} = 0$. En intégrant et en tenant compte de la vitesse initiale on aura : $\dot{x} = -V_0$. Le mouvement est uniforme. À l'instant initial $t = 0$, $OA = R$ et donc :

$$\dot{x} = -V_0 \Rightarrow x(t) = -V_0 t + R = R - V_0 t$$

3) On a $x(T) = 0$ soit :

$$0 = -V_0 T + R \Rightarrow T = \frac{R}{V_0} = \frac{10}{10} = 1 \text{ s}$$

4) Le poids agit suivant la direction Oz uniquement. Il a pour effet de faire descendre la fléchette mais ne provoque pas de déviation suivant Ox ou Oy . Cet effet n'est donc pas visible dans le plan xOy .

II. Le plateau tourne (par rapport à la Terre)

II.A. Étude cinématique

1) Le vecteur vitesse angulaire est $\vec{\omega} = \omega\vec{u}_z$. A.N : $\omega = \frac{2\pi}{10.60} = 0,0105 \text{ rad.s}^{-1}$

2) La fléchette aurait un mouvement circulaire de centre O et de rayon $OA = x$. Il serait uniforme. On a donc : $\vec{OA} = x\vec{u}_x$ avec la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ mobile dans le référentiel terrestre (correspond à la base des coordonnées polaire). On aura en dérivant et en sachant qu'on considère x comme une constante pour ce calcul : $\vec{V}_A = x\dot{\theta}\vec{u}_y = x\omega\vec{u}_y$ et donc $\vec{a}_A = -x\omega^2\vec{u}_x$. Cette accélération correspond, dans le cas où la fléchette est en mouvement, située à l'abscisse $x(t)$ à l'instant t , à l'expression du vecteur accélération d'entraînement \vec{a}_e de la fléchette par rapport au référentiel terrestre. On a donc :

$$\vec{a}_e = -x\omega^2\vec{u}_x$$

4) L'accélération de Coriolis ou complémentaire

$$\vec{a}_C = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V} = 2\omega\vec{u}_z \wedge (-V_0\vec{u}_x) = -2\omega V_0\vec{u}_y$$

II.B. Étude dynamique

1) Le référentiel « plateau » n'est plus galiléen. Il est en rotation par rapport au référentiel terrestre galiléen avec un vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega\vec{u}_z$.

2) Système fléchette de masse m dans le référentiel « plateau ». On ne tient pas compte du poids donc il reste les forces d'inertie.

La force d'inertie d'entraînement : $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e = m\omega^2 x(t)\vec{u}_x = m\omega^2(R - V_0 t)\vec{u}_x$

La force d'inertie de Coriolis : $\vec{F}_{iC} = -m\vec{a}_C = 2m\omega V_0\vec{u}_y$.

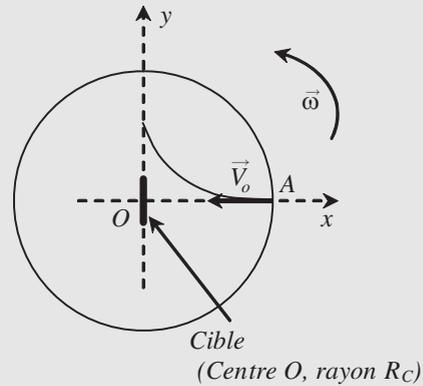


Figure 8.27

Appliquons le principe fondamental de la dynamique (équation vectorielle **(1)**) :

$$m \vec{a} = m\omega^2(R - V_o t) \vec{u}_x + 2m\omega V_o \vec{u}_y \Rightarrow \vec{a} = \omega^2(R - V_o t) \vec{u}_x + 2\omega V_o \vec{u}_y$$

3) Projection de l'équation **(1)** suivant l'axe Ox : $\ddot{x} = \omega^2(R - V_o t)$. En intégrant 2 fois de suite et sachant qu'à $t = 0$ on a $\dot{x}(0) = -V_o$ et $x = R$:

$$\dot{x} = \omega^2 R t - \frac{\omega^2 V_o}{2} t^2 - K \text{ et } \dot{x}(0) = -V_o$$

$$\text{donc : } \dot{x} = \omega^2 R t - \frac{\omega^2 V_o}{2} t^2 - V_o = -V_o \left(1 - \frac{\omega^2 R}{V_o} t + \frac{\omega^2}{2} t^2\right)$$

$$\dot{x}(t) = -V_o(1 - bt + at^2) \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont 2 constantes}$$

a) et b) $b = \frac{\omega^2 R}{V_o} = \left(\frac{2\pi}{60}\right)^2 \frac{R}{V_o} = 0,00011 \text{ s}^{-2}$ et $a = \frac{\omega^2}{2} = 0,000055 \text{ s}^{-1}$

c) Pour $t \approx T = 1 \text{ s}$,

$$(1 - bT + aT^2) = 1 - 0,00011 + 0,000055 = 1 - 0,000055 = 0,999945 \approx 1.$$

Il est donc justifié de considérer dans un premier temps que la vitesse suivant Ox est $-V_o$. L'erreur relative serait de 0,0055%.

4) Projection de l'équation **(1)** suivant l'axe Oy :

$$\ddot{y} = 2\omega V_o \Rightarrow \dot{y} = 2\omega V_o t + K \text{ et } \dot{y}(0) = 0$$

donc on obtient : $\ddot{y} = 2\omega V_o \Rightarrow \dot{y} = 2\omega V_o t$

en intégrant encore une fois et avec $y(0) = 0$: $y(t) = \omega V_o t^2 = ct^2$

a) Avec $c = \omega V_o = 0,1 \text{ s}^{-2}$

b) $\dot{y}(t) = 2\omega V_o t = 2ct$

c) Pour $t \approx T = 1 \text{ s}$ $\dot{y}(T) = v_y(T) = 0,2 \text{ m.s}^{-1}$ à comparer avec $V_o = 10 \text{ m.s}^{-1}$.

L'hypothèse revient à négliger 2 devant 100 soit une erreur relative de 2%. C'est justifié.

d) Pour $t \approx T = 1 \text{ s}$ on a $y(T) = 0,1 \text{ m} = 10 \text{ cm} > 5 \text{ cm} = R_C$. (déviation de 10 cm sur une longueur de 10 m (1%))

Voir schéma au début de l'exercice (portion de parabole, y est fonction de t^2 et x est fonction de t)

Conclure : la fléchette n'atteint pas la cible.

Référentiel terrestre non galiléen : usure des rails

Un train roule à vitesse constante sur une voie le long du méridien de Greenwich à la latitude λ . Montrer que la force d'inertie de Coriolis est responsable d'une usure inégale des rails. De quel côté se trouve le rail le plus usé ?

Solution

Usure des rails

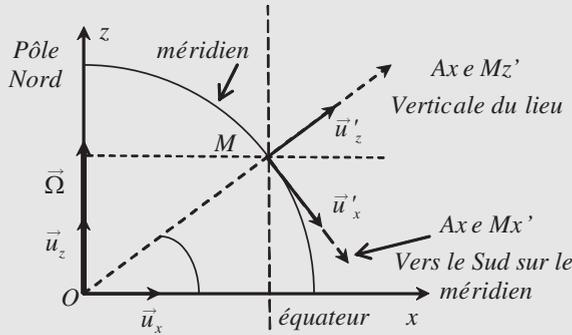


Figure 8.28

Référentiel géocentrique considéré comme galiléen : repère (O, x, y, z) avec O le centre de la Terre

(R) , Référentiel Terrestre non galiléen : repère (M, x', y', z') avec M point lié à la Terre, l'axe Mx' est la direction du méridien passant par M et orienté vers le Sud, l'axe Mz' est la verticale du lieu et My' correspond à la direction sur le parallèle du lieu orienté vers l'Est. L'angle λ est la latitude du lieu (environ 45°)

Le mouvement du référentiel (R) par rapport au référentiel géocentrique se décompose en un mouvement de translation circulaire (le point M décrit un cercle de rayon $R_T \cos \lambda$ avec la vitesse angulaire Ω) et en un mouvement de rotation (les axes Mx' , My' , Mz' tournent) avec un vecteur vitesse angulaire

$$\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_z = \Omega(-\cos \lambda \vec{u}'_x + \sin \lambda \vec{u}'_z).$$

Dans le référentiel terrestre, on considère un train se déplaçant à la vitesse $\vec{v} = v \vec{u}'_x$ (sur le méridien vers le sud par exemple)

Étude des actions exercées sur une roue du train

Dans le référentiel terrestre non galiléen il y a :

- Le poids qui comprend à la fois l'attraction de la terre et la force d'inertie d'entraînement (« force centrifuge ») verticale vers le bas. On peut considérer ici que la verticale passe par le centre O de la Terre (l'écart étant très faible) donc suivant l'axe Mz' .
- La réaction des rails
- La force d'inertie de Coriolis

$$\begin{aligned} \vec{f}_{ic} &= -m \vec{a}_c = -2m \vec{\Omega} \wedge \vec{v} \\ \vec{f}_{ic} &= -2m \Omega (-\cos \lambda \vec{u}'_x + \sin \lambda \vec{u}'_z) \wedge v \vec{u}'_x \\ &= -2m \Omega v \sin \lambda \vec{u}'_y \end{aligned}$$

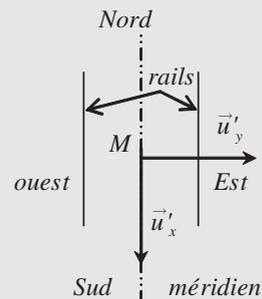


Figure 8.29

Mouvement suivant \vec{u}'_y : les rails guident le train et donc il y a équilibre c'est-à-dire :

$$-2m \Omega v \sin \lambda \vec{u}'_y + R_{y'} \vec{u}'_y = 0 \Rightarrow R_{y'} = 2m \Omega v \sin \lambda$$

Les rails agissent latéralement pour guider le train.

L'action des roues sur les rails est donc $-R_{y'} = -2m\Omega v \sin \lambda = f_{ic}$

Les roues vont donc appuyer plus sur le rail droit (par rapport au sens de la marche).

Le rail droit va donc s'user plus vite du côté de l'intérieur.

EXERCICES CORRIGÉS

- 1** On considère un axe Oz vertical et fixe par rapport à la Terre et un axe Ox' horizontal pouvant tourner autour de Oz à la vitesse angulaire constante. Un point matériel M de masse m peut glisser sans frottement sur Ox . Ce point est soumis en outre à une force dirigée de M vers O proportionnelle à la distance OM . Soit λ le coefficient de proportionnalité.
- 1) Déterminer la relation donnant $x = OM$ en fonction du temps ainsi que les composantes de la réaction exercée par Ox sur M . Discuter suivant les valeurs de λ .
 - 2) À quelle condition M est-il en équilibre relatif par rapport à Ox' ?
 - 3) Déterminer alors la réaction de Ox' . On prendra comme conditions initiales, à $t = 0$, $x = x_0$; $dx/dt = 0$.

- 2** On considère un axe Oz vertical fixe par rapport à la Terre et un axe Ox faisant avec Oz un angle aigu α et tournant autour de Oz avec une vitesse angulaire constante ω . Un point matériel M de masse m peut glisser sans frottement sur Ox .
- 1) Déterminer la relation $r = OM$ en fonction du temps ainsi que les composantes de la réaction exercée par Ox sur M .
 - 2) À $t = 0$, $r = r_0$ et $dr/dt = 0$. À quelles conditions sur r_0 le point est-il en équilibre relatif par rapport à Ox ?

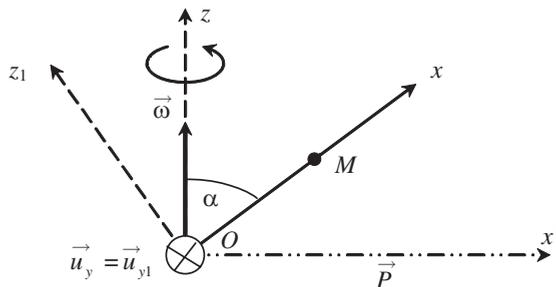


Figure 8.30

- 3** On considère une gouttière d'équation plane $y = ax^2$ par rapport à un repère Oxy (Oy vertical). Dans cette gouttière, on place un point matériel de masse m . On fait tourner la gouttière autour de l'axe Oy à la vitesse angulaire constante ω .

Trouver la valeur que doit avoir ω pour que le point puisse être en équilibre relatif par rapport à la gouttière lorsqu'on le dépose en un point donné de celle-ci sans vitesse initiale relative.

4 Pendule de Foucault

En 1850, J.B. Foucault démontre que le mouvement d'un pendule simple illustre le caractère non galiléen du référentiel terrestre en étudiant le mouvement pendant un temps non négligeable devant la période de révolution de la Terre sur elle-même. Les conditions initiales sont les suivantes : le pendule est initialement dans le plan xOz et il part sans vitesse initiale d'une position écartée de 10° par rapport à la verticale. Dans tout le problème on supposera que l'accélération de la pesanteur g est constante et égale à 10 ms^{-2} .

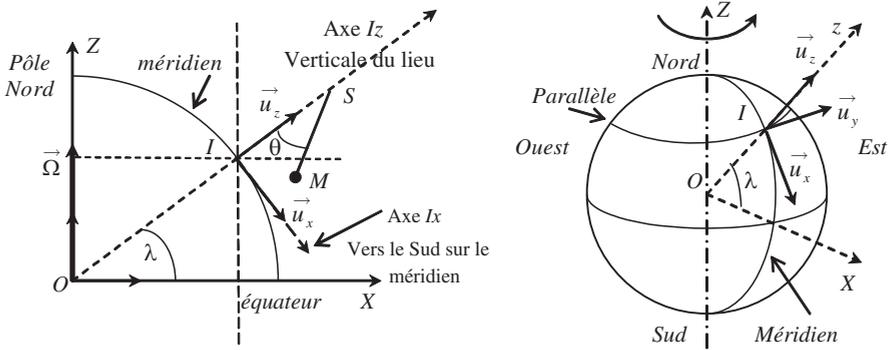


Figure 8.31 • Pendule de Foucault.

- 1) Que peut-on dire du référentiel terrestre ?
- 2) Le pendule simple est placé au Mans à la latitude $\lambda = 48^\circ$.

Déterminer les composantes du vecteur de rotation instantanée $\vec{\Omega}$ de la Terre dans la base $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ du référentiel terrestre $R(O, x, y, z)$. Comparer ses composantes à la pulsation propre ω_0 du pendule de longueur $l = 60 \text{ m}$. On rappelle que la Terre tourne sur elle-même en 24 h.

- 3) On appelle \vec{u}_r le vecteur unitaire dans la direction de $\vec{SM} = l \vec{u}_r$. Calculer l'expression de ce vecteur en fonction de (x, y, z) , position de M dans R et de l longueur du pendule. En déduire l'expression de la tension \vec{T} du fil dans la base $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ en fonction de T, x, y, z et l .
- 4) Écrire l'équation vectorielle du mouvement du pendule dans R en négligeant la force d'inertie d'entraînement.
- 5) En déduire les équations différentielles du mouvement de la masse m sur les trois axes du référentiel.
- 6) On admet que si l'amplitude d'oscillation est faible, la tension T du fil ne diffère que de très peu du poids P de la masse m . En faisant cette approximation, réécrire les équations du mouvement en faisant apparaître la pulsation propre de l'oscillateur.
- 7) On suppose que la vitesse de l'oscillateur selon z est faible par rapport à sa vitesse selon y . Écrire les équations différentielles selon les axes x et y dans le cadre de

cette approximation. En utilisant la variable complexe $U = x + iy$, écrire l'équation différentielle satisfaite par U .

8) Résoudre cette équation. Montrer que la solution peut se mettre sous la forme :

$$U = A e^{ikt} \cos \omega_0 t$$

Déterminer A et k .

9) En déduire les équations horaires du mouvement selon x et y .

10) Montrer que le pendule oscille dans des plans différents. Au bout de combien de temps le pendule aura-t-il fait un tour ? Commenter l'influence de la latitude.

Solutions

1) 1) Nous nous plaçons dans le référentiel $R(O, x', z)$ en mouvement de rotation. Ce référentiel n'est pas galiléen puisqu'il tourne. Dans R le point M est soumis à :

- son poids \vec{P} ;
- la réaction du support \vec{R} ;
- la force $\vec{F} = -\lambda \vec{OM}$
- la force d'inertie d'entraînement \vec{f}_{ie}
- la force d'inertie de Coriolis \vec{f}_{ic} .

L'application du principe fondamental de la dynamique au point M dans R non galiléen conduit à :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic} - \lambda \vec{OM} = m \vec{a}_{M/R}, \quad \text{avec} \quad \vec{f}_{ie} = -m \vec{a}_e = -m \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM})$$

et $\vec{f}_{ic} = -2m \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{M/R}$.

Les composantes des différents vecteurs dans R sont :

$$\vec{a}_{M/R} = \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \vec{P} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{Bmatrix} \quad \vec{v} = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \vec{f}_{ie} = \begin{Bmatrix} m\omega^2 x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{\omega} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} \quad \vec{F} = \begin{Bmatrix} -\lambda x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \vec{R} = \begin{Bmatrix} 0 \\ R_y \\ R_z \end{Bmatrix} \quad \vec{f}_{ic} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2m\omega \dot{x} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Il s'ensuit que $\ddot{x} = (\omega^2 - \frac{\lambda}{m}) x$; $R_y - 2m\omega \dot{x} = 0$, $R_z - mg = 0$.

Le mouvement de M dépendra du signe de $\omega^2 - \frac{\lambda}{m}$. Si $\omega^2 - \frac{\lambda}{m} < 0$ alors $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha)$, avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{m} - \omega^2}$. Avec les conditions initiales (CI) choisies nous obtenons : $x(t) = x_0 \cos \omega_0 t$.

Si $\omega^2 - \frac{\lambda}{m} > 0$ alors : $x(t) = A e^{\omega_0 t} + B e^{-\omega_0 t}$.

Les CI conduisent à : $A + B = 0$ et $A - B = 0$, d'où : $x(t) = x_0 \cosh \omega_0 t$.

La réaction de l'axe possède deux composantes qui sont $R_y = 2m\omega\dot{x}$ et $R_z = mg$.

2) Le point M est en équilibre relatif si $\ddot{x} = 0$ ce qui est vérifié pour $\omega^2 = \frac{\lambda}{m}$.

3) Dans ce cas la réaction de l'axe est : $R_z = mg$.

2 1) Le Référentiel terrestre considéré comme galiléen est défini par le repère (O, x', y, z) .

Le référentiel R lié à la tige avec le repère $(0, x, y_1, z_1)$ est non galiléen. Il est en rotation avec le vecteur vitesse angulaire : $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z = \omega(\cos \alpha \vec{u}_x + \sin \alpha \vec{u}_{z_1})$

On pose : $r = OM = x$

Le point M est soumis aux forces suivantes :

- son poids \vec{P} (verticale vers le bas) soit : $\vec{P} = mg [-\cos \alpha \vec{u}_x - \sin \alpha \vec{u}_{z_1}]$
- la réaction du support \vec{R} (pas de frottement, la réaction est normale à la tige et donc pas de composante suivant l'axe Ox et à priori 2 composantes R_{y_1} et R_{z_1}).
- la force d'inertie d'entraînement \vec{f}_{ie} : Le point M s'il était fixe par rapport à la tige décrirait un cercle de rayon $R = x \sin \alpha$ à la vitesse angulaire constante ω . L'accélération d'entraînement est dirigée vers l'axe. Elle est horizontale et a pour valeur $\omega^2 x \sin \alpha$. On en déduit la force d'inertie d'entraînement $\|\vec{f}_{ie}\| = m\omega^2 x \sin \alpha$ (horizontal vers l'axe) soit :

$$\vec{f}_{ie} = m\omega^2 x \sin \alpha (\sin \alpha \vec{u}_x - \cos \alpha \vec{u}_{z_1})$$

la force d'inertie de Coriolis $\vec{f}_{ic} = -2m \vec{\omega} \wedge \vec{v}$ avec $\vec{v} = \dot{x} \vec{u}_x$ la vitesse de M par rapport à la tige. On a donc : $\vec{f}_{ic} = -2m\omega[\cos \alpha \vec{u}_x + \sin \alpha \vec{u}_{z_1}] \wedge \dot{x} \vec{u}_x = -2m\omega\dot{x} \sin \alpha \vec{u}_{y_1}$

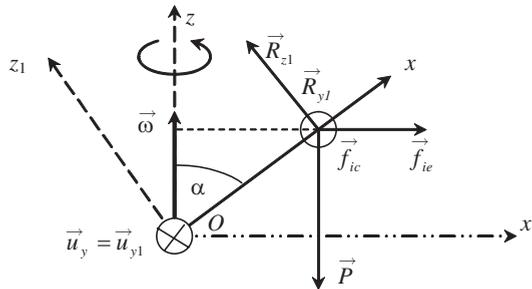


Figure 8.32

La relation fondamentale de la dynamique conduit à :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic} = m \vec{a} = m \ddot{x} \vec{u}_x$$

En projection sur les axes :

$$\ddot{x} = x\omega^2 \sin^2 \alpha - g \cos \alpha$$

$$0 = R_{y_1} - 2m\omega\dot{x} \sin \alpha \Rightarrow R_{y_1} = 2m\omega\dot{x} \sin \alpha$$

$$0 = R_{z_1} - mg \sin \alpha - m\omega^2 x \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow R_{z_1} = m \sin \alpha [g + \omega^2 x \cos \alpha]$$

Posons : $\omega_0 = \omega \sin \alpha$ alors :

$$\ddot{x} = x\omega_0^2 \sin^2 \alpha - g \cos \alpha \Rightarrow \ddot{x} - \omega_0^2 x = g \cos \alpha$$

Solution de l'équation : solution particulière plus la solution général de l'équation sans second membre soit :

$$x = Ae^{\omega_0 t} + Be^{-\omega_0 t} + \frac{g \cos \alpha}{\omega_0^2}$$

Les conditions initiales conduisent à :

$$v(0) = 0 \Rightarrow \omega_0 A - \omega_0 B = 0 \Rightarrow A = B$$

$$x(0) = r_0 \Rightarrow A + B + \frac{g \cos \alpha}{\omega_0^2} = r_0 \Rightarrow 2A = r_0 - \frac{g \cos \alpha}{\omega_0^2}$$

d'où :

$$x(t) = \left(r_0 - \frac{g \cos \alpha}{\omega_0^2} \right) \left(\frac{e^{\omega_0 t} + e^{-\omega_0 t}}{2} \right) + \frac{g \cos \alpha}{\omega_0^2} = \left(r_0 - \frac{g \cos \alpha}{\omega_0^2} \right) \cosh \omega_0 t + \frac{g \cos \alpha}{\omega_0^2}$$

$$\text{On a : } R_{y1} = 2m\omega \dot{x} \sin \alpha = 2m\omega(\sin \alpha)\omega_0 \left(r_0 - \frac{g \cos \alpha}{\omega_0^2} \right) \sinh \omega_0 t$$

$$(\text{avec } \sinh \omega_0 t = \frac{e^{\omega_0 t} - e^{-\omega_0 t}}{2})$$

$$R_{z1} = m \sin \alpha [g + \omega^2 x \cos \alpha]$$

$$= mg \sin \alpha + m\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \left[\left(r_0 - \frac{g \cos \alpha}{\omega_0^2} \right) \cosh \omega_0 t + \frac{g \cos \alpha}{\omega_0^2} \right]$$

(avec $\omega_0 = \omega \sin \alpha$)

2) Il y a équilibre relatif par rapport à Ox si x ne dépend pas de t c'est-à-dire :

$$\left(r_0 - \frac{g \cos \alpha}{\omega_0^2} \right) = 0 \Rightarrow r_0 \omega_0^2 = g \cos \alpha \Rightarrow r_0 = \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}$$

3

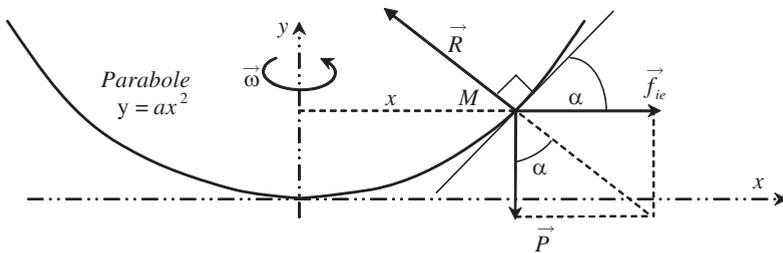


Figure 8.33

Système : le point M de masse m posé en un point de coordonnées $(x, y = ax^2)$

Référentiel gouttière avec le repère (O, x, y) en rotation par rapport au référentiel terrestre galiléen. vitesse angulaire de rotation : $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$

Le référentiel n'est donc pas galiléen.

Les forces :

Le poids $\vec{P} = m \vec{g} = -mg \vec{u}_y$

La réaction du support \vec{R} . On suppose qu'il n'y a pas de frottement. Cette réaction est donc perpendiculaire à la tangente à la parabole au point considéré. La tangente fait avec l'horizontale un angle α tel que $\tan \alpha = \frac{dy}{dx} = 2ax$.

Force d'inertie : le point M étant en équilibre dans le référentiel mobile il n'y a pas de force d'inertie de coriolis. Le point M a un mouvement circulaire uniforme par rapport au référentiel terrestre. L'accélération d'entraînement est donc : $\vec{a}_e = -\omega^2 x \vec{u}_x$. La force d'inertie est donc :

$$\vec{f}_{ie} = -m \vec{a}_e = m \omega^2 x \vec{u}_x$$

Condition d'équilibre : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{f}_{ie} = \vec{0}$

Ceci se traduit par (voir figure) :

$$\tan \alpha = \frac{f_{ie}}{P} = \frac{m \omega^2 x}{mg} = \frac{\omega^2 x}{g} = 2ax \Rightarrow \omega = \sqrt{2ag}$$

4 Le pendule de Foucault

1) Le Référentiel terrestre est non galiléen. Il n'est pas en translation rectiligne uniforme mais en rotation uniforme par rapport au référentiel Géocentrique galiléen (sur une longue durée).

2) Le pendule simple est placé à la latitude $\lambda = 48^\circ$.

$$\vec{\Omega} = \Omega \vec{k} = \Omega (-\cos \lambda \vec{u}_x + \sin \lambda \vec{u}_z) = -7,3 \cdot 10^{-5} \cos 48^\circ \vec{u}_x + 7,3 \cdot 10^{-5} \sin 48^\circ \vec{u}_z$$

$$\vec{\Omega} = -4,88 \cdot 10^{-5} \vec{u}_x + 5,42 \cdot 10^{-5} \vec{u}_z$$

Pour un pendule simple : $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{10}{0,6}} = 0,408 \text{ rad.s}^{-1} \gg \Omega$

$$3) \vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{SM}}{SM} = \frac{x}{l} \vec{u}_x + \frac{y}{l} \vec{u}_y + \frac{z-l}{l} \vec{u}_z.$$

$$\text{Soit : } \vec{T} = -T \vec{u}_r = -\left(\frac{x}{l} T\right) \vec{u}_x - \left(\frac{y}{l} T\right) \vec{u}_y - \left(\frac{z-l}{l} T\right) \vec{u}_z$$

4) On travaille dans le référentiel non galiléen. Comme force il y a :

Le poids $\vec{P} = m \vec{g} = -mg \vec{u}_z$, la Tension \vec{T}

Il faut ajouter la force d'inertie de Coriolis : $\vec{f}_{ic} = -2m \vec{\Omega} \wedge \vec{v} = -2m \Omega \begin{vmatrix} -\cos \lambda & & \dot{x} \\ 0 & & \dot{y} \\ \sin \lambda & & \dot{z} \end{vmatrix}$

$$\vec{f}_{ic} = 2m \Omega [\dot{y} \sin \lambda \vec{u}_x - (\dot{z} \cos \lambda + \dot{x} \sin \lambda) \vec{u}_y + \dot{y} \cos \lambda \vec{u}_z]$$

On peut négliger la force d'inertie d'entraînement devant la force de gravitation (ou si on préfère, le poids tient compte de la force d'inertie d'entraînement et on considère que la verticale passe par le centre de la Terre). On a alors : $\vec{P} + \vec{T} + \vec{f}_{ic} = m \vec{a}$

$$5) \text{ Sur } \vec{u}_x : -\frac{x}{l} T + 2m \Omega \dot{y} \sin \lambda = m \ddot{x}$$

$$\text{Sur } \vec{u}_y : -\frac{y}{l} T - 2m \Omega (\dot{z} \cos \lambda + \dot{x} \sin \lambda) = m \ddot{y}$$

$$\text{Sur } \vec{u}_z : -mg - \frac{z-l}{l} T + 2m \Omega \dot{y} \cos \lambda = m \ddot{z}$$

6) Avec $P = mg \approx T$ on a :

$$m \ddot{x} = -\frac{x}{l} mg + 2m \Omega \dot{y} \sin \lambda \Rightarrow \ddot{x} + \frac{g}{l} x = 2 \Omega \dot{y} \sin \lambda \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 2 \Omega \dot{y} \sin \lambda$$

$$m \ddot{y} = -\frac{y}{l} mg - 2m \Omega (\dot{z} \cos \lambda + \dot{x} \sin \lambda) \Rightarrow \ddot{y} + \omega_0^2 y = -2 \Omega (\dot{z} \cos \lambda + \dot{x} \sin \lambda)$$

$$m \ddot{z} = -mg - \frac{z-l}{l} mg + 2m \Omega \dot{y} \cos \lambda \Rightarrow \ddot{z} + \omega_0^2 z = 2 \Omega \dot{y} \cos \lambda$$

7) On suppose $\dot{z} \ll \dot{x}$ (z varie très peu par rapport à x) soit $\dot{z} \cos \lambda \ll \dot{x} \sin \lambda$

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = 2\Omega \dot{y} \sin \lambda \dot{y} + \omega_o^2 y = -2\Omega \dot{x} \sin \lambda \dot{z} + \omega_o^2 z = 2\Omega \dot{y} \cos \lambda$$

On en déduit en multipliant la 2^{ème} équation par i et en ajoutant la 1^{ère} équation :

$$\dot{U} + \omega_o^2 U = 2\Omega \sin \lambda (\dot{y} - i\dot{x}) = 2\Omega \sin \lambda i(-i\dot{y} - \dot{x}) = -2\Omega i \sin \lambda \dot{U}$$

$$\ddot{U} + 2\Omega i \sin \lambda \dot{U} + \omega_o^2 U = 0 \quad \text{avec} \quad U = x + iy$$

8) Solution de la forme $U = Ae^{rt} \Rightarrow r^2 + 2\Omega i \sin \lambda r + \omega_o^2 r = 0$

C'est l'équation caractéristique donc les solution sont :

$$r_{\pm} = -\Omega i \sin \lambda \pm i\sqrt{\Omega^2 \sin^2 \lambda + \omega_o^2} \quad \text{et avec} \quad \Omega \sin \lambda \ll \omega_o \quad \text{on obtient} :$$

$$r_{\pm} = -\Omega i \sin \lambda \pm i\omega_o \quad \text{soit} : U = e^{-i\Omega \sin \lambda t} (Ae^{i\omega_o t} + Be^{-i\omega_o t})$$

Pour $t = 0$ on a $y = 0$ et $x = x_o = l \sin 10^\circ$ soit : $x_o = A + B$ et on lâche sans vitesse soit encore :

$$\dot{U} = -i\Omega \sin \lambda e^{-i\Omega \sin \lambda t} (Ae^{i\omega_o t} + Be^{-i\omega_o t}) + e^{-i\Omega \sin \lambda t} (Ai\omega_o e^{i\omega_o t} - Bi\omega_o e^{-i\omega_o t})$$

On a donc : $\dot{U}(0) = -i\Omega \sin \lambda (A + B) + (Ai\omega_o - Bi\omega_o) = 0 \Rightarrow \Omega x_o \sin \lambda = \omega_o (A - B)$

$$(A - B) = x_o \frac{\Omega \sin \lambda}{\omega_o} \quad \text{et} \quad x_o = A + B \Rightarrow A = \frac{x_o}{2} \left(1 + \frac{\Omega \sin \lambda}{\omega_o} \right) \quad \text{et} \quad B = \frac{x_o}{2} \left(1 - \frac{\Omega \sin \lambda}{\omega_o} \right)$$

Avec $\Omega \sin \lambda \ll \omega_o$ cela donne : $A = \frac{x_o}{2} = B$ et donc : $U = e^{-i\Omega \sin \lambda t} \left(x_o \frac{e^{i\omega_o t} + e^{-i\omega_o t}}{2} \right)$

Donc : $U = A(\cos \omega_o t) e^{i\Omega t}$ avec $A = x_o = l \sin 10^\circ = l \sin \theta_i$ et $k = -\Omega \sin \lambda$.

9) $x(t) = \text{Re}(U) = l \sin \theta_i \cos(\omega_o t) \cos(\Omega \sin \lambda t)$

$$y(t) = \text{Im}(U) = -l \sin \theta_i \cos(\omega_o t) \sin(\Omega \sin \lambda t)$$

10) La période propre du pendule est

$$T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 1,54 \text{ s} \ll T = \frac{2\pi}{\Omega \sin \lambda} = \frac{24}{\sin \lambda} \text{ heures}$$

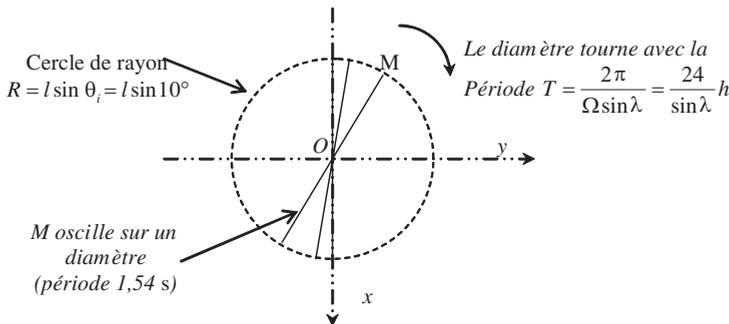


Figure 8.34

Le point M décrit donc un segment de longueur $2l \sin \theta_i$ avec une période de $T_o = 1,54 \text{ s}$, ce segment (ou plan du pendule) tournant lentement dans le sens des aiguilles d'une montre avec une période T .

(On remarque que : $x^2 + y^2 = R^2 = (l \sin \theta_i \cos \omega_0 t)^2$)

Aux pôles, on a $\sin \lambda = 1$ et $T = \frac{2\pi}{\Omega} = 24$ h

À l'équateur : $\sin \lambda = 0$ et le pendule oscille dans le plan de départ (son plan ne tourne plus)

À Paris : $\sin \lambda = \sin 48^\circ = 0,743$ et on obtient $T = \frac{2\pi}{\Omega \sin \lambda} = \frac{24}{0,743} = 32$ h 18 minutes

CHAPITRE 9

SYSTÈMES À DEUX CORPS

Pré-requis

- Avoir bien approfondi les chapitres 4 et 5 de ce livre.

Objectif

- ▶ Aborder le mouvement de deux corps en interaction en dégagant la notion fondamentale de référentiel barycentrique.
- ▶ Être capable d'exprimer les lois de la physique dans le référentiel barycentrique, et de réduire le problème à deux corps à un problème à un seul corps.
- ▶ Comprendre qu'en utilisant les lois de conservation de l'énergie et du moment cinétique il est possible d'obtenir des informations très précises sur la nature du mouvement des deux corps.
- ▶ Être en mesure de discuter la représentation énergétique du problème à deux corps.

Nous avons vu dans le chapitre précédent une introduction à la mécanique céleste. Nous nous proposons maintenant d'étudier, plus précisément, le cas très important d'un système de deux masses $\{m_1, m_2\}$ en interaction mutuelle ne subissant aucune action de l'extérieur. Le système $\{m_1, m_2\}$ est donc considéré comme mécaniquement isolé et sera caractérisé par son centre de masse G . Les forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 qu'exercent respectivement m_2 sur m_1 et m_1 sur m_2 sont des forces intérieures. Dans le cas de deux particules portant une charge électrique ces forces correspondent aux forces électrostatiques (loi de Coulomb). Au cours d'un choc entre deux particules elles correspondent aux actions de contact. Dans ce qui suit nous nous intéresserons au cas où les deux masses sont en interaction gravitationnelle.

1. ÉLÉMENTS CINÉTIQUES

1.1. Centre de masse

Considérons un système de deux masses ponctuelles localisées aux points M_1 et M_2 . Nous rapportons l'étude à un référentiel galiléen $R(O, x, y, z)$.

On appelle **centre de masse** ou **centre d'inertie** ou encore **centre de gravité** ou **barycentre** d'un système de deux masses le point G dont la position est définie par :

$$m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2} = \vec{0}.$$

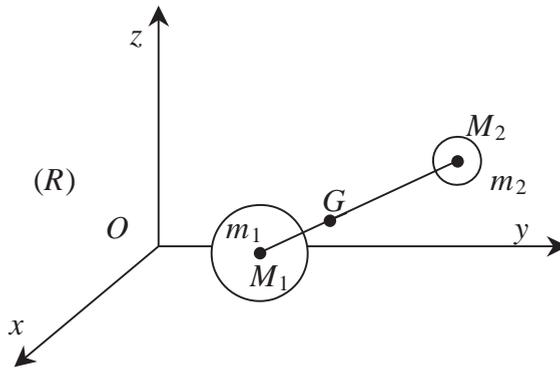


Figure 9.1 • Centre de masse d'un système constitué de deux masses.

L'introduction d'une origine O arbitraire dans l'équation précédente et l'utilisation de la relation de Chasles permet d'exprimer la position du centre de masse par :

$$\vec{OG} = \frac{m_1 \vec{OM}_1 + m_2 \vec{OM}_2}{m_1 + m_2}$$

1.2. Vitesse et quantité de mouvement

La dérivée de l'équation vectorielle précédente conduit à la vitesse du centre de masse. En notant, \vec{v}_G , \vec{v}_1 et \vec{v}_2 respectivement les vecteurs vitesse, par rapport au référentiel galiléen R , du centre d'inertie G et des points M_1 et M_2 , on obtient :

$$\vec{v}_G = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow (m_1 + m_2) \vec{v}_G = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

$$p = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad (9.1)$$

Théorème

La quantité de mouvement du centre de masse d'un système est égale à la somme des quantités de mouvement de chaque élément du système.

Le système $\{m_1, m_2\}$ est mécaniquement isolé, ce qui conduit par dérivation à :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à chacune des masses donne :

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_1 \text{ et } \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_2 \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$$

Ceci met en évidence le principe des actions réciproques (3ème loi de Newton) puisque la force que subit M_1 de la part de M_2 est opposée à la force subie par M_2 de la part de M_1 .

1.3. Moment cinétique et énergie cinétique

Dans le référentiel R , le moment cinétique par rapport au point O du système de deux masses en interaction est égal à la somme vectorielle des moments cinétiques de chaque masse. Il en résulte que :

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \overrightarrow{OM}_1 \wedge m_1 \vec{v}_1 + \overrightarrow{OM}_2 \wedge m_2 \vec{v}_2$$

De la même manière, l'énergie cinétique dans R est la somme des énergies cinétiques de chaque masse :

$$E_c = E_{c1} + E_{c2} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

2. RÉFÉRENTIEL DU CENTRE DE MASSE

2.1. Définition

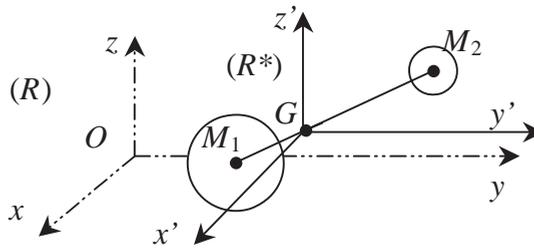


Figure 9.2 • Référentiel barycentrique ou référentiel du centre de masse.

On appelle **référentiel du centre de masse** ou **référentiel barycentrique** un référentiel noté R^* centré sur le centre de masse G du système et qui se déplace en *translation* par rapport au référentiel R galiléen.

Dans le cas de deux masses en interaction nous avons montré que la vitesse du centre de masse, par rapport à R , est constante. Le référentiel du centre de masse est donc en translation rectiligne uniforme par rapport à R ; c'est par conséquent un référentiel galiléen.

L'origine étant prise sur G , il est clair que la vitesse de G dans R^* est nulle.

2.2. Définition des éléments cinétiques dans R^*

Les éléments cinétiques que nous venons de définir dans R peuvent être définis dans R^* . Nous allons voir, en effet, que le mouvement des masses m_1 et m_2 est plus facile à étudier dans R^* que dans R . Nous travaillons donc dans le référentiel galiléen R^* (G, x, y, z) et un astérisque * indiquera que les grandeurs sont calculées dans ce référentiel.

a) Quantité de mouvement

Dans R^* , la quantité de mouvement totale est nulle puisque la vitesse du centre de masse G est nulle. On a donc :

$$m_1 \vec{v}_1^* + m_2 \vec{v}_2^* = \vec{0}$$

b) Énergie cinétique

L'énergie cinétique dans R^* est égale à la somme des énergies cinétiques des masses m_1 et m_2 dans R^* . On a donc :

$$E_c^* = \frac{1}{2}m_1v_1^{*2} + \frac{1}{2}m_2v_2^{*2}$$

c) Moment cinétique

Dans R^* , le moment cinétique par rapport à G du système est par définition :

$$\vec{L}^* = \overrightarrow{GM_1} \wedge m_1 \vec{v}_1^* + \overrightarrow{GM_2} \wedge m_2 \vec{v}_2^*$$

Posons $\vec{r} = \overrightarrow{M_1M_2}$ et en utilisant la relation $m_1 \vec{v}_1^* = -m_2 \vec{v}_2^*$

$$\vec{L}^* = (-\overrightarrow{GM_1} + \overrightarrow{GM_2}) \wedge m_2 \vec{v}_2^* = \overrightarrow{M_1M_2} \wedge m_2 \vec{v}_2^* = \vec{r} \wedge m_2 \vec{v}_2^* = -\vec{r} \wedge m_1 \vec{v}_1^*$$

Remarquons que nous venons d'exprimer le moment cinétique du système en fonction de la distance r qui sépare les deux masses M_1 et M_2 .

2.3. Masse réduite

a) Définition

Pour définir la notion de masse réduite, nous allons déterminer l'expression de la vitesse de la masse m_2 dans le référentiel barycentrique R^* . Nous utilisons la loi de composition de vitesse qui nous permet d'écrire que :

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_2^* + \vec{v}_{G/R}$$

avec :

$$\vec{v}_{G/R} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Nous obtenons donc :

$$\vec{v}_2^* = \vec{v}_2 - \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

soit

$$\vec{v}_2^* = \frac{m_1 (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{m_1 + m_2}$$

Le terme $\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ apparaissant dans cette dernière expression n'est rien d'autre que la vitesse de M_2 par rapport à M_1

$$\vec{v}_2^* = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}$$

On remarquera que la vitesse de M_2 par rapport à M_1 est donnée par :

$$\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \frac{d\overrightarrow{OM_2}}{dt} - \frac{d\overrightarrow{OM_1}}{dt} = \frac{d(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1})}{dt}$$

soit

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{M_1M_2}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

La quantité de mouvement de la masse M_2 dans le référentiel barycentrique s'exprime alors sous la forme suivante :

$$\vec{p}_2^* = m_2 \vec{v}_2^* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{v} = -\vec{p}_1^*$$

Le coefficient qui apparaît devant le vecteur vitesse \vec{v} et qui est homogène à une masse est appelé *masse réduite* du système.

Définition

On appelle **masse réduite** d'un système de deux masses m_1 et m_2 , la masse μ égale à :

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

b) Expression des éléments cinétiques en fonction de la masse réduite

Les éléments cinétiques du système $\{m_1, m_2\}$ peuvent s'exprimer de façon concise en fonction de la masse réduite du système. Nous avons en effet :

$$\begin{aligned} \vec{p}_2^* &= m_2 \vec{v}_2^* = \mu \vec{v} \\ \vec{p}_1^* &= m_1 \vec{v}_1^* = -m_2 \vec{v}_2^* = -\mu \vec{v} \\ \vec{L}^* &= \vec{r} \wedge m_2 \vec{v}_2^* = \mu \vec{r} \wedge \vec{v} \end{aligned} \quad (9.2)$$

Dans le référentiel du centre de masse, l'énergie cinétique E_c est la somme des énergies cinétiques de chacune des deux masses soit :

$$E_c^* = \frac{1}{2} m_1 v_1^{*2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{*2}$$

Si l'on remplace \vec{v}_1^* et \vec{v}_2^* par leur expression en fonction de \vec{v} , on a alors

$$E_c^* = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{-\mu \vec{v}}{m_1} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{\mu \vec{v}}{m_2} \right)^2$$

soit

$$E_c^* = \frac{1}{2} \mu v^2 \quad (9.3)$$

Le tableau 9.1 récapitule les expressions, en fonction de la masse réduite $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ et de la vitesse relative \vec{v} de M_2 par rapport à M_1 , des éléments cinétiques dans le référentiel du centre de masse.

| | |
|--------------------------------|---|
| Quantité de mouvement de M_2 | $\vec{p}_2^* = \mu \vec{v}$ |
| Quantité de mouvement de M_1 | $\vec{p}_1^* = -\mu \vec{v}$ |
| Quantité de mouvement totale | $\vec{p}^* = \vec{0}$ |
| Moment cinétique | $\vec{L}^* = \mu \vec{r} \wedge \vec{v}$ |
| Energie cinétique | $E_c^* = \frac{1}{2} m_1 v_1^{*2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{*2} = \frac{1}{2} \mu v^2$ |

Tableau 9.1 • Eléments cinétiques d'un système à deux corps exprimés dans le référentiel barycentrique.

3. RELATION FONDAMENTALE DE LA DYNAMIQUE

3.1. Principe fondamental de la dynamique dans R^*

Le référentiel R^* est un référentiel galiléen. Il est donc possible d'y appliquer la relation fondamentale de la dynamique sans se préoccuper d'éventuelles forces d'inertie. Cette relation peut s'appliquer tout aussi bien à la masse m_1 qu'à la masse m_2 . Nous avons donc :

$$m_1 \vec{a}_{M_1/R^*} = m_1 \frac{d^2 \overrightarrow{GM_1}}{dt^2} \Bigg)_{R^*} = \sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_{M_2 \rightarrow M_1} = \vec{F}_1$$

$$m_2 \vec{a}_{M_2/R^*} = m_2 \frac{d^2 \overrightarrow{GM_2}}{dt^2} \Bigg)_{R^*} = \sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_{M_1 \rightarrow M_2} = \vec{F}_2$$

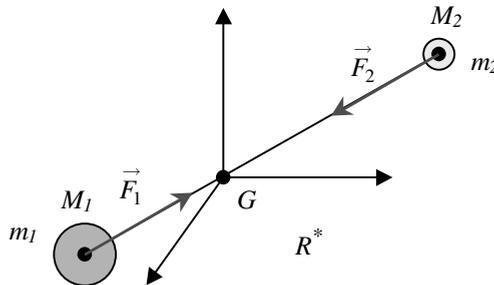


Figure 9.3 • Interaction entre deux masses m_1 et m_2 .

Les deux masses étant en interaction, les actions mutuelles qu'elles subissent sont opposées, ce qui conduit à :

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} \Bigg)_{R^*} = \vec{F}_1; \quad m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} \Bigg)_{R^*} = \vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

avec $\vec{r}_1 = \overrightarrow{GM_1}$ et $\vec{r}_2 = \overrightarrow{GM_2}$.

Nous obtenons ainsi deux équations différentielles du mouvement de ces deux masses. Nous allons voir, dans le paragraphe suivant, que ces deux équations peuvent se combiner entre elles pour conduire à une équation unique faisant intervenir la masse réduite du système.

3.2. Équation maîtresse

Les deux équations que nous venons d'écrire peuvent être soit additionnées soit soustraites. Par addition, nous obtenons la relation suivante :

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d^2(m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)}{dt^2} = \vec{0}$$

Cette équation est valide en particulier dans le référentiel barycentrique et plus généralement dans tout référentiel galiléen. En intégrant une première fois cette relation, nous

aboutissons à :

$$m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \vec{cste} \quad (9.4)$$

ce qui montre en utilisant (9.1) que le centre de masse a un mouvement rectiligne uniforme par rapport au référentiel d'étude. Si l'on fait le choix explicite (comme nous le faisons ici) de se placer dans le référentiel barycentrique, la constante est nulle puisque $\vec{v}_{G/R^*} = \vec{0}$. On retrouve bien alors le fait que, dans R^* , la quantité de mouvement de la masse m_1 est opposée à celle de la masse m_2 . Une nouvelle intégration conduit ensuite à la relation de définition du centre de masse, à savoir :

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = \vec{0} \Rightarrow m_1 \vec{r}_1 = -m_2 \vec{r}_2$$

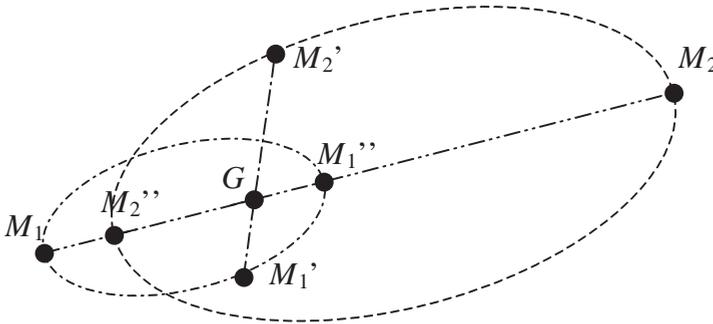


Figure 9.4 • Trajectoire des centres d'inertie M_1 et M_2 .

Remarquons que par le biais de cette relation, la connaissance de la position de la masse m_1 entraîne *ipso facto* celle de la position de m_2 . On dit que les masses décrivent des trajectoires homothétiques de rapport m_1/m_2 , ce que montre la figure 9.4.

Par multiplication de chaque équation de la relation fondamentale de la dynamique par la masse de l'autre objet, et soustraction des deux équations nous obtenons :

$$m_1 m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} - m_1 m_2 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = m_2 \vec{F}_2 - m_1 \vec{F}_1$$

Or, d'après le principe des actions réciproques, $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, ce qui conduit à :

$$m_1 m_2 \frac{d^2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{dt^2} = m_2 \vec{F}_2 + m_1 \vec{F}_2 = (m_1 + m_2) \vec{F}_2$$

Il s'ensuit que

$$m_1 m_2 \frac{d^2 (\overrightarrow{GM_2} - \overrightarrow{GM_1})}{dt^2} = m_1 m_2 \frac{d^2 \overrightarrow{M_1 M_2}}{dt^2} = (m_1 + m_2) \vec{F}_2$$

ce qui conduit après introduction de la variable $\vec{r} = \overrightarrow{M_1 M_2}$ et de la masse réduite μ du système, à :

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_2$$

Cette équation est l'**équation maîtresse** du mouvement.

3.3. Conservation du moment cinétique

L'équation fondamentale de la dynamique est généralement utilisée pour traduire le mouvement de translation du système. Une grandeur très utile pour appréhender le mouvement de rotation est le moment cinétique. Nous avons vu en (9.2) que dans R^* , l'expression du moment cinétique est donnée par :

$$L^* = \mu \vec{r} \wedge \vec{v}$$

La dérivée du moment cinétique du système s'écrit dans R^* :

$$\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \mu \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{v} + \mu \vec{r} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} = \mu \vec{v} \wedge \vec{v} + \mu \vec{r} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt}$$

On obtient ainsi :

$$\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \mu \vec{r} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt}$$

ce qui après utilisation de l'équation maîtresse conduit à :

$$\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \vec{r} \wedge \mu \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F}_2$$

La force est la force d'interaction en provenance de M_1 qui agit sur M_2 . Sa droite d'action a donc pour support le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$, ce qui montre que la force est colinéaire à \vec{r} . On dit que *la force est centrale*..

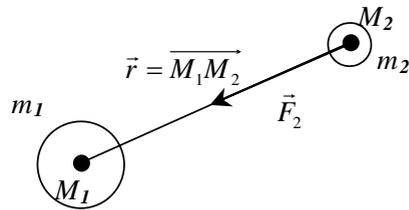


Figure 9.5 • Illustration d'une force centrale ; le vecteur force est colinéaire au rayon vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$.

a) Définition

On appelle *force centrale* une force dont la droite d'action passe par l'origine du rayon vecteur \vec{r} .

Il en résulte que la dérivée du moment cinétique du système $\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F}_2$ est nulle dans R^* , ce qui montre que le moment cinétique du système est constant au cours du temps.

b) Théorème de la force centrale

Dans un mouvement à force centrale, il y a conservation du moment cinétique.

La conservation du moment cinétique est très importante car elle conditionne la nature de la trajectoire du système. En effet, le moment cinétique est un vecteur qui est à la fois perpendiculaire à \vec{r} et à \vec{v} , c'est-à-dire perpendiculaire au plan défini par les vecteurs \vec{r} et \vec{v} . Or ce vecteur est constant, c'est-à-dire qu'il conserve au cours du mouvement une direction, un sens et un module fixes. Il en résulte que, quel que soit l'instant t considéré, les vecteurs \vec{r} et \vec{v} , qui sont coplanaires, sont perpendiculaires à une direction constante, celle du moment cinétique. Or les vecteurs \vec{r} et \vec{v} définissent la trajectoire des points M_1 et M_2 . On en conclut donc que :

Pour un mouvement à force centrale, la trajectoire est contenue dans un plan perpendiculaire au vecteur moment cinétique constant.

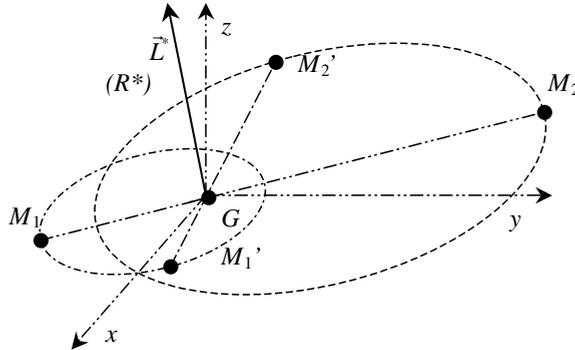


Figure 9.6 • La trajectoire de M_1 et M_2 est dans un plan perpendiculaire au moment cinétique L^* exprimé dans le référentiel barycentrique.

3.4. Réduction du système à 2 corps : masse réduite ou masse fictive

Nous avons vu que le mouvement des deux masses est un mouvement plan pour lequel il y a conservation du moment cinétique. Le mouvement est caractérisé dans le référentiel barycentrique par les éléments cinétiques suivants :

$$\begin{aligned}\vec{p}_2^* &= \mu \vec{v} = -\vec{p}_1^* \\ \vec{L}^* &= \mu \vec{r} \wedge \vec{v} \\ \mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= -\vec{F}_1 = \vec{F}_2 \\ E_C^* &= \frac{1}{2} \mu v^2\end{aligned}$$

Le mouvement des deux masses M_1 et M_2 dans le référentiel barycentrique est déterminé par la connaissance, en fonction du temps, des vecteurs positions $\vec{r}_1 = \overrightarrow{GM_1}$ et $\vec{r}_2 = \overrightarrow{GM_2}$. Pour cela il suffit de déterminer le vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{M_1M_2}$. On constate alors que le problème se résume à l'étude du mouvement d'un point matériel fictif M de masse μ repéré dans un référentiel galiléen (muni d'une origine O) par le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, se déplaçant à la vitesse $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ et subissant une force centrale $\vec{f} = \vec{F}_2$. Cela signifie que le problème à deux corps a été *réduit* à un problème à *un seul corps* de masse μ appelé masse réduite du système (figure 9.7).

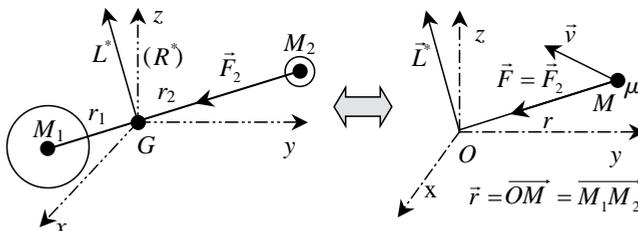


Figure 9.7 • Système à deux corps équivalent à un système à un corps de masse μ soumis à une force centrale.

Remarques :

- Le fait que le point fictif M soit soumis à la force \vec{F}_2 vient du choix des grandeurs relatives $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ et $\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ (vitesse de M_2 par rapport à M_1). Le choix contraire ($\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$) nécessiterait l'application de la force \vec{F}_1 sur la particule fictive M . Il faut donc bien préciser les notations choisies.
- Pour connaître la trajectoire des deux masses réelles m_1 et m_2 , il suffit d'appliquer les homothéties suivantes : $\vec{r}_1 = -\mu \vec{r} / m_1$ et $\vec{r}_2 = \mu \vec{r} / m_2$.
- Lorsque le système est constitué de deux masses de même ordre de grandeur, il est impératif d'utiliser le formalisme précédent pour étudier le mouvement ;
- Lorsque l'une des deux masses est beaucoup plus grande que l'autre ($m_1 \gg m_2$), le barycentre du système se trouve au centre de la masse la plus grande ce qui conduit à $r_1 = 0$ et $r_2 = r$. La plus grosse masse est alors immobile et le système se réduit à la masse la plus faible ($\mu = m_2$) ;

Exemples :

- Étude d'un satellite de la Terre : $m_1 = M_T \gg m_2 = m_{\text{satellite}}$. Le centre d'inertie du système {Terre, satellite} est au centre de la Terre. Dans le référentiel barycentrique (qui correspond donc au référentiel géocentrique) la Terre est immobile et le satellite est en mouvement par rapport à la Terre. La masse réduite est la masse du satellite et la force est la force de gravitation qu'exerce la Terre sur le satellite.
- Étoiles doubles : cas où 2 étoiles sont suffisamment proches pour interagir. Leur masse étant équivalente, il faut utiliser le formalisme de la masse réduite. On constate alors que les deux astres tourne autour de leur centre d'inertie.

4. PROPRIÉTÉS DU MOUVEMENT

4.1. Loi des aires

La conservation du moment cinétique des deux masses permet de définir une propriété nouvelle du mouvement. Nous étudions maintenant le mouvement du point matériel fictif M affecté de la masse μ dans le référentiel galiléen $R(O, x, y, z, t)$ avec comme base d'étude la base mobile $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, comme l'indique la figure 9.8.

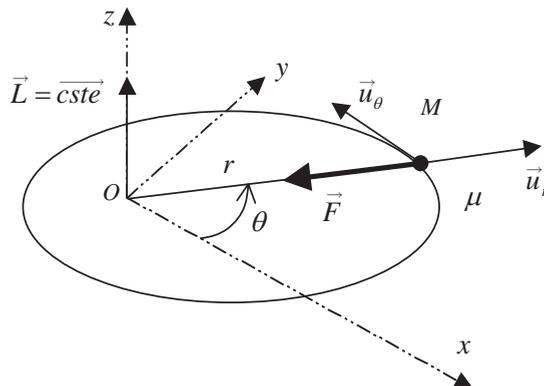


Figure 9.8 • Mouvement de la masse réduite dans le référentiel galiléen (O, x, y, z, t) .

En appliquant le théorème du vecteur unitaire tournant, il est facile de voir que la vitesse du point M est donnée par :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{M_1M_2}}{dt} = \frac{dr\vec{u}_r}{dt} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad (9.5)$$

Le moment cinétique du système est donc égal à :

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r} \wedge \mu \vec{v}_{M_2/M_1} = r\vec{u}_r \wedge \mu(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) \\ \vec{L} &= \mu r^2 \dot{\theta} \vec{k} \end{aligned}$$

Nous avons montré que ce moment est constant, ce qui entraîne que la quantité :

$$r^2 \dot{\theta} = \frac{L}{\mu} = C$$

est constante. La constante C est appelée **constante des aires**. En effet, elle a une signification géométrique liée à l'aire balayée par le point M au cours de son mouvement. La figure 9.9 met en évidence que cette quantité représente deux fois l'aire balayée par unité de temps par le point M entre les instants t et $t + dt$. On a ainsi :

$$C = r^2 \frac{d\theta}{dt} = 2 \frac{dA}{dt}$$

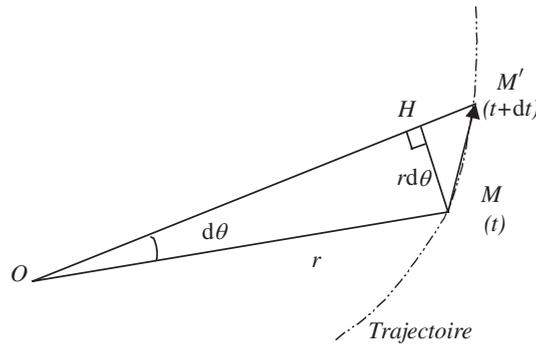


Figure 9.9 • L'aire élémentaire dA balayée par le rayon OM pendant la durée dt est assimilable à l'aire du triangle OMM' qui est égale à $\frac{1}{2}(OM')(MH) = \frac{1}{2}(r + dr)r d\theta$. Au premier ordre, par rapport aux infiniment petits dr et $d\theta$ (grossis volontairement sur le schéma), on obtient $\frac{1}{2}r^2 d\theta$. Cela revient à négliger la surface du triangle HMM' devant celle du triangle OMH .

L'aire *élémentaire* dA/dt balayée par le point M est constante au cours du temps ; l'aire totale balayée par le point M varie donc linéairement dans le temps.

4.2. Énergie mécanique

Nous avons défini au chapitre 7 l'énergie potentielle de deux masses m_2 et m_1 en interaction gravitationnelle. Lorsque le zéro de l'énergie potentielle est pris à l'infini, l'expression de l'énergie potentielle est donnée par :

$$E_P = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r}$$

Nous avons vu en (9.3) que l'énergie cinétique totale du système est $E_C = \frac{1}{2}\mu v^2$. L'énergie mécanique E du système des deux masses en interaction est donc :

$$E = E_C + E_P = \frac{1}{2}\mu v^2 - \mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r}$$

La vitesse du point M_2 est égale à $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ (9.5) ce qui conduit à : $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$.

Il en résulte que l'énergie mécanique du système s'écrit :

$$E = E_C + E_P = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r}$$

Le mouvement est régi par la loi des aires. En utilisant la relation $C = r^2\dot{\theta}$ on obtient l'expression suivante :

$$E = E_C + E_P = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu \frac{C^2}{r^2} - \mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r}$$

Le système est mécaniquement isolé, ce qui impose que l'énergie mécanique du système soit constante. Nous avons donc :

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu \frac{C^2}{r^2} - \mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + E_{P_{\text{eff}}}$$

Nous venons de faire apparaître dans l'expression de l'énergie mécanique une énergie potentielle dite **énergie potentielle effective**, qui ne dépend que de r et qui s'écrit :

$$E_{P_{\text{eff}}} = \frac{1}{2}\mu \frac{C^2}{r^2} - \mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r}$$

Cette énergie, dont une partie provient de l'énergie cinétique, possède des propriétés remarquables quant à l'interprétation du mouvement du système.

4.3. Étude de l'énergie potentielle effective

L'énergie potentielle effective est constituée de la somme de deux termes de signes opposés. Le premier terme, positif, domine aux petits r alors que le second négatif, domine lorsque r devient grand. La somme de ces deux termes antagonistes est représentée sur la figure 9.10. On peut voir que l'énergie potentielle effective passe par un minimum qui correspond à l'annulation de la dérivée de l'énergie potentielle effective pour $r = r_0 = \frac{\mu C^2}{\mathcal{G} m_1 m_2}$.

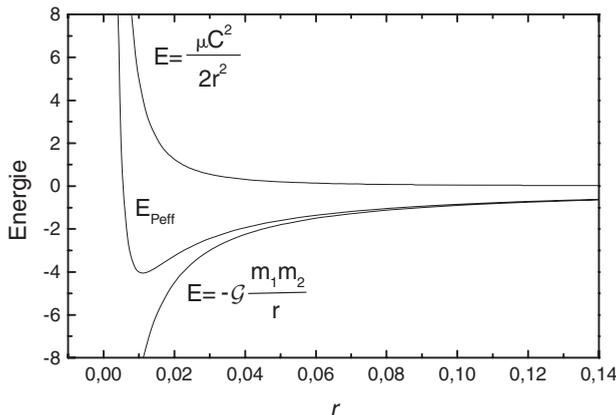


Figure 9.10 • Diagramme d'énergie pour un système de deux masses en interaction.

4.4. États liés et états de diffusion

L'énergie potentielle effective est un excellent outil pour appréhender la nature de la trajectoire des deux objets. En effet, le système est conservatif, ce qui signifie que son énergie mécanique E est constante. Or l'énergie mécanique est la somme de l'énergie potentielle effective et d'un terme relatif à l'énergie cinétique de la masse μ qui doit nécessairement être positif. On peut traduire cette condition de la façon suivante :

$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 = E - E_{P_{eff}} > 0$$

Il en résulte que l'énergie mécanique du système doit rester supérieure à son énergie potentielle effective. Cette condition définit les états possibles du système. La figure 9.11 représente l'allure de l'énergie potentielle effective et deux valeurs de l'énergie mécanique. Elle fait apparaître que trois cas sont à distinguer, selon la valeur prise par E (valeur qui ne dépend que des conditions initiales du mouvement) :

- $E > 0$: le système peut se déplacer entre une valeur limite r_{min} et l'infini. On dit que l'on a affaire à un **état de diffusion** car le système n'a qu'une limite imposée ;
- $E < 0$: le système est astreint, pour maintenir la condition $E > E_{P_{eff}}$, à se déplacer entre deux positions r_{min} et r_{max} . On dit pour cette raison que l'état du système est un *état lié*. Quand $E = E_{P_{eff}}(r = r_0)$, r ne peut prendre que la valeur r_0 . La masse μ décrit donc un cercle ;
- $E = 0$: c'est un état intermédiaire entre les deux états précédents. Il correspond à la condition de passage entre l'état lié et l'état de diffusion et donc à la **libération** de l'état lié.

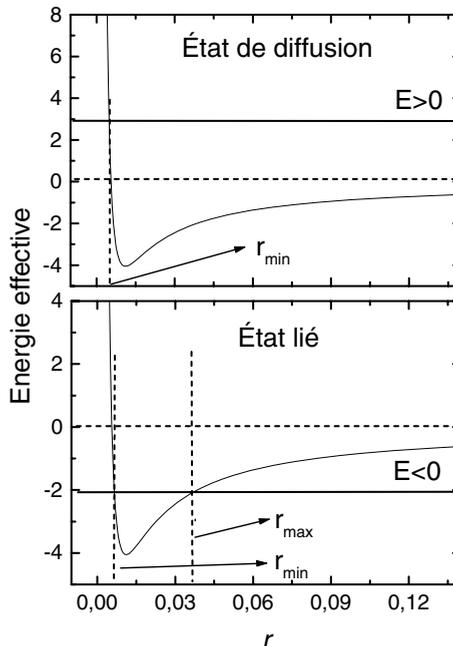


Figure 9.11 • État de diffusion et état lié.

Encart 9.1. États liés et vitesse de libération

L'étude précédente est particulièrement utile en mécanique céleste car elle montre que selon l'énergie du système, le comportement de deux masses en interaction gravitationnelle peut être très différent. En effet, considérons le cas d'une masse m en interaction avec une masse $M \gg m$. Si l'énergie du système est positive (figure 9.12), l'énergie cinétique prédomine sur l'énergie potentielle et la masse m qui approche de M ne pourra être que déviée par le champ de gravitation de cette dernière. Après déviation de la trajectoire au voisinage de M , la masse m va continuer son chemin dans l'espace interstellaire. C'est le cas de l'état de diffusion.

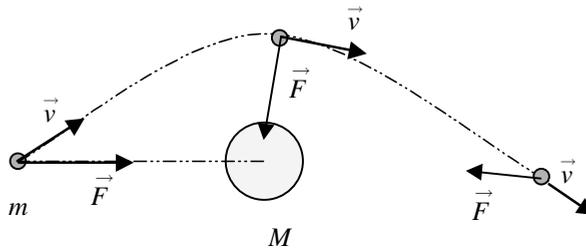


Figure 9.12 • $E > 0$. L'énergie cinétique de la masse m est suffisante pour qu'elle puisse quitter l'attraction de la masse M . Sa trajectoire est incurvée par l'action de M .

Si l'énergie est négative (figure 9.13), cela signifie que l'énergie cinétique ne prédomine pas. La masse m est piégée par son énergie potentielle. Elle est alors contrainte de se maintenir en orbite autour de M .

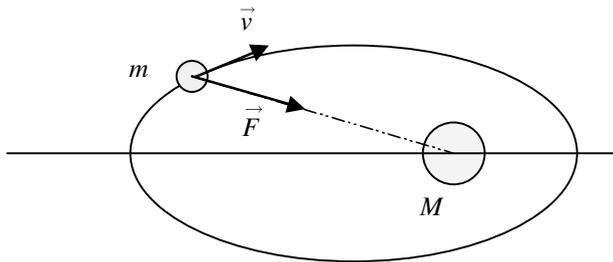


Figure 9.13 • $E < 0$. La masse m est piégée par son énergie potentielle.

Le cas $E = 0$ est aussi particulièrement intéressant. Considérons une fusée à laquelle on communique de l'énergie cinétique E_c au décollage. Selon la valeur de E_c la fusée pourra quitter à jamais l'attraction de la Terre ou bien rester indéfiniment en orbite autour de cette dernière. Le cas limite est $E = 0$, c'est-à-dire $E_c + E_p = 0$. On a alors :

$$\frac{1}{2}mv_l^2 - \frac{\mathcal{G}mM_T}{R_T} = 0$$

La vitesse limite v_l qui permet de quitter l'attraction terrestre est :

$$v_l = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_T}{R_T}}$$

Cette vitesse limite est appelée **vitesse de libération**.

Application numérique : $v_l = 11 \text{ km.s}^{-1}$.

À RETENIR

- On appelle *centre de masse* ou *centre d'inertie* ou encore *centre de gravité* ou *barycentre* d'un système de deux masses, m_1 et m_2 , le point G dont la position est définie par :

$$m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2} = \vec{0}$$

- On appelle *référentiel du centre de masse* ou *référentiel barycentrique* un référentiel noté R^* centré sur le centre de masse G du système et qui se déplace en *translation* par rapport au référentiel R galiléen.

- On appelle *masse réduite* d'un système de deux masses m_1 et m_2 la masse μ égale à :

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

- L'étude, dans le référentiel barycentrique R^* , du mouvement de deux corps en interaction gravitationnelle distants de r peut se réduire formellement au mouvement d'un corps unique M fictif de masse μ , dans un référentiel galiléen muni d'une origine O , dont la position est repérée par le vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ correspondant au vecteur $\overrightarrow{M_1 M_2}$ et subissant la force $\vec{F} = \vec{F}_2$ (action de M_1 sur M_2). Dans ces conditions, le vecteur vitesse de la particule fictive $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ correspond à la vitesse relative de M_2 par rapport à M_1 .

- Les éléments cinétiques dans le référentiel barycentrique sont :

| | |
|--------------------------------|---|
| Quantité de mouvement de M_1 | $\vec{p}_1^* = -\mu \vec{v}$ |
| Quantité de mouvement de M_2 | $\vec{p}_2^* = \mu \vec{v}$ |
| Quantité de mouvement totale | $\vec{p}^* = \vec{0}$ |
| Moment cinétique | $\vec{L}^* = \mu \vec{r} \wedge \vec{v}$ |
| Énergie cinétique | $E_c^* = \frac{1}{2} m_1 v_1^{*2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{*2} = \frac{1}{2} \mu v^2$ |

- L'équation du mouvement de la masse μ , appelée *équation maîtresse* du mouvement, est :

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\vec{F}_1 = \vec{F}_2$$

- On appelle *force centrale* une force dont la droite d'action passe par l'origine du rayon vecteur \vec{r} .

- **Théorème de la force centrale.** Dans un mouvement à force centrale, il y a conservation du moment cinétique et la trajectoire est contenue dans un plan qui est perpendiculaire au vecteur moment cinétique.

- L'aire élémentaire dA/dt balayée par le rayon vecteur \vec{r} est constante au cours du temps :

$$C = r^2 \frac{d\theta}{dt} = 2 \frac{dA}{dt}$$

- L'énergie mécanique d'un système à deux corps s'écrit

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \mu \frac{C^2}{r^2} - \mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r} = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + E_{p_{\text{eff}}}$$

- La valeur de l'énergie du système des deux corps définit l'état du système ; on distingue les états suivants :
- l'état lié si $E < 0$ (les masses sont piégées dans le puits de potentiel) ;
 - l'état de diffusion si $E > 0$ (les deux masses peuvent s'éloigner à l'infini l'une de l'autre) ;
 - l'état de libération si $E = 0$ (c'est la limite entre les deux états précédents).

EXERCICES D'APPLICATION AVEC SOLUTION DÉTAILLÉE

Mouvement d'un satellite artificiel autour de la Terre

- Données numériques :
- Masse de la Terre $M_T = 6.10^{24}$ kg
- Rayon de la Terre $R_T = 6\,400$ km
- Constante de gravitation universelle $\mathcal{G} = 6,67.10^{-11}$ N.m².kg⁻²
- Période de rotation de la Terre (dans le référentiel géocentrique) $T_o = 86\,164$ s

La Terre, de masse M_T et de centre O origine du référentiel géocentrique (R) galiléen, a une répartition de masse à symétrie sphérique. Un satellite, assimilé à un point matériel S de masse m ($m \ll M_T$), est animée dans (R) d'une vitesse \vec{v} . On note r la distance à O du point S et on pose : $\vec{OS} = r\vec{u}$. Il subit uniquement la force de gravitation exercée par la Terre.

I. Force de gravitation et moment cinétique

1) Représenter sur un schéma la force de gravitation exercée par la Terre sur le satellite et donner l'expression vectorielle de cette force $\vec{F}(r)$.

2) Moment cinétique :

- a) Donner l'expression du moment cinétique \vec{L}_o par rapport au point O de la masse m .
- b) Démontrer la relation (théorème du moment cinétique) :

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{M}_o(\vec{F}) = \vec{OS} \wedge \vec{F}.$$

- c) Comment nomme-t-on la grandeur $\vec{M}_o(\vec{F})$. Donner sa valeur dans le cas présent.
- d) En déduire que le moment cinétique \vec{L}_o est constant au cours du temps et que le mouvement du satellite s'effectue donc dans un plan contenant le centre des forces O et perpendiculaire au moment cinétique \vec{L}_o .

Dans la suite on utilisera la base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ avec \vec{u}_z vecteur unitaire suivant la direction et le sens du moment cinétique $\vec{L}_o = L_o \vec{u}_z$ et $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ base polaire dans le plan du mouvement. Le point S est repéré par ses coordonnées polaires r et θ .

II. Étude du mouvement du satellite

Le satellite est sur une **orbite circulaire** autour de la Terre à l'**altitude** h .

1) Définir le référentiel géocentrique. Est-il galiléen pour l'étude du mouvement du satellite ?

2) Montrer par les 3 différentes méthodes suivantes que le mouvement est uniforme :

- a) En exprimant le travail élémentaire δW de la force de gravitation au cours d'un déplacement élémentaire $d\vec{l}$ entre les instant t et $t + dt$ et en appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre ces instants.
- b) En utilisant la définition du moment cinétique L_o qui est une grandeur constante au cours du mouvement (voir **I.2.d**).
- c) En exprimant le vecteur accélération \vec{a} en coordonnées polaires et en appliquant le principe fondamental de la dynamique, montrer alors que l'accélération angulaire $\dot{\theta}$ est nulle. Donner l'expression de la vitesse v en coordonnées polaires et montrer que v est constant.

3) À partir du principe fondamental de la dynamique (voir 2c), déterminer la relation entre la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ et la distance $r = R_T + h$ entre le satellite et le centre de la Terre. En déduire alors la vitesse v du satellite en fonction de \mathcal{G} , M_T , R_T et h .

4) Le satellite S.P.O.T. (Satellite Spécialisé dans l'Observation de la Terre), lancé en 1986, évolue à l'altitude $h = 832$ km. Déterminer sa période de révolution T . Est-il géostationnaire ? Justifier.

5) La 3^{ème} loi de Képler indique que le carré de la période T de révolution d'un satellite est proportionnel au cube du rayon r de son orbite. Quelle est l'expression littérale de la constante de proportionnalité apparaissant dans cette loi pour un satellite en orbite terrestre ?

6) En utilisant cette 3^{ème} loi de Képler, déterminer la valeur de l'altitude d'un satellite géostationnaire

III. Vitesse d'évasion d'un satellite.

1) Montrer que la force $\vec{F}(r)$ exercée par la Terre sur le satellite en orbite circulaire est une force centrale qui dérive d'une énergie potentielle E_p telle que : $E_p = -\mathcal{G} \frac{M_T m}{r}$ (avec comme origine de l'énergie potentielle celle pour r infini : $E_p(\infty) = 0$).

2) Exprimer l'énergie mécanique totale du satellite (en fonction de v , m , \mathcal{G} , M_T , R_T et h).

3) Déterminer l'expression de la vitesse d'évasion (vitesse de libération) du satellite pour laquelle l'énergie mécanique E s'annule. Exprimer cette vitesse en fonction de \mathcal{G} , M_T , R_T et h .

Calculer cette vitesse d'évasion V_e pour un corps se situant à la surface de la Terre.

4) L'énergie cinétique moyenne d'agitation des molécules de l'atmosphère terrestre est de l'ordre de $E_{ca} = 3/2 kT$, où k est la constante de Boltzmann et T la température absolue de l'atmosphère. Calculer cette énergie cinétique E_{ca} d'agitation pour une température absolue de 300 K avec $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

Calculer l'énergie cinétique E_{ce} d'une molécule de dioxygène qui s'évaderait de la surface terrestre (vitesse V_e).

Données : Nombre d'Avogadro : $N = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ et Masse molaire atomique de l'oxygène : $M(O) = 16,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Comparer ces deux énergies cinétiques E_{ca} et E_{ce} . Que peut-on en déduire ?

IV. Paradoxe !

1) En utilisant l'expression de v obtenue dans la question II.3), exprimer l'énergie cinétique E_c d'un satellite en orbite terrestre en fonction de \mathcal{G} , M_T , m et r .

2) Exprimer l'énergie mécanique totale E du satellite en fonction de \mathcal{G} , M_T , m et r .

3) Écrire la relation simple entre E et E_c d'une part et celle entre E et E_p d'autre part. Sur un même graphe, donner l'allure des courbes E_c , E_p , E en fonction de r .

4) Un satellite d'observation évolue sur une orbite circulaire très basse ($h = 180 \text{ km}$), ce qui permet de discerner des détails d'environ un mètre sur la Terre. Par suite des collisions avec les molécules de l'air des couches supérieures de l'atmosphère, le satellite est soumis à une force de frottement \vec{f} de norme $f = \frac{\beta m v^2}{h}$ où h représente l'altitude, m la masse du satellite, v sa vitesse et β une constante valant 10^{-8} S.I.

a) Appliquer le théorème de l'énergie mécanique et indiquer comment varie l'énergie mécanique E du satellite freiné par l'atmosphère ? En utilisant la relation simple entre E et E_c , indiquer comment varie l'énergie cinétique et montrer alors que, paradoxalement, la vitesse du satellite, ainsi freiné, augmente.

b) La vitesse augmentant cela a pour effet de diminuer le rayon de l'orbite circulaire (voir relation entre v et r du II.3)

Soit $\Delta h = \Delta r$ la variation d'altitude (en valeur absolue) du satellite après une révolution. En considérant que cette variation est faible devant la distance $r = R_T + h$, montrer que la variation d'énergie mécanique peut s'écrire :

$$\Delta E = -\mathcal{G} \frac{m M_T}{2} \frac{\Delta r}{r^2}.$$

Exprimer le travail $W(\vec{f})$ de la force de frottement au cours d'une révolution à la distance r du centre de la Terre.

Appliquer le théorème de l'énergie mécanique et en déduire une valeur approchée de $\Delta h = \Delta r$ après une révolution (on pourra négliger l'altitude h devant le rayon R_T de la Terre).

Solution

I. Force de gravitation et moment cinétique

$$1) \vec{F}(r) = -\mathcal{G} \frac{M_T m}{r^2} \vec{u}.$$

2) Moment cinétique :

$$a) \vec{L}_o = \vec{OS} \wedge m \vec{v}$$

$$b) \frac{d\vec{L}_o}{dt} = \frac{d\vec{OS}}{dt} \wedge m \vec{v} + \vec{OS} \wedge \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{v} \wedge m \vec{v} + \vec{OS} \wedge m \vec{a} = \vec{0} + \vec{OS} \wedge m \vec{a}$$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique sur la masse m étudiée dans le référentiel géocentrique galiléen et sachant que l'unique force est $\vec{F}(r)$, on obtient : $m\vec{a} = \vec{F}(r)$ et donc : $\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{M}_o(\vec{F}) = \vec{OS} \wedge \vec{F}$ (théorème du moment cinétique).

c) $\vec{M}_o(\vec{F})$ est le moment de $\vec{F}(r)$ par rapport au point O . Dans le cas présent, la force a la même direction que le vecteur \vec{OS} et donc le moment est nul ($\vec{M}_o(\vec{F}) = \vec{0}$)

d) $\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_o = \vec{OS} \wedge m \vec{v} = \text{vecteur constant}$. À tout instant, \vec{OS} et \vec{v} sont des vecteurs perpendiculaires à un vecteur constant \vec{L}_o . Donc O , S et \vec{v} reste dans un même plan (contenant le centre des forces O et perpendiculaire au moment cinétique \vec{L}_o). \vec{L}_o est constant au cours du temps et le mouvement du satellite s'effectue donc dans un plan contenant le centre des forces O et perpendiculaire au moment cinétique \vec{L}_o .

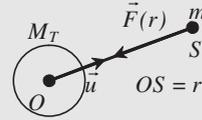


Figure 9.14

II. Étude du mouvement du satellite

Le satellite est sur une **orbite circulaire** autour de la Terre à l'**altitude** h .

1) Référentiel géocentrique : origine le centre de la Terre et trois directions restant fixes par rapport au référentiel de Copernic. Le référentiel géocentrique (R) est donc en translation circulaire uniforme par rapport au référentiel galiléen de Copernic et n'est donc pas rigoureusement galiléen. Cependant, pour l'étude du mouvement du satellite il peut être considéré comme galiléen.

2) Montrer par les 3 différentes méthodes suivantes que le mouvement est uniforme :

$$a) \delta W = \vec{F}(r) \cdot d\vec{l}. \text{ Sur l'orbite circulaire, la force de gravitation } \vec{F}(r) = -\mathcal{G} \frac{M_T m}{r^2} \vec{u}$$

est normale à la trajectoire alors que le déplacement élémentaire $d\vec{l} = dl \cdot \vec{u}_\theta$ est tangent à la trajectoire. On a donc : $\delta W = \vec{F}(r) \cdot d\vec{l} = 0$

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre les instant t et $t + dt$ on a :

$\delta W = dE_c = 0$. L'énergie cinétique ne varie pas donc la valeur de la vitesse est constante et le mouvement est uniforme.

b) $\vec{L}_o = \vec{OS} \wedge m \vec{v}$. Sur une orbite circulaire de rayon $r = OS = \text{constante}$, \vec{OS} (normale à la trajectoire) et \vec{v} (tangent à la trajectoire) sont 2 vecteurs orthogonaux. On obtient donc : $\|\vec{L}_o\| = OS \cdot mv = mrv$. Le moment cinétique L_o est

une grandeur constante au cours du mouvement donc $mr\dot{v} = \text{constante}$ soit $v = \text{constante}$ et le mouvement est uniforme.

- c) Le vecteur accélération, dans le cas d'un mouvement circulaire, a pour expression :

$$\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{u} + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta ;$$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique on obtient :

$$\vec{F}(r) = -\mathcal{G}\frac{M_T m}{r^2}\vec{u} = m\vec{a} = -mr\dot{\theta}^2\vec{u} + mr\ddot{\theta}\vec{u}_\theta.$$

La composante tangentielle de l'accélération (suivant \vec{u}_θ) est donc nulle. Cela implique que l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ est nulle et que la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega$ est constante. Le mouvement est uniforme.

On a : $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ c'est-à-dire $v = r\dot{\theta} = r\omega$. Le rayon r et la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega$ étant constant, v est constant.

- 3) d'après la réponse précédente, on a : $\vec{F}(r) = -\mathcal{G}\frac{M_T m}{r^2}\vec{u} = -mr\dot{\theta}^2\vec{u} = -\frac{mv^2}{r}\vec{u}$.

On en tire la relation : $\mathcal{G}\frac{M_T m}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v^2 = \mathcal{G}\frac{M_T}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\mathcal{G}\frac{M_T}{r}} = \sqrt{\mathcal{G}\frac{M_T}{R_T + h}}$

- 4) Le satellite S.P.O.T. évolue à l'altitude $h = 832$ km. Sa période de révolution T est donnée par le temps mis pour faire un tour c'est-à-dire : $T = \frac{2\pi r}{v}$. En élevant au carré

on obtient : $T^2 = 4\pi^2\frac{r^2}{v^2} = 4\pi^2\frac{r^3}{\mathcal{G}M_T} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{\mathcal{G}M_T}}$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(6\,400 + 832)^3 10^9}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}} = 6\,108,42 \text{ s} = 101,81 \text{ minutes} = 1 \text{ h } 41' 48''.$$

Le satellite n'est pas géostationnaire. En effet, un satellite géostationnaire reste fixe par rapport à la Terre. Il tourne donc avec la même vitesse angulaire que la Terre dans le référentiel géocentrique et à la même période $T_0 = 86164$ s.

- 5) On a : $T^2 = 4\pi^2\frac{r^2}{v^2} = 4\pi^2\frac{r^3}{\mathcal{G}M_T} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T}r^3$. L'expression littérale de la constante de proportionnalité est donc : $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T}$

- 6) Pour le satellite géostationnaire la valeur de l'altitude sera :

$$r^3 = (R_T + h)^3 = \frac{\mathcal{G}M_T T^2}{4\pi^2} \Rightarrow R_T + h = \left(\frac{\mathcal{G}M_T T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot (86\,164)^2}{4 \cdot \pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$R_T + h = 4,222 \cdot 10^7 \text{ m} = 42\,220 \text{ km}$ soit une altitude de $42\,220 - 6\,400 = 35\,820 \text{ km}$ (environ $36\,000 \text{ km}$)

III. Vitesse d'évasion d'un satellite.

$$1) \delta W = \vec{F}(r) d r \vec{u} = F(r) d r = -\mathcal{G}\frac{M_T m}{r^2} d r = -d\left(-\mathcal{G}\frac{M_T m}{r}\right) = -d(E_p)$$

$$\Rightarrow E_p = -\mathcal{G}\frac{M_T m}{r} + \text{cte.}$$

$$\text{Avec } E_p(\infty) = 0 \text{ alors } E_p = -\mathcal{G}\frac{M_T m}{r}$$

$$2) E = \frac{1}{2}mv^2 - \mathcal{G} \frac{M_T m}{R_T + h}$$

3) $E = 0$ donne : $E = \frac{1}{2}mv^2 - \mathcal{G} \frac{M_T m}{R_T + h} = 0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_T}{R_T + h}}$. Pour un corps à la surface de la Terre ($h = 0$) on a :

$$V_e = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{6,4 \cdot 10^6}} = 11183 \text{ m.s}^{-1} = 11,18 \text{ km.s}^{-1}$$

4) L'énergie cinétique d'agitation pour $T = 300 \text{ K}$ est $E_{ca} = 3/2 kT = 6,21 \cdot 10^{-21} \text{ J}$.

$$E_{ce} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \frac{M(O_2)}{N} V_e^2 = \frac{1}{2} \frac{2M(O)}{N} V_e^2 = \frac{1}{2} \frac{2 \cdot 16 \cdot 10^{-3}}{6,02 \cdot 10^{23}} (11,183 \cdot 10^3)^2 = 3,32 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

On a : $E_{ca} \ll E_{ce}$, et donc les molécules de dioxygène ne peuvent pas quitter l'attraction de la Terre par agitation thermique.

IV. Paradoxe !

$$1) E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\mathcal{G} \frac{M_T m}{r}$$

$$2) E = E_c + E_p = \frac{1}{2}\mathcal{G} \frac{M_T m}{r} - \mathcal{G} \frac{M_T m}{r} = -\frac{1}{2}\mathcal{G} \frac{M_T m}{r}$$

3) On constate que : $E = -E_c$ d'une part et que $E = \frac{1}{2} E_p$ d'autre part.

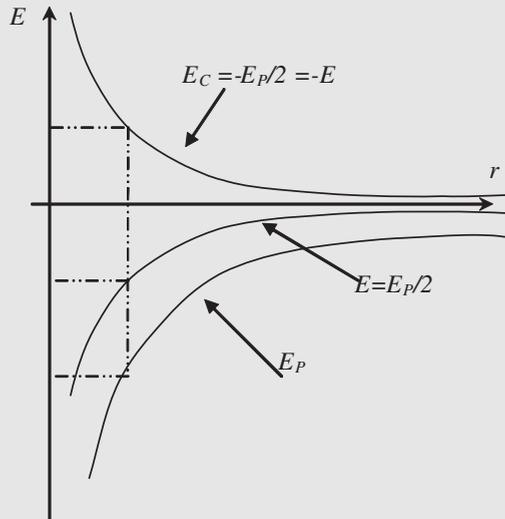


Figure 9.15

4) a) On a une seule force non conservative. Le théorème de l'énergie mécanique donne donc : $\Delta E = W(\vec{f})$ avec le travail $W(\vec{f}) < 0$ puisqu'il correspond à une force de frottement s'opposant au déplacement. L'énergie mécanique va donc diminuer au cours du temps. D'après la relation $E = -E_c$, on en déduit que l'énergie cinétique va augmenter.

$$\text{b) } \Delta E = -\mathcal{G} \frac{mM_T}{2} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r + \Delta r} \right] = -\mathcal{G} \frac{mM_T}{2} \frac{\Delta r}{r(r + \Delta r)} \approx -\mathcal{G} \frac{mM_T}{2} \frac{\Delta r}{r^2}.$$

Travail de la force de frottement sur une révolution

$$W(\vec{f}) = -2\pi r \frac{\beta m v^2}{h} = -2\pi \frac{\beta}{h} m M_T \mathcal{G}$$

On a donc :

$$W(\vec{f}) = -2\pi \frac{\beta}{h} m M_T \mathcal{G} = \Delta E = -\mathcal{G} \frac{mM_T}{2} \frac{\Delta r}{r^2} \Rightarrow \Delta r = \frac{4\pi\beta r^2}{h}$$

$$\Delta r = \frac{4\pi\beta(R_T + h)^2}{h} \approx \frac{4\pi\beta R_T^2}{h} \Delta h = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-8} (6,4 \cdot 10^6)^2}{1,8 \cdot 10^5} = 28,6 \text{ m}$$

Mouvement d'un point matériel dans un champ de gravitation. Étude énergétique

On considère la Terre de masse M_T et de centre O origine du référentiel géocentrique galiléen (R) . On note r la distance à O d'un point M quelconque de l'espace et on pose : $\vec{OM} = r\vec{u}$. Un satellite, assimilé à un point matériel M de masse m ($m \ll M_T$), est animée dans (R) d'une vitesse \vec{v} . Il subit uniquement la force de gravitation exercée par la Terre :

$$\vec{f}(M) = -\frac{K}{r^2} \vec{u} \quad (K \text{ constante positive})$$

I. Mouvement plan

1) On note G la constante universelle de gravitation. Donner l'expression de K .

2) Montrer que le moment cinétique par rapport au point O de la masse m : $\vec{L}_o = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$ reste constante au cours du mouvement. En déduire que ce mouvement s'effectue dans un plan contenant le centre des forces O et perpendiculaire au moment cinétique \vec{L}_o .

Dans la suite on utilisera la base cylindrique $(\vec{u}, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ avec \vec{u}_z vecteur unitaire suivant la direction et le sens du moment cinétique $\vec{L}_o = L_o \vec{u}_z$ et $(\vec{u}, \vec{u}_\theta)$ base polaire dans le plan du mouvement. Le point M est repéré par ses coordonnées polaires r et θ .

3) Moment cinétique et constante des aires.

- Exprimer L_o en fonction de r , θ (ou leurs dérivées par rapport au temps) et m .
- On définit « la constante des aires » du mouvement par $C = r^2 \dot{\theta}$. Justifier le terme « constante des aires »
- Les conditions initiales à $t = 0$ du mouvement sont définies par :

$$r = r_o; \theta = \theta_o; \|\vec{v}\| = v_o; \alpha = \alpha_o \text{ avec } \alpha = \text{angle que fait } \vec{v} \text{ avec } \vec{u} : \alpha = (\vec{v}, \vec{u})$$

Exprimer L_o en fonction de m , r_o , v_o et $\sin \alpha_o$ et en déduire l'expression de la constante C .

II. Étude énergétique

1) Montrer que la force \vec{f} dérive d'une énergie potentielle $E_p(r)$. Établir l'expression de cette énergie potentielle en la prenant par convention nulle à l'infini ($E_p(\infty) = 0$)

2) Définir l'énergie cinétique E_C de la masse m . L'exprimer en fonction de r , θ (ou leurs dérivées par rapport au temps) et m . En utilisant la définition de la constante des aires C exprimer l'énergie cinétique E_C en fonction de m , r , \dot{r} , et C .

3) Définir l'énergie mécanique E . Le système est-il conservatif? Que peut-on dire alors de cette énergie mécanique E . Montrer que l'énergie mécanique E peut se mettre sous la forme :

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E'(r) \quad \text{avec} \quad E'(r) = -\frac{K}{r} + \frac{mC^2}{2r^2} \quad (\text{énergie potentielle effective})$$

4) Exprimer l'énergie mécanique E_0 de l'état initial ($t = 0$) en fonction de K , m , r_0 , v_0 .

III. Étude de l'énergie potentielle effective $E'(r)$: États liés, États de diffusion.

1) Montrer que la fonction $E'(r)$ admet un minimum E'_m pour $r = r_m$. Exprimer E'_m et r_m en fonction de K , m , r_0 , v_0 et α_0 .

2) Quelles sont les limites de cette fonction quand $r \rightarrow 0$ et $r \rightarrow \infty$. Tracer l'allure du graphe $E'_m(r)$.

3) On a $E - E'(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0$. Indiquer les valeurs possibles que peut prendre r si $E \geq 0$. Même question si $E < 0$. En déduire la condition sur E pour que la masse reste prisonnière du centre de force (états liés) et la condition sur E pour qu'elle échappe à l'attraction de O (états de diffusion).

4) Quelle est la nature du mouvement lorsque $E = E'_m$.

5) Applications :

a) Quelle est, en fonction de K , m , r_0 la valeur minimale V_{om} (vitesse de libération) de v_0 pour que la masse m échappe au centre de force O . (la valeur limite de l'énergie est alors : $E = 0$).

b) Vitesse de libération V_{LT} de la gravitation de la Terre pour un objet se trouvant à la surface de la Terre :

Exprimer K en fonction de la constante de gravitation

$$\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}, M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg},$$

et la masse m . En prenant $r_0 = R_T = 6\,400 \text{ km}$, en déduire l'expression de V_{LT} en fonction de \mathcal{G} , M_T et R_T (rayon de la terre $R_T = 6\,400 \text{ km}$). Calculer V_{LT} .

Approche classique du trou noir : rayon de Schwarzschild d'un astre

Le premier postulat de la relativité restreinte impose une limite supérieure à la vitesse à tout objet $v < c$ ($c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ célérité de la lumière dans le vide). Si la vitesse de libération d'un astre est supérieure ou égale à cette limite c alors rien ne peut s'échapper de la surface de cet astre, y compris la lumière. On dit que l'astre est un trou noir. Déterminer le rayon R (rayon de Schwarzschild de la Terre) qu'aurait la Terre si c'était un trou noir.

Solution

I. Mouvement plan

$$1) \vec{f}(r) = -\mathcal{G} \frac{Mm}{r^2} \vec{u} = -\frac{K}{r^2} \vec{u} \Rightarrow K = \mathcal{G}Mm$$

$$2) \text{ Principe fondamental de la dynamique : } \vec{f} = -\frac{K}{r^2} \vec{u} = m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\begin{aligned} \vec{L}_o &= \overrightarrow{OM} \wedge m \vec{v} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_o}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge m \vec{v} + \overrightarrow{OM} \wedge \frac{d(m\vec{v})}{dt} \\ &= (\vec{v} \wedge m \vec{v}) + (r \vec{u} \wedge m \vec{a}) \end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{0} + r \vec{u} \wedge (-m \frac{K}{r^2} \vec{u}) = \vec{0}$$

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_o = \overrightarrow{OM} \wedge m \vec{v} = \text{vecteur constant.}$$

À tout instant, \overrightarrow{OM} et \vec{v} sont des vecteurs perpendiculaires à un vecteur constant \vec{L}_o .
Donc O, M et \vec{v} reste dans un même plan (contenant le centre des forces O et perpendiculaire au moment cinétique \vec{L}_o).

3) Moment cinétique et constante des aires.

$$a) \vec{L}_o = \overrightarrow{OM} \wedge m \vec{v} = r \vec{u} \wedge m(\dot{r} \vec{u} + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta) = mr^2 \dot{\theta} \vec{u}_z \Rightarrow L_o = mr^2 \dot{\theta}$$

b) $C = r^2 \dot{\theta} = L_o/m = \text{constante}$. Cette constante est homogène à une surface par unité de temps. En fait la surface balayée par unité de temps par le rayon \overrightarrow{OM} correspond à $2C$.

$$c) \vec{L}_o = r_o \vec{u} \wedge m \vec{v}_o = mr_o v_o \sin \alpha_o \Rightarrow C = r_o v_o \sin \alpha_o$$

II. Étude énergétique

$$1) \delta W = \vec{f}(r) dr \vec{u} = f(r) dr = -\mathcal{G} \frac{Mm}{r^2} dr = -d \left(-\mathcal{G} \frac{Mm}{r} \right) = -d(E_p)$$

$$\Rightarrow E_p = -\mathcal{G} \frac{Mm}{r} + \text{cte.} \quad \text{Avec } E_p(\infty) = 0 \text{ alors } E_p = -\mathcal{G} \frac{Mm}{r}$$

$$2) E_C = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2] = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2} \right)$$

3) L'énergie mécanique $E = E_C + E_p = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2} \right) - \frac{K}{r}$. Le système est conservatif car il subit uniquement une force conservative. Cette énergie mécanique E est une constante.

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E'(r) \text{ avec } E'(r) = -\frac{K}{r} + \frac{mC^2}{2r^2} \text{ (énergie potentielle effective)}$$

4) L'énergie mécanique $E_o = \frac{1}{2} m v_o^2 - \frac{K}{r_o}$ correspondant à l'état initial en fonction.

III. Étude de l'énergie potentielle effective $E'(r)$: États liés, États de diffusion.

$$1) \frac{dE'}{dr} = \frac{K}{r^2} - \frac{2mC^2}{2r^3} = \frac{1}{r^2} \left[K - \frac{mC^2}{r} \right] \Rightarrow \frac{dE'}{dr} = 0 \Rightarrow r_m = \frac{mC^2}{K} = \frac{m(r_o v_o \sin \alpha_o)^2}{K}$$

$$E'_m = -\frac{K^2}{mC^2} + \frac{K^2}{2mC^2} = -\frac{K^2}{2mC^2} = -\frac{K^2}{2m(r_o v_o \sin \alpha_o)^2}$$

$$2) E(r \rightarrow 0) \rightarrow \infty \text{ et } E(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0^-$$

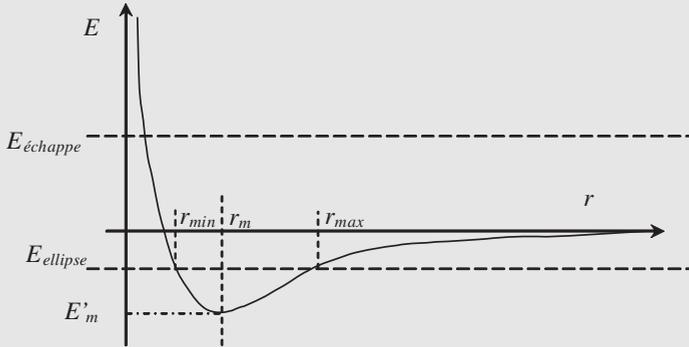


Figure 9.16

3) Si $E \geq 0$ alors r peut varier de 0 à l'infini. Si $E < 0$ alors r peut varier entre 2 valeurs r_{min} et r_{max} (la masse décrit une ellipse). La masse reste prisonnière du centre de force. Pour $E = 0$: valeur limite pour échapper à l'attraction de O .

4) Lorsque $E = E'_m$ alors $r = r_m$ et donc la masse décrit un cercle

5) Applications :

a) $E_o = \frac{1}{2}mv_o^2 - \frac{K}{r_o} \geq 0$, la valeur minimale de la vitesse est : $V_{om} = \left(\frac{2K}{mr_o}\right)^{1/2}$

b) Vitesse de libération V_{LT} de la gravitation de la Terre pour un objet se trouvant à la surface de la Terre :

$$K = \mathcal{G}Mm = m \cdot 4 \cdot 10^{14} \text{ donc :}$$

$$V_{LT} = \left(\frac{2K}{mR_T}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{8 \cdot 10^{14}}{6,4 \cdot 10^6}\right)^{\frac{1}{2}} = 1,12 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$V_{LT} = \left(2\frac{\mathcal{G}M}{R_T}\right)^{\frac{1}{2}} = 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

Approche classique du trou noir : rayon de Schwarzschild d'un astre :

$$V_{LT} = c = \left(2\frac{\mathcal{G}M}{R}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow R = 2\frac{\mathcal{G}M}{c^2} = \frac{8 \cdot 10^{14}}{9 \cdot 10^{16}} = 8,9 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 8,9 \text{ mm.}$$

CHAPITRE 10

TRAJECTOIRES D'UN SYSTÈME À DEUX CORPS

Pré-requis

- Connaître les notions de référentiel barycentrique, de réduction du système à deux corps à un objet unique de masse réduite μ ainsi que tous les aspects cinématique et énergétique du système à deux corps.

Objectif

- ▶ Établir à partir des principes fondamentaux de la mécanique les trajectoires d'un système à deux corps ;
- ▶ Savoir démontrer la formule de Binet et résoudre l'équation différentielle du mouvement ;
- ▶ Apprendre à reconnaître une trajectoire en fonction de son excentricité ;
- ▶ Établir les trois lois de Képler.

1. RAPPELS

Nous cherchons dans ce chapitre à déterminer l'équation de la trajectoire d'un système constitué par deux corps en interaction. Nous avons vu dans le chapitre précédent que les conditions initiales du mouvement conditionnent la nature de ce dernier. Le système a une énergie mécanique qui dépend de ces conditions initiales et évolue soit entre deux limites pour un état lié, soit entre une position minimale d'approche et l'infini pour un état de diffusion.

Nous avons vu également qu'un système à deux corps (masse m_1 de centre d'inertie M_1 et masse m_2 de centre d'inertie M_2) peut être formellement réduit à un système à un corps dont la position M par rapport à une origine O d'un référentiel galiléen est $\vec{r} = \vec{OM} = \vec{M_1M_2}$ et qui est affecté de la masse réduite $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. Ce corps subit la force de gravitation $\vec{F} = \vec{F}_2$. Les équations de son mouvement sont les suivantes :

$$r^2 \dot{\theta} = C = \frac{L}{\mu}$$

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + E_{p_{\text{eff}}} = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \mu \frac{C^2}{2r^2} - \mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_2 = -\vec{F}_1 = \mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \mu \frac{d \vec{v}}{dt}$$

La figure 10.1 résume l'équivalence utilisée.

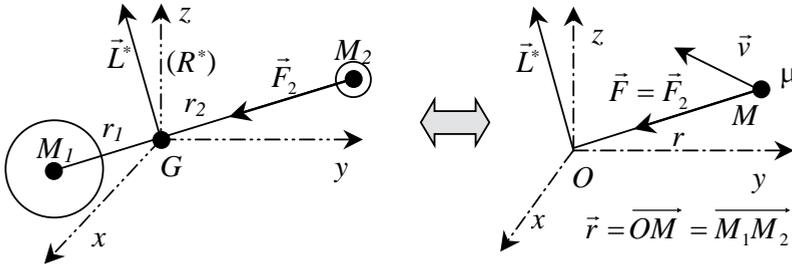


Figure 10.1 • Système à deux corps équivalent à un système à un corps de masse μ soumis à une force centrale.

L'étude du mouvement du point M peut être réalisée dans le référentiel galiléen en utilisant la base des coordonnées cylindriques $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. Dans cette base les composantes de la vitesse et de l'accélération du point M s'écrivent :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10.1}$$

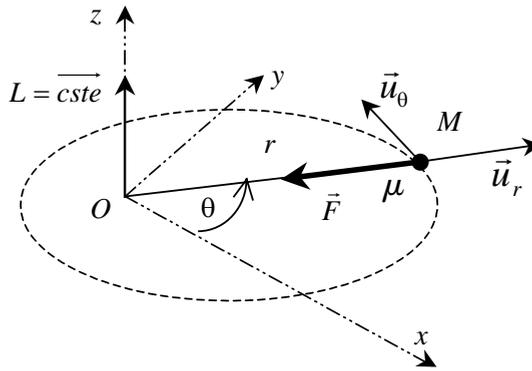


Figure 10.2 • Étude du mouvement de la masse réduite μ dans le référentiel galiléen (O, x, y, z, t)

2. ÉQUATION POLAIRE DE LA TRAJECTOIRE : FORMULE DE BINET.

L'équation horaire de la trajectoire est classiquement obtenue par intégration de la relation fondamentale de la dynamique. Cette équation s'écrit dans la base tournante :

$$\mu ((\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{u}_\theta) = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r$$

On obtient les deux équations différentielles suivantes :

$$\mu (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^2}; \quad 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$$

La deuxième équation traduit le fait que le moment cinétique est constant. En effet, cette équation peut s'écrire :

$$\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} = 0 \implies r^2\dot{\theta} = C$$

On retrouve donc la relation des aires déjà connue. Le système d'équations devient :

$$\begin{aligned} \mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= -\mathcal{G}\frac{m_1m_2}{r^2} = -\frac{K}{r^2} \\ r^2\dot{\theta} &= C \end{aligned}$$

avec $K = \mathcal{G}\frac{m_1m_2}{\mu}$.

L'intégration de cette relation ne peut pas être réalisée à ce stade car deux des variables sont couplées par l'intermédiaire de la relation des aires. La relation peut être utilisée pour éliminer la variable temps et obtenir ainsi l'équation de la trajectoire $r = r(\theta)$. Pour cela, il convient d'introduire, comme l'a montré Binet, le changement de variable suivant :

$$u = \frac{1}{r} \implies \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2} = Cu^2$$

où u est considéré comme une fonction de r avec r fonction de θ . Nous allons maintenant rechercher la relation $u = u(\theta)$. Pour faire apparaître u dans la première équation, nous sommes amenés à exprimer \ddot{r} et $\dot{\theta}$ en fonction de cette variable. Nous avons :

$$\dot{\theta} = Cu^2 \implies \dot{\theta}^2 = C^2u^4 \implies r\dot{\theta}^2 = C^2u^3$$

$$-\mathcal{G}\frac{m_1m_2}{r^2} = -\mathcal{G}m_1m_2u^2$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{du}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \implies \dot{r} = -C \frac{du}{d\theta}$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = -C \frac{d(du/d\theta)}{dt} = -C \frac{d^2u}{d\theta^2} \dot{\theta} = -Cu^2 \frac{d^2u}{d\theta}$$

En reportant ces expressions dans la première équation différentielle du système, on obtient :

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{K}{r^2} \implies -C^2u^2 \frac{d^2u}{d\theta} - C^2u^3 = -Ku^2$$

Avec u différent de 0, l'équation différentielle devient :

$$\frac{d^2u}{d\theta} + u = \frac{K}{C^2}$$

L'expression obtenue est qualifiée de *formule de Binet*.

3. RÉOLUTION DE LA FORMULE DE BINET

Cette équation du second degré à second membre constant admet une solution particulière :

$$u = \frac{K}{C^2} = \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{\mu C^2}$$

et une solution de l'équation sans second membre de la forme :

$$u = A \cos(\theta - \phi)$$

La solution générale est donc de la forme :

$$u = \frac{1}{r} = A \cos(\theta - \phi) + \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{\mu C^2}$$

où A et ϕ sont deux constantes d'intégration qui dépendent des conditions initiales.

Il est toujours possible de s'arranger pour avoir $\phi = 0$. Il suffit pour cela de faire une rotation du repère (O, x, y, z) d'un angle ϕ , autour de l'axe Oz (figure 10.3). La nouvelle coordonnée angulaire $\theta = \theta(X, Y)$ du repère (O, X, Y, z) ainsi obtenu correspond alors à $\theta(x, y) - \phi$.

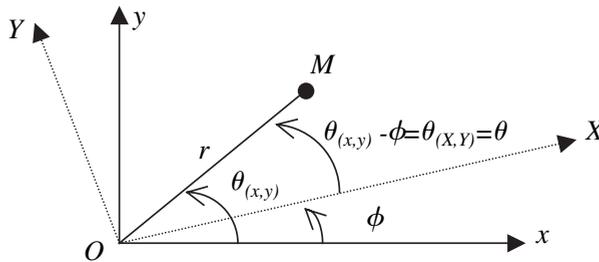


Figure 10.3 • Dans le nouveau repère (O, X, Y) obtenu par rotation du repère (O, x, y) , la coordonnée angulaire se transforme en $\theta(X, Y) = \theta(x, y) - \phi$.

Il en résulte que la distance r évolue en fonction du nouvel angle selon une expression du type :

$$r = \frac{1}{A \cos \theta + \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{\mu C^2}} \quad (10.2)$$

Cette relation peut se mettre sous une forme différente en factorisant la quantité $\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{\mu C^2}$.

On obtient alors l'équation suivante :

$$r = \frac{1}{\left(1 + \frac{A}{\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{\mu C^2}} \cos \theta\right) \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{\mu C^2}}$$

En utilisant les notations suivantes :

$$p = \frac{\mu C^2}{\mathcal{G}m_1m_2} = \frac{C^2}{\mathcal{G}(m_1 + m_2)} \quad (10.3)$$

$$e = Ap \quad (10.4)$$

il vient :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

Cette équation est connue sous le nom d'*équation polaire paramétrée en (p, e)* . Elle correspond à l'équation, en coordonnées polaires, d'une conique de paramètre p et d'excentricité e .

Il importe de remarquer que cette solution permet ensuite de déterminer la position des points M_1 et M_2 par rapport à G en fonction de l'angle θ . En effet rappelons que :

$$\begin{aligned} r &= r_1 + r_2 \quad \text{et} \quad m_1 r_1 = m_2 r_2 \\ r_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r \end{aligned}$$

Notons une fois encore que si $m_1 \gg m_2$ alors le point M_1 est fixe car G est pratiquement en M_1 et le point M_2 se trouve à la distance r de G .

Les paramètres p et e dépendent des conditions initiales. Le paramètre p est toujours positif dans le cas d'une interaction gravitationnelle. Pour une interaction électrostatique, entre deux charges q_1 et q_2 , on aurait :

$$p = \frac{4\pi \varepsilon_0 \mu C^2}{q_1 q_2}$$

On constate que $p > 0$ pour des charges de même nature et $p < 0$ dans le cas contraire.

L'excentricité e est choisie positive. Suivant les conditions initiales, on peut obtenir :

$$r = \frac{p}{1 \pm e \cos \theta}$$

Lorsque le signe de e est négatif, le changement de phase $\theta \rightarrow \theta + \pi$ permet de passer à un signe positif. Il suffit ensuite de faire une rotation des axes de π pour se ramener à l'expression : $1 + e \cos \theta$.

Les trajectoires possibles du point M dépendent essentiellement du paramètre e appelé **excentricité** de la trajectoire. Nous présentons dans le paragraphe suivant l'étude de la trajectoire en fonction de l'excentricité e avec $e \geq 0$.

4. ÉTUDE DES TRAJECTOIRES

4.1. Excentricité nulle $e = 0$

Lorsque l'excentricité de la trajectoire est nulle, on obtient un rayon vecteur de valeur constante $r = p$. La trajectoire est alors circulaire et le rayon de la trajectoire égal au paramètre p de la conique (figure 10.4). Les trajectoires des deux masses m_1 et m_2 se déduisent par simple homothétie.

4.2. Excentricité $e < 1$

Lorsque l'excentricité est inférieure à 1, la trajectoire se caractérise par un rayon vecteur qui varie avec l'angle θ . Il suffit pour connaître la trajectoire de calculer r pour θ variant de 0 à 2π . Le tableau 11.1 donne ces valeurs de façon générale pour $e = 0, 5$.

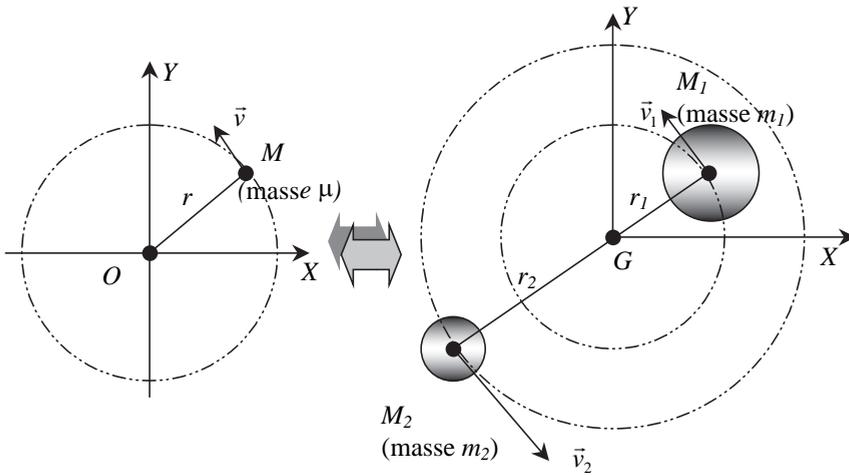


Figure 10.4 • Mouvement circulaire de la masse réduite μ : excentricité $e = 0$. Nous remarquons de même que les trajectoires des masses m_1 et m_2 , homothétiques de celle de μ , sont aussi circulaires de centre G et de rayons $r_1 = \frac{m_2}{\mu}r$ et $r_2 = \frac{m_1}{\mu}r$.

| θ | 0 | $\pi/2$ | π | $3\pi/2$ | 2π |
|----------|-------------|---------|-------------|----------|-------------|
| r | $p/(1 + e)$ | p | $p/(1 - e)$ | p | $p/(1 + e)$ |
| r | 0,666p | p | 2p | p | 0,666p |

Tableau 10.1 • Évolution de la valeur de r en fonction de l'angle θ .

Il est facile de reporter ces valeurs sur un graphe en coordonnées polaires. On obtient ainsi une trajectoire elliptique, dont l'un des foyers F est l'origine O du repère et pour laquelle les positions minimale P et maximale A d'approche de F sont données par $p/(1 + e)$ et $p/(1 - e)$. Ces positions sont appelées respectivement le **périgée** et l'**apogée** du mouvement.

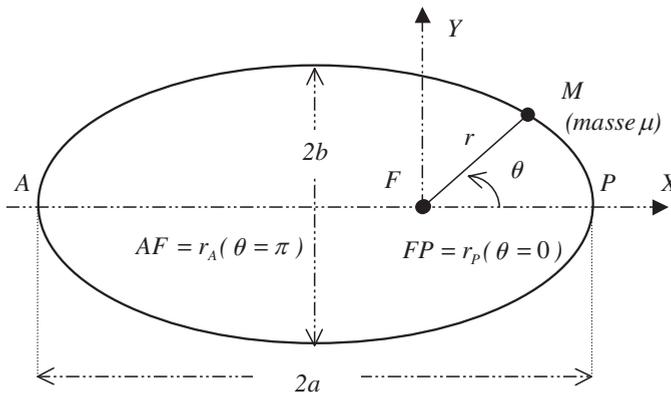


Figure 10.5 • Représentation d'une trajectoire elliptique et des différentes grandeurs utilisées.

La distance qui sépare le périhélie P de l'apogée A est égale au *grand axe* de l'ellipse, ce qui conduit à l'expression suivante du demi-grand axe a :

$$a = \frac{p}{1 - e^2}$$

On notera que si la masse m_1 est très supérieure à la masse m_2 alors le point M_1 est confondu avec G et correspond au foyer F . Le point M_2 se confond alors avec M . Cette situation est celle du Soleil (M_1) et de la Terre (M_2) par exemple.

4.3. Excentricité unitaire $e = 1$

Lorsque l'excentricité de la trajectoire est égale à 1, on passe par une trajectoire de transition. Cette trajectoire diffère de la précédente principalement pour un angle θ tendant vers π . Pour cette valeur de l'angle θ , le rayon vecteur r tend vers l'infini et la trajectoire ne se referme plus sur elle-même. Le périhélie du mouvement est obtenu pour $\theta = 0$ et correspond à $r = p/2$. L'équation de la trajectoire peut s'écrire en coordonnées cartésiennes. On aura :

$$r(1 + \cos \theta) = p \implies \sqrt{X^2 + Y^2} = p - X \implies Y^2 = p^2 - 2pX$$

On obtient donc :

$$X = -\frac{Y^2}{2p} + \frac{p}{2}$$

La trajectoire observée est alors une parabole d'axe FX . Pour $\theta = \pi/2$ ($x = 0$), on a $Y = p$. On verra par la suite qu'elle correspond à une énergie nulle caractéristique du passage de l'état de diffusion à l'état lié.

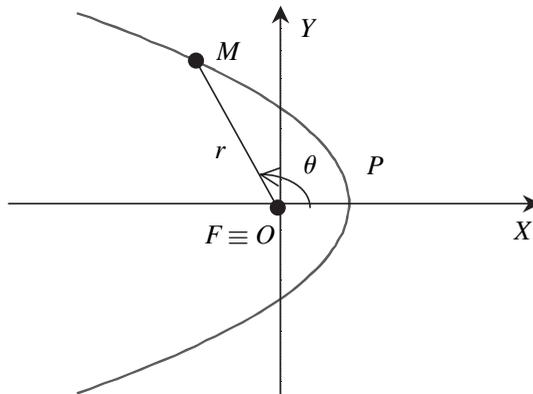


Figure 10.6 • Trajectoire parabolique d'excentricité $e = 1$.

4.4. Excentricité $e > 1$

Lorsque l'excentricité de la trajectoire est supérieure à 1, la trajectoire se démarque de la trajectoire parabolique. On reste dans un état de diffusion c'est-à-dire qu'il existe des valeurs de θ pour lesquelles le point M s'éloigne à l'infini du centre de force O (confondu avec F). La trajectoire est alors une branche d'hyperbole.

On passe subitement d'une branche à une autre pour des valeurs critiques θ_m de θ qui annulent le dénominateur du rayon vecteur. Ces valeurs sont données par :

$$r > 0 \implies 1 + e \cos \theta > 0 \implies \cos \theta > \cos \theta_m = -\frac{1}{e} \implies -\theta_m < \theta < \theta_m$$

Il importe de remarquer que, physiquement, la trajectoire du point M est confinée à une seule branche de l'hyperbole et que la nature de la branche est déterminée par les conditions initiales du mouvement. Le tableau 10.2 donne l'évolution de la valeur de r en fonction de l'angle θ .

| | | | | | |
|----------|-------------|----------|-----------|---------|------------|
| θ | $-\theta_m$ | $-\pi/2$ | 0 | $\pi/2$ | θ_m |
| r | ∞ | p | $p/(1+e)$ | p | ∞ |

Tableau 10.2 • Évolution de r en fonction de l'angle θ .

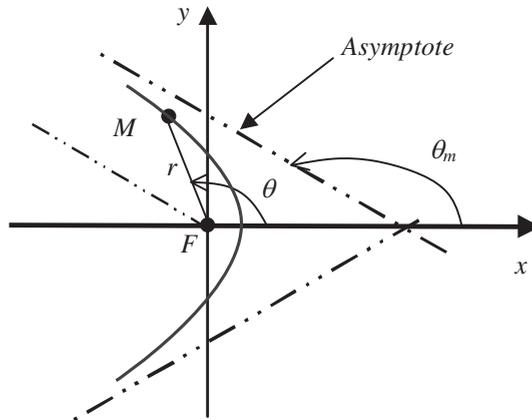


Figure 10.7 • Trajectoire hyperbolique d'excentricité $e > 1$.

5. ÉTUDE ÉNERGÉTIQUE

Il est intéressant de revenir maintenant sur l'énergie du système. Nous avons que l'énergie mécanique est constante et qu'elle s'écrit :

$$E = \frac{1}{2}\mu (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r}$$

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu\frac{C^2}{r^2} - \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r}$$

La détermination de la valeur de l'énergie mécanique, en fonction notamment de l'excentricité de la trajectoire, peut se faire au périhélie P . En effet, à cette position, r passe par un minimum égal à $r = p/(1+e)$ et la quantité dr/dt est alors nulle. L'expression de l'énergie est alors donnée par :

$$E = \frac{1}{2}\mu\frac{C^2}{r^2} - \mathcal{G}\frac{m_1m_2}{r} = \frac{1}{2}\mu\frac{C^2}{p^2}(1+e)^2 - \frac{\mathcal{G}m_1m_2(1+e)}{p} \quad \text{avec} \quad C^2 = p\mathcal{G}(m_1 + m_2)$$

En reprenant la valeur de la masse réduite et en reportant celle-ci dans l'équation donnant l'énergie, il vient :

$$E = \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{p}(1+e) \left(\frac{1+e}{2} - 1 \right) = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{2p}(1-e^2)$$

L'énergie du système est donc égale à :

$$E = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{2p}(1-e^2)$$

Il est intéressant de constater que l'énergie mécanique passe par 0 lorsque l'excentricité de la trajectoire est égale à 1 (trajectoire ouverte parabolique) et que, si $e > 1$ (trajectoire ouverte hyperbolique), l'énergie est positive, ce qui correspond bien à un état de diffusion. Lorsque que $e < 1$ on trouve bien que l'énergie est négative, ce qui correspond à l'état lié (trajectoire fermée elliptique ou circulaire).

6. TRAJECTOIRES ELLIPTIQUES : LOIS DE KEPLER

6.1. Caractéristiques des trajectoires elliptiques

Les trajectoires de forme elliptique sont extrêmement importantes dans la pratique. Elles correspondent au mouvement des planètes du système solaire ainsi qu'aux trajectoires des satellites artificiels. Rappelons que, dans de tels cas, l'excentricité de la trajectoire est inférieure à 1 et que l'énergie mécanique est négative. La trajectoire elliptique correspond donc à un état lié et le point M (dans ce cas, confondu avec le centre d'inertie M_2 de la planète) se déplace, par rapport à M_1 (qui se confond avec le centre d'inertie du système) entre une position minimale, le *périgée*, et une position maximale, l'*apogée*. Nous allons voir dans ce paragraphe comment cerner toutes les caractéristiques de cette trajectoire. Nous avons déjà établi que l'équation polaire de la trajectoire est :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

avec (voir 10.3 et 10.4)

$$p = \frac{\mu C^2}{\mathcal{G}m_1m_2} = \frac{C^2}{\mathcal{G}(m_1 + m_2)}; \quad e = \frac{A}{\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{\mu C^2}} = Ap \quad (10.5)$$

En outre l'énergie est donnée par :

$$E = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{2p}(1-e^2)$$

Nous cherchons à déterminer les caractéristiques de la trajectoire en fonction des propriétés du système, c'est à dire son énergie E , la constante des aires C et en fonction des masses m_1 et m_2 . Une trajectoire elliptique est caractérisée par trois paramètres pertinents qui sont le grand axe $2a$, le petit axe $2b$ et l'excentricité e . Il importe de savoir qu'une ellipse possède deux foyers F et F' . L'un des foyers F est ici confondu avec le centre de force O .

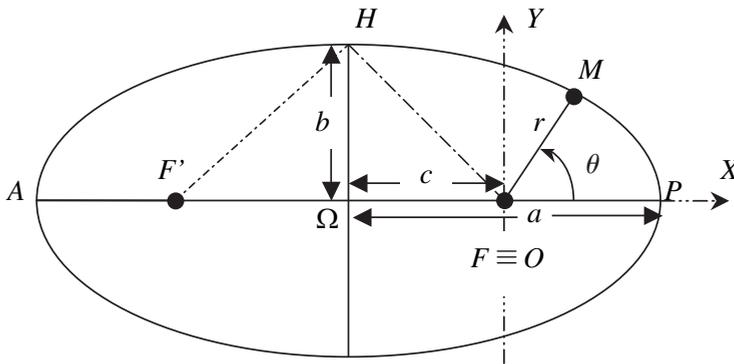


Figure 10.8 • Caractéristiques d'une ellipse.

F et F' étant les deux foyers de l'ellipse et Ω le milieu de FF' (voir figure 10.8), on pose :

- $A\Omega = \Omega P = a$, le demi-grand axe ;
- $\Omega H = b$, le demi-petit axe ;
- $\Omega F = \Omega F' = c$.

La position d'un point M de la trajectoire vérifie toujours la relation :

$$FM + F'M = cste$$

Il est facile de voir que lorsque M est en P ou en A , la distance $FM + F'M$ est égale à :

$$FA + F'A = FA + FP = 2a = FM + F'M$$

a) Détermination de a (demi-grand axe)

Le grand axe de l'ellipse est égal à la distance qui sépare l'apogée A du périhéliee P . Il vérifie la relation $PF = 2a$. La position des points P et A s'obtient à partir de l'équation polaire de la trajectoire. On a :

$$FP = \frac{p}{1+e} \text{ et } FA = \frac{p}{1-e}$$

Il en résulte que :

$$a = \frac{p}{1-e^2} \quad (10.6)$$

b) Détermination de l'excentricité

Il est facile de voir sur la figure 10.8 que $c = \Omega F = AF - \Omega A$, soit

$$c = \frac{p}{1-e} - a = \frac{p(1+e)}{1-e^2} - a = a(1+e) - a.$$

On a donc

$$c = ae$$

On peut remarquer que pour $e = 0$, on obtient $c = 0$. Les points F et F' sont alors confondus et la trajectoire est un cercle.

c) Détermination de b (demi-petit axe)

Pour déterminer le petit axe nous utilisons la propriété des foyers en positionnant le point M au point H du petit axe (figure 10.8) :

$$FH + F'H = 2FH = 2a \implies F'H = FH = a$$

Dans cette configuration, l'application du théorème de Pythagore dans le triangle rectangle FH conduit à :

$$FH^2 = F\Omega^2 + \Omega H^2 = c^2 + b^2 = a^2 e^2 + b^2$$

On peut donc conclure que le petit axe de l'ellipse est donné par :

$$b^2 = a^2(1 - e^2) \quad (10.7)$$

d) Énergie du système

L'énergie du système est constante et égale à :

$$E = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{2p}(1 - e^2)$$

En utilisant le résultat obtenu pour le demi-grand axe de l'ellipse (voir le résultat obtenu en 10.6), il vient :

$$E = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{2a}$$

Nous pouvons donc conclure que l'énergie ne dépend que du grand axe de l'ellipse. Il importe de remarquer que des trajectoires elliptiques différentes peuvent avoir même énergie, c'est-à-dire même grand axe.

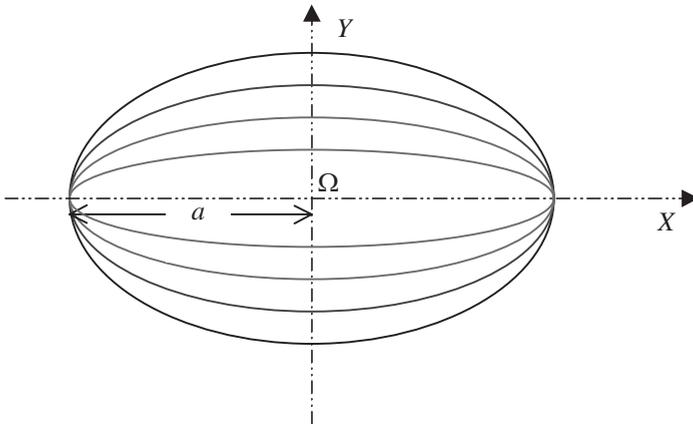


Figure 10.9 • Différentes trajectoires pour une même énergie E donnée.

La différence entre ces deux trajectoires de même énergie est liée aux conditions initiales du mouvement qui définissent la valeur de la constante des aires C et donc du paramètre p de l'ellipse, qui rappelons-le (voir équation 10.5) est égal à :

$$p = \frac{C^2}{\mathcal{G}m_1m_2}$$

6.2. Lois de Kepler

a) Rappel de leur énoncé

Ces lois ont été énoncées par Kepler en 1604. Elles sont relatives aux planètes du système solaire dont elles décrivent le mouvement. Établies expérimentalement par Kepler (voir chapitre 9), elles ont permis à Newton d'étayer sa théorie de la gravitation.

Loi n° 1. *Les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques dont le Soleil est l'un des foyers.*

Loi n° 2. *Au cours de leur mouvement, les planètes balayent des aires égales pendant des temps égaux (loi des aires).*

Loi n° 3. *Le carré de la période de révolution des planètes est proportionnel au cube du grand axe de l'ellipse.*

b) Relation avec la mécanique de Newton

La première loi montre que les planètes du système solaire sont des systèmes à énergie négative, ce qui est la condition *sine qua non* d'observation d'une trajectoire elliptique.

La seconde loi est la loi des aires sur laquelle nous revenons maintenant. Nous avons démontré que le moment cinétique se conserve dans tout mouvement à force centrale. La conservation du moment cinétique permet d'affirmer que la quantité $r^2\dot{\theta} = C = \frac{L}{\mu}$ est constante. Nous avons montré que cette quantité est le double de l'aire balayée par le point M au cours de son mouvement orbital. On a donc :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{C}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{2}Ct$$

On considère qu'à l'instant $t = 0$ le point M n'a pas encore balayé d'aire. Pendant une période de révolution, l'aire balayée correspond à l'aire de l'ellipse. On a donc :

$$A = \frac{1}{2}CT \Rightarrow T = \frac{2A}{C} = \frac{2\pi ab}{C}$$

On peut en conclure que le carré de la période de révolution est donné par :

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{C^2}$$

ce qui, compte tenu du fait que (voir équations (10.5), (10.6), (10.7)) :

$$b^2 = a^2(1 - e^2); \quad (1 - e^2) = \frac{p}{a}; \quad C^2 = p\mathcal{G}(m_1 + m_2)$$

conduit à :

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\mathcal{G}(m_1 + m_2)}$$

Cette dernière relation est conforme à la détermination expérimentale de Kepler et montre en outre que la mesure de la période d'un satellite permet de déterminer avec précision la masse d'une planète.

À RETENIR

- Binet a montré que le changement de variable $u = \frac{1}{r}$ combiné à la constante des aires $C = \dot{\theta}r^2$ permet d'obtenir l'équation différentielle de la masse fictive μ suivante :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{K}{C^2}$$

Cette équation admet la solution :

$$u = \frac{1}{r} = A \cos(\theta - \phi) + \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{\mu C^2}$$

qui se simplifie en $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$

- Selon la valeur de e excentricité de la trajectoire il convient de distinguer les trajectoires suivantes :
- $e = 0$, la trajectoire circulaire de rayon $r = p$;
 - $0 < e < 1$, la trajectoire est elliptique, le système est lié ;
 - $e = 1$, la trajectoire est parabolique ;
 - $e > 1$, la trajectoire est confinée à une branche d'hyperbole.

- L'énergie du système des deux masses est donnée par

$$E = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{2p}(1 - e^2)$$

- L'excentricité $e = 1$ marque la transition entre les trajectoires elliptiques ou circulaires du système lié ($E < 0$) à celle hyperbolique du système diffusif ($E > 0$).
- Les trajectoires elliptiques sont gouvernées par les lois de Kepler. La trajectoire est périodique de période

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\mathcal{G}(m_1 + m_2)}$$

a représentant le demi-grand axe de la trajectoire elliptique (troisième loi de Kepler).

EXERCICES D'APPLICATION AVEC SOLUTION DÉTAILLÉE

Satellite dans le champ de gravitation terrestre

Données numériques :

- Masse de la Terre $M = 6.10^{24}$ kg
- Rayon de la Terre $R = 6\,400$ km
- Constante de gravitation universelle $\mathcal{G} = 6,67.10^{-11}$ N.m².kg⁻²
- Période de rotation de la Terre (dans le référentiel géocentrique) $T_o = 86\,164$ s

I. Satellite sur Terre

1) Un satellite considéré ponctuelle de masse m est au repos sur la Terre en un point de latitude λ . Quel est son mouvement dans le référentiel galiléen géocentrique ?

2) Exprimer sa vitesse v_o et son énergie cinétique E_{C_o} , dans le référentiel géocentrique, en fonction de m , R , T_o et λ .

3) En déduire l'expression de l'énergie mécanique totale E_o .

A.N. : $m = 800$ kg et latitude $\lambda = 40^\circ$. Calculer les valeurs de v_o , E_{C_o} et E_o .

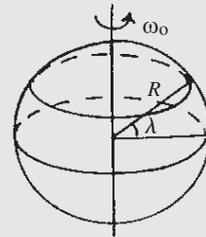


Figure 10.10

II. Satellite sur orbite circulaire

Le satellite est maintenant sur une orbite circulaire autour de la Terre.

1) Étude générale

- a) Faire l'étude du satellite dans le référentiel géocentrique et déterminer, en utilisant le principe fondamental de la dynamique, la relation entre le rayon r de l'orbite et la vitesse v du satellite. Montrer que cette relation peut s'écrire :

$$v = \sqrt{\frac{g_o R^2}{r}} \quad \text{avec } g_o = G(R) \text{ champ de gravitation à la surface de la Terre.}$$

- b) Déduire l'expression de la période T de révolution en fonction du rayon r , g_o et R .
- c) Exprimer l'énergie cinétique E_C et l'énergie potentielle E_P . En déduire l'expression de l'énergie totale E en fonction de m , r , g_o et R .

2) Orbite circulaire rasante

Le satellite est d'abord envoyé sur une orbite basse de rayon r_1 . L'altitude z_1 , de l'ordre de quelques centaines de kilomètres, est très faible devant le rayon R de la Terre. On peut donc considérer $r_1 \approx R$ (orbite rasante)

- a) Donner l'expression de sa vitesse v_1 (1^{ère} vitesse cosmique) en fonction de g_o et R
- b) Donner l'expression de la période T_1 et de l'énergie mécanique totale E_1 .
- c) Calculer g_o , v_1 , T_1 et E_1 .
- d) Exprimer l'énergie $\Delta E = E_1 - E_o$ qu'il a fallu fournir au satellite, initialement au repos sur la Terre à la latitude λ , pour le mettre sur l'orbite rasante. Cette énergie dépend-elle du point de lancement sur terre ? Où sont situées les bases de lancement les plus favorables du point de vue énergétique ? Connaissez-vous le nom de l'une de ces bases ?
- e) Il est habituel de dire que les astronautes et les objets situés à l'intérieur d'un satellite sont « en état d'apesanteur ». Que signifie cette expression ? On considère le référentiel R' défini par le repère dont l'origine est au centre d'inertie P du satellite et dont les axes restent parallèles à ceux du référentiel géocentrique galiléen R . Quel est le mouvement de R' par rapport à R ? Le référentiel R' est-il galiléen ? Faire l'étude mécanique, dans R' , d'une masse m' placée au centre d'inertie P du satellite et montrer alors que cette masse est en parfait état d'apesanteur.

3) Orbite circulaire géostationnaire

Le satellite est ensuite envoyé sur l'orbite géostationnaire de rayon r_2 .

- Qu'est-ce qu'un satellite géostationnaire ? En déduire la valeur de sa période de révolution T_2 dans le référentiel géocentrique.
- Exprimer et calculer le rayon r_2 et l'altitude z_2 du satellite géostationnaire.
- Exprimer et calculer la vitesse v_2 et l'énergie E_2 du satellite géostationnaire.

4) Changement d'orbite : ellipse de transfert

On fait passer le satellite de l'orbite circulaire rasante de rayon $OP = r_1 \approx R$ à l'orbite géostationnaire de rayon $r_2 = CA$. Un moteur auxiliaire permet de modifier la vitesse du satellite aux points P et A . Le satellite parcourt alors une demi ellipse, dite de transfert, de périégée $P(r_P = OP = r_1 = r_{min})$ et d'apogée $A(r_A = OA = r_2 = r_{max})$

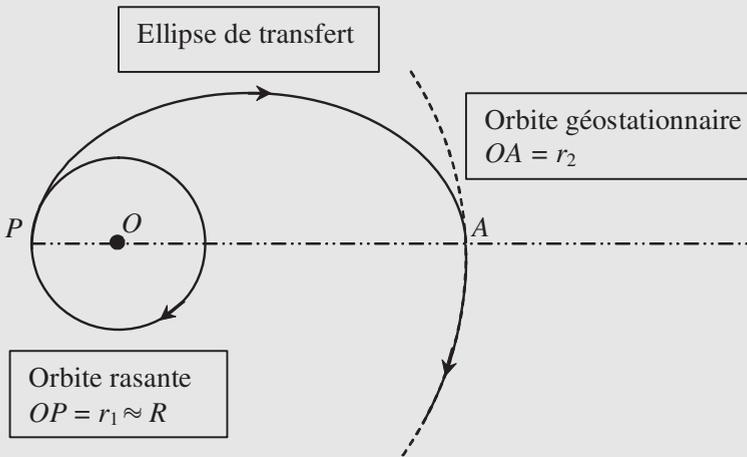


Figure 10.11

- Donner l'expression et la valeur du demi grand axe « a » de l'ellipse de transfert.
- L'énergie mécanique totale $E_{ellipse}$ du satellite sur son orbite elliptique est constante. Son expression peut se déduire de celle obtenue pour une orbite circulaire en remplaçant dans l'expression de E le rayon r de l'orbite circulaire par le demi grand axe « a » de l'orbite elliptique. Donner l'expression de cette énergie mécanique totale $E_{ellipse}$. Calculer $E_{ellipse}$.
- Pour faire passer le satellite de l'orbite circulaire rasante à l'ellipse de transfert il suffit de faire passer sa vitesse au point P de la valeur v_1 à la valeur v'_1 sans changement d'énergie potentielle. La variation d'énergie $\Delta E(P)$ du satellite au point P correspond donc aussi à la variation d'énergie cinétique. Exprimer $\Delta E(P)$. Faut-il accélérer ou freiner le satellite ?
- De même, exprimer la variation d'énergie $\Delta E(A)$ du satellite au point A lorsqu'il passe de la vitesse v'_1 de l'orbite elliptique de transfert à la vitesse v_1 de l'orbite circulaire géostationnaire sans changement d'énergie potentielle. Faut-il accélérer ou freiner le satellite ?

Solution

I. Satellite sur Terre

1) Mouvement circulaire uniforme de rayon $r = R \cos \lambda$ et vitesse angulaire $\omega_o = \frac{2\pi}{T_o}$.

$$2) v_o = r\omega_o = R\omega_o \cos \lambda \quad E_{C_o} = \frac{1}{2}mv_o^2 = \frac{2m\pi^2 R^2 \cos^2 \lambda}{T_o^2}$$

$$3) \text{Énergie mécanique totale } E_o = E_{P_o} + E_{C_o} = -\mathcal{G}\frac{Mm}{R} + \frac{2m\pi^2 R^2 \cos^2 \lambda}{T_o^2}$$

$$A.N. : v_o = \frac{2\pi \cdot 6,4 \cdot 10^6}{8,6164 \cdot 10^4} \cos 40^\circ = 3,57 \cdot 10^2 \text{ m.s}^{-1} ;$$

$$E_{C_o} = 0,5 \cdot 800 \cdot (3,57 \cdot 10^2)^2 = 5,112 \cdot 10^7 \text{ J}$$

$$E_o = 5,112 \cdot 10^7 - 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{6 \cdot 10^{24} \cdot 8 \cdot 10^2}{6,4 \cdot 10^6} = 5,112 \cdot 10^7 - 5 \cdot 10^{10} \approx -5 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

II. Satellite sur orbite circulaire

1) Étude générale

a) Système satellite de masse m , Référentiel géocentrique galiléen, force

$$\vec{F}(r) = -\mathcal{G}\frac{Mm}{r^2} \vec{u}$$

Principe fondamental de la dynamique :

$$m\vec{a} = -\mathcal{G}\frac{Mm}{r^2} \vec{u} \Rightarrow \vec{a} = -\mathcal{G}\frac{M}{r^2} \vec{u}$$

En coordonnée cylindrique

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{r} \vec{u} \Rightarrow \frac{v^2}{r} = -\mathcal{G}\frac{M}{r^2} \Rightarrow v = \sqrt{\mathcal{G}\frac{M}{r}}$$

$$\text{Avec } g_o = \mathcal{G}\frac{M}{R^2} \Rightarrow \mathcal{G}M = g_o R^2 \text{ et on obtient donc : } v = \sqrt{\frac{g_o R^2}{r}}$$

$$b) T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{g_o R^2}} \sqrt{r} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{g_o R^2}}$$

$$c) E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\frac{g_o R^2}{r} \quad E_P = -\mathcal{G}\frac{Mm}{r}$$

$$\text{et donc } E = E_C + E_P = -\frac{mg_o R^2}{2r}$$

2) Orbite circulaire rasante

$$a) v_1 = \sqrt{\frac{g_o R^2}{R}} = \sqrt{g_o R} \text{ (1}^{\text{ère}} \text{ vitesse cosmique)}$$

$$b) T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{g_o R^2}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g_o}} \quad E_1 = -\frac{mg_o R^2}{2R} = -\frac{mg_o R}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } g_o &= \mathcal{G} \frac{M}{R^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{(6,4 \cdot 10^6)^2} = 9,77 \text{ m.s}^{-2} \\ v_1 &= \sqrt{g_o R} = \sqrt{9,77 \cdot 6,4 \cdot 10^6} = 7,9 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1} \\ T_1 &= 2\pi \sqrt{\frac{6,4 \cdot 10^6}{9,77}} = 5085,37 \text{ s} = 84,756 \text{ minutes} = 1 \text{ h} 24' 45'' \\ E_{1.} &= -\frac{mg_o R}{2} = -400 \cdot 9,77 \cdot 6,4 \cdot 10^6 = -2,5 \cdot 10^{10} \text{ J} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \Delta E &= E_1 - E_o = -\frac{mg_o R}{2} - \left(-\mathcal{G} \frac{Mm}{R} + \frac{2m\pi^2 R^2 \cos^2 \lambda}{T_o^2} \right) \\ \Delta E &= E_1 - E_o = -\frac{mg_o R}{2} + mg_o R - \frac{2m\pi^2 R^2 \cos^2 \lambda}{T_o^2} = mg_o R - \frac{2m\pi^2 R^2 \cos^2 \lambda}{T_o^2} \end{aligned}$$

Cette énergie dépend du point de lancement sur Terre. Les bases de lancement les plus favorables du point de vue énergétique se situent le plus près possible de l'équateur ($\lambda = 0$) comme Kourou en Guyane

- e) État d'apesanteur = absence de pesanteur ou pesanteur compensée
Le référentiel R' est en translation circulaire uniforme par rapport à R . L'accélération du centre d'inertie P est $\vec{a} = -\mathcal{G} \frac{M}{OP^2} \vec{u}$ (voir **1.a**). Ce référentiel est non galiléen.

Force agissant sur m' située au centre d'inertie P du satellite :

$$\vec{F}' = -\mathcal{G} \frac{Mm'}{OP^2} \vec{u}$$

et la force d'inertie d'entraînement

$$\vec{F}_{ie} = -m' \vec{a}(P) = -m' \left(-\mathcal{G} \frac{M}{r^2} \vec{u} \right) = \mathcal{G} \frac{Mm'}{r^2} \vec{u}.$$

Le principe fondamental appliqué dans un référentiel non galiléen donne : $\vec{F}' + \vec{F}_{ie} = \vec{0}$. La masse m' est donc pseudo isolé et se trouve en état d'apesanteur

3) Orbite circulaire géostationnaire

- a) Satellite géostationnaire = immobile par rapport à la Terre. Donc il tourne autour du même axe avec la même période par rapport au référentiel géocentrique.

On a donc : $T_2 = 8,6164 \cdot 10^4 \text{ s}$

$$\begin{aligned} \text{b) } T_2 &= 2\pi \sqrt{\frac{r_2^2}{g_o R^2}} \Rightarrow r_2 = \left(\frac{T_2^2 g_o R^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{(8,6164 \cdot 10^4)^2 \cdot 9,77 \cdot (6,4 \cdot 10^6)^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 4,21 \cdot 10^7 \text{ m} \end{aligned}$$

$r_2 = 42100 \text{ km}$ et donc l'altitude $z_2 = 35700 \text{ km}$ (environ 36000 km)

$$\text{c) } v_2 = \sqrt{\frac{g_o R^2}{r_2}} = \sqrt{\frac{9,77 \cdot (6,4 \cdot 10^6)^2}{4,21 \cdot 10^7}} = 3,08 \text{ km.s}^{-1}$$

$$\text{L'énergie } E_2 = -\frac{mg_o R^2}{2r} = -400 \cdot 9,77 \cdot \frac{(6,4 \cdot 10^6)^2}{4,21 \cdot 10^7} = -3,8 \cdot 10^9 \text{ J}$$

4) Changement d'orbite : ellipse de transfert

a) Demi grand axe de l'ellipse de transfert

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{(6\,400 + 42\,100)}{2} = 24\,250 \text{ km.}$$

b) L'énergie mécanique

$$E_{\text{ellipse}} = -\frac{mg_o R^2}{2a} = -\frac{mg_o R^2}{R + r_2} = -400.9,77 \cdot \frac{(6,4 \cdot 10^6)}{2,425 \cdot 10^7} = -6,6 \cdot 10^9 \text{ J}$$

$$\text{c) } \Delta E(\mathbf{P}) = E_{\text{ellipse}} - E_{\text{rasante}} = -mg_o R^2 \left[\frac{1}{R + r_2} - \frac{1}{2R} \right] = \frac{1}{2}mv_1'^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 > 0.$$

Il faut **accélérer** le satellite.

$$\text{d) } \Delta E(\mathbf{A}) = E_{\text{géostationnaire}} - E_{\text{ellipse}} = -mg_o R^2 \left[\frac{1}{2r_2} - \frac{1}{R + r_2} \right] = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_2'^2 > 0.$$

Il faut **accélérer** le satellite.

Trajectoire d'une particule dans un champ de forces newtonien

On considère un point matériel M de masse m soumise uniquement à un champ de forces newtonien. Le centre de forces correspond au point O fixe dans le référentiel galiléen choisi pour étudier le système. On a alors :

$$\vec{F}(r) = -\frac{k}{r^2} \vec{u} \quad \text{avec } r = OM \quad \text{et} \quad \vec{u} = \frac{\vec{OM}}{r}$$

1) Écrire la relation fondamentale de la dynamique

2) Le moment cinétique \vec{L}_o de M par rapport au point O est défini par la relation :

$\vec{L}_o = \vec{OM} \wedge m \vec{v}$ avec \vec{v} le vecteur vitesse de M dans le référentiel choisi.

a) Calculer $\frac{d\vec{L}_o}{dt}$ et montrer que \vec{L}_o est un vecteur constant.

b) En déduire que le mouvement de M s'effectue dans un plan contenant O et M et perpendiculaire au moment cinétique \vec{L}_o .

c) Le point M est repéré, dans le plan où s'effectue le mouvement, par ses coordonnées polaires r et θ . On utilisera la base cylindrique $(\vec{u}, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ avec \vec{u}_z vecteur unitaire suivant la direction du moment cinétique $\vec{L}_o = L_o \vec{u}_z$ et $(\vec{u}, \vec{u}_\theta)$ base polaire dans le plan du mouvement.

Exprimer \vec{OM} et \vec{v} dans la base $(\vec{u}, \vec{u}_\theta)$ et en déduire l'expression du moment cinétique L_o en fonction de m et des coordonnées (r, θ) ou de leurs dérivées.

3) Pour retrouver certaines caractéristiques des trajectoires possibles de M on introduit le vecteur \vec{A} (appelé vecteur de Runge-Lenz) :

$$\vec{A} = (\vec{v} \wedge \vec{L}_o) - k \vec{u}$$

- a) En dérivant directement cette relation vectorielle de \vec{A} donner l'expression de $\frac{d\vec{A}}{dt}$.

En utilisant les résultats précédents, montrer que le vecteur est \vec{A} est constant. Sans faire de calcul montrer que \vec{A} est dans le plan du mouvement. On peut choisir alors de prendre le vecteur unitaire \vec{u}_x de la base cartésienne du repère suivant ce vecteur :

$$\vec{A} = A\vec{u}_x$$

- b) Effectuer le produit scalaire $\vec{A} \cdot \vec{OM}$ en remplaçant les vecteurs \vec{A} et \vec{OM} par leur expression dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et montrer la relation :

$$\vec{A} \cdot \vec{OM} = \frac{L_o^2}{m} - kr$$

- c) Quelle est l'autre expression possible du produit scalaire $\vec{A} \cdot \vec{OM}$ faisant apparaître l'angle θ que font entre eux ces deux vecteurs.
d) En déduire que r peut se mettre sous la forme :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

La trajectoire de M est une conique de paramètre p et d'excentricité e . Donner l'expression du paramètre p et de l'excentricité e en fonction de L_o , m , k et A .

4) Relation entre énergie et excentricité

- a) L'énergie potentielle dont dérive la force $\vec{F}(r)$ a pour expression $E_p = -\frac{k}{r}$. Donner l'expression de l'énergie mécanique totale E en fonction de m , v , k et r .
b) Exprimer $A^2 = \vec{A} \cdot \vec{A}$ et montrer que :

$$A^2 = k^2 \left[1 + \frac{v^2 L_o^2}{k^2} - \frac{2L_o^2}{mkr} \right]$$

- c) Exprimer A^2 en fonction de l'énergie E . En déduire une expression de l'excentricité e en fonction de l'énergie E et montrer qu'on retrouve la classification des coniques obtenues en fonction du signe de l'énergie :
- $e > 1 \Leftrightarrow E > 0$: hyperbole
 - $e = 1 \Leftrightarrow E = 0$: parabole
 - $e < 1 \Leftrightarrow E < 0$: ellipse

Solution

$$\vec{F}(r) = -\frac{k}{r^2} \vec{u} \quad \text{avec } r = OM \quad \text{et} \quad \vec{u} = \frac{\vec{OM}}{r}$$

- 1) Relation fondamentale de la dynamique :

$$\vec{F}(r) = -\frac{k}{r^2} \vec{u} = m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2}$$

$$2) \text{ a) } \vec{L}_o = \vec{OM} \wedge m \vec{v} \Rightarrow \frac{d \vec{L}_o}{dt} = \frac{d \vec{OM}}{dt} \wedge m \vec{v} + \vec{OM} \wedge \frac{d m \vec{v}}{dt} = \vec{v} \wedge m \vec{v} + r \vec{u} \wedge m \frac{d \vec{v}}{dt}$$

En utilisant la relation fondamentale de la dynamique :

$$\frac{d \vec{L}_o}{dt} = \vec{u} \wedge m \frac{d \vec{v}}{dt} = r \vec{u} \wedge \left(-\frac{k}{r^2} \vec{u} \right) = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_o$$

est un vecteur constant.

b) À tout instant, \vec{OM} et \vec{v} sont des vecteurs perpendiculaires à un vecteur constant \vec{L}_o . Donc O , M et \vec{v} reste dans un même plan (contenant le centre des forces O et perpendiculaire au moment cinétique \vec{L}_o).

$$c) \vec{OM} = r \vec{u} \text{ et } \vec{v} = \dot{r} \vec{u} + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$\vec{L}_o = \vec{OM} \wedge m \vec{v} = r \vec{u} \wedge m (\dot{r} \vec{u} + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta) = mr^2 \dot{\theta} \vec{u}_z \Rightarrow L_o = mr^2 \dot{\theta}$$

3) Le vecteur de Runge-Lenz : $\vec{A} = (\vec{v} \wedge \vec{L}_o) - k \vec{u}$

$$a) \frac{d \vec{A}}{dt} = \frac{d (\vec{v} \wedge \vec{L}_o)}{dt} - \frac{d (k \vec{u})}{dt} = \frac{d \vec{v}}{dt} \wedge \vec{L}_o + \vec{v} \wedge \frac{d \vec{L}_o}{dt} - k \frac{d \vec{u}}{dt}$$

Le terme $\vec{v} \wedge \frac{d \vec{L}_o}{dt} = \vec{0}$ (le moment cinétique \vec{L}_o est constant, sa dérivée est nulle).

$$\text{Le terme suivant : } -k \frac{d \vec{u}}{dt} = -k \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

Le premier terme, avec la relation fondamentale de la dynamique :

$$\frac{d \vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{k}{mr^2} \vec{u},$$

$$\text{on obtient : } \frac{d \vec{v}}{dt} \wedge \vec{L}_o = -\frac{k}{mr^2} \vec{u} \wedge mr^2 \dot{\theta} \vec{u}_z = k \dot{\theta} (-\vec{u} \wedge \vec{u}_z) = k \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

Finalement : $\frac{d \vec{A}}{dt} = k \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \vec{0} - k \dot{\theta} \vec{u}_\theta = \vec{0}$ et donc le vecteur est \vec{A} est constant.

Le terme $\vec{v} \wedge \vec{L}_o$ est un vecteur perpendiculaire à \vec{L}_o et est donc dans le plan du mouvement. Le vecteur suivant : $-k \vec{u}$ est aussi dans le plan du mouvement.

Le vecteur \vec{A} s'écrit comme une combinaison linéaire de deux vecteurs situés dans le plan du mouvement et donc ce vecteur est dans le plan du mouvement.

Choix axe Ox : $\vec{A} = A \vec{u}_x$

$$b) \vec{A} \cdot \vec{OM} = (\vec{v} \wedge \vec{L}_o - k \vec{u}) \cdot r \vec{u} = [(\dot{r} \vec{u} + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta) \wedge (mr^2 \dot{\theta} \vec{u}_z)] \cdot r \vec{u} - kr$$

$$\vec{A} \cdot \vec{OM} = [jmr^2 \dot{\theta} (\vec{u} \wedge \vec{u}_z) + mr^3 \dot{\theta}^2 (\vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_z)] \cdot r \vec{u} - kr$$

$$\vec{A} \cdot \vec{OM} = [jmr^2 \dot{\theta} (-\vec{u}_\theta) + mr^3 \dot{\theta}^2 (\vec{u})] \cdot r \vec{u} - kr = mr^4 \dot{\theta}^2 - kr = \frac{(mr^2 \dot{\theta})^2}{m} - kr$$

$$\vec{A} \cdot \vec{OM} = \frac{L_o^2}{m} - kr$$

$$c) \vec{A} \cdot \vec{OM} = A \vec{u}_x \cdot r \vec{u} = Ar \cos \theta$$

$$\text{d) On en déduit : } \vec{A} \cdot \vec{OM} = \frac{L_o^2}{m} - kr = Ar \cos \theta \Rightarrow \frac{L_o^2}{m} = (k + A \cos \theta)r$$

$$r = \frac{\frac{L_o^2}{m}}{k + A \cos \theta} = \frac{\frac{L_o^2}{m}}{k(1 + \frac{A}{k} \cos \theta)} = \frac{\frac{L_o^2}{km}}{1 + \frac{A}{k} \cos \theta} = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

La trajectoire de M est une conique de paramètre p et d'excentricité e .

$$\text{Le paramètre } p \text{ est : } p = \frac{L_o^2}{km} \text{ et l'excentricité } e \text{ est : } e = \frac{A}{k}$$

4) Relation entre énergie et excentricité

$$\text{a) L'énergie totale est : } E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } A^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} &= [(\vec{v} \wedge \vec{L}_o) - k\vec{u}] \cdot [(\vec{v} \wedge \vec{L}_o) - k\vec{u}] \\ &= (\vec{v} \wedge \vec{L}_o)^2 - 2k\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{L}_o) + k^2 \end{aligned}$$

Les vecteurs \vec{v} et \vec{L}_o sont orthogonaux et donc la norme du produit vectoriel est égal au produit des normes des vecteurs : $(\vec{v} \wedge \vec{L}_o)^2 = (vL_o)^2 = v^2L_o^2$

$$\begin{aligned} 2k\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{L}_o) &= 2k\vec{u} \cdot [(\dot{r}\vec{u} + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) \wedge L_o\vec{u}_z] \\ &= 2k\vec{u} \cdot [L_o\dot{r}(\vec{u} \wedge \vec{u}_z) + r\dot{\theta}L_o(\vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_z)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2k\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{L}_o) &= 2k\vec{u} \cdot [L_o\dot{r}(-\vec{u}_\theta) + r\dot{\theta}L_o(\vec{u})] = 2kr\dot{\theta}L_o = 2k\frac{m}{r}\frac{r^2}{m}\dot{\theta}L_o \\ &= \frac{2k}{mr}mr^2\dot{\theta}L_o = \frac{2k}{mr}L_o^2 \end{aligned}$$

$$A^2 = v^2L_o^2 - \frac{2k}{mr}L_o^2 + k^2 = k^2 \left[1 + \frac{v^2L_o^2}{k^2} - \frac{2L_o^2}{mkr} \right]$$

$$\text{c) } A^2 = k^2 \left[1 + \frac{v^2L_o^2}{k^2} - \frac{2L_o^2}{mkr} \right] \quad \text{et} \quad E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r} \Rightarrow \frac{2E}{m} = v^2 - \frac{2k}{mr}$$

$$A^2 = k^2 \left[1 + \frac{v^2L_o^2}{k^2} - \frac{2kL_o^2}{mk^2r} \right] = k^2 \left[1 + \frac{L_o^2}{k^2} \left(v^2 - \frac{2k}{mr} \right) \right] = k^2 \left[1 + \frac{2L_o^2}{mk^2} E \right]$$

On en déduit l'excentricité e en fonction de l'énergie E :

$$e = \frac{A}{k} \Rightarrow e^2 = \frac{A^2}{k^2} = 1 + \frac{2L_o^2}{mk^2} E$$

On retrouve la classification des coniques obtenues en fonction du signe de l'énergie :

- $E > 0$ alors $e > 1$: hyperbole
- $E = 0$ alors $e = 1$: parabole
- $E < 0$ alors $e < 1$: ellipse

EXERCICES CORRIGÉS

1 1^{ère} loi de Kepler (1610)

« Les planètes décrivent des trajectoires elliptiques dont le Soleil est un foyer ». On définit l'unité astronomique comme étant la distance Terre-Soleil (1 U.A. = 150 millions de km). La planète Mars a une trajectoire caractérisée par un demi-grand axe $a = 1,52$ U.A. et une excentricité $e = 0,093$.

- 1) Calculer la distance Mars-Soleil au *périhélie* (plus petite distance) et à l'*aphélie* (plus grande distance).
- 2) Quelle est la valeur du demi-petit axe b de la trajectoire de Mars ?

2 2^e loi de Kepler

« Les planètes parcourent sur leurs orbites des aires égales pendant des intervalles de temps égaux ». Cette loi permet de rendre compte du ralentissement zodiacal des astres. En effet, elle implique que la vitesse des planètes varie le long de leur trajectoire.

- 1) Donner l'expression générale de la vitesse d'une planète sur sa trajectoire.
- 2) Démontrer que la vitesse prend une forme particulière au périhélie et à l'aphélie.
- 3) Calculer l'aire parcourue par une planète entre les instants t et $t + dt$.
- 4) En utilisant la 2^e loi de Kepler, montrer que le produit $r\dot{\nu}$ est constant au périhélie et à l'aphélie. Déterminer le rapport de ces deux vitesses en fonction de l'excentricité e de la trajectoire. En déduire la vitesse la plus importante.
- 5) La comète de Halley se déplace à 56 km/s au périhélie se trouvant à 0,53 U.A. du Soleil. Calculer sa vitesse à l'aphélie situé à 35,1 U.A. En déduire l'excentricité de sa trajectoire.

3 3^e loi de Kepler

« Le carré de la période de révolution d'un astre est proportionnel au cube du grand axe ».

Les caractéristiques du mouvement de quelques planètes sont reportées dans le tableau 11.3.

- 1) Tracer $T = g(a)$ puis $T^2 = f(a^3)$. Conclusions ?
- 2) En déduire a (Mercure) et T (Vénus).

| Planète | a (U.A.) | T (an) | e |
|---------|------------|----------|-------|
| Mercure | ? | 0,24 | 0,206 |
| Vénus | 0,72 | ? | 0,007 |
| Terre | 1 | 1 | 0,017 |
| Mars | 1,52 | 1,88 | 0,055 |
| Jupiter | 5,2 | 11,86 | 0,093 |
| Saturne | 9,5 | 29,46 | 0,056 |

Tableau 10.3

4 **Orbite de Jupiter**

- 1) Quelle est la distance entre les deux foyers de l'orbite de Jupiter ?
- 2) Quelle est la distance Jupiter-Soleil à l'aphélie ?

5 **Première vitesse cosmique**

On désire mettre un satellite en orbite circulaire basse autour de la Terre à l'altitude de 130 km. À cette altitude, le satellite est en dehors des couches atmosphériques. Il n'est donc pas freiné.

- 1) Appliquer le principe fondamental de la dynamique au système satellite.
- 2) Déterminer la vitesse du satellite sur son orbite. Cette vitesse est appelée *première vitesse cosmique*.

6 **Satellite géostationnaire**

- 1) Déterminer l'altitude que l'on doit donner à un satellite pour qu'il soit en orbite géostationnaire autour de la Terre. Préciser la nature de sa trajectoire ainsi que le plan de son orbite. Déterminer la vitesse du satellite sur sa trajectoire.
- 2) Pour mettre en place un satellite géostationnaire, on le lance sur une *orbite de transfert* de périégée $r_p = 6\,600$ km et d'apogée le rayon de l'orbite géostationnaire. En déduire le demi-grand axe de cette orbite ainsi que la vitesse au périégée et à l'apogée. Que doit-on faire pour amener le satellite de l'orbite de transfert à l'orbite géostationnaire ?

7 **Vitesse de libération ou deuxième vitesse cosmique**

- 1) Rappeler l'expression de l'énergie effective d'un système.
- 2) Tracer sur un même graphe l'énergie potentielle, l'énergie effective et l'énergie $\mu C^2 / 2r^2$.
- 3) Que se passe-t-il si l'énergie effective est négative ? Commenter la forme de la trajectoire.
- 4) À quelle condition peut-on libérer un objet de l'attraction terrestre ?
- 5) Calculer la valeur de la vitesse de libération si l'on considère que l'on part d'une orbite de transfert à 220 km d'altitude.
A.N. : $R_T = 6378$ km, $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg, $\mathcal{G} = 6.67 \cdot 10^{-11}$ USI.

8 **Trajectoire elliptique**

Soit la courbe plane d'équation polaire : $r = \frac{p}{1+e \cos \theta}$ avec $p > 0$ et $0 < e < 1$.

- 1) À l'aide de coordonnées cartésiennes, montrer que cette courbe est une ellipse dont on calculera les demi-axes a et b en fonction du paramètre p et de l'excentricité e .

Dans la suite on supposera que le mouvement est elliptique.

- 2) Montrer que l'accélération radiale de ce mouvement est de la forme $a_r = -\frac{K}{r^2}$.

On retrouvera d'abord l'expression générale de a_r en fonction de r et de leurs dérivées temporelles dans le cas d'un mouvement plan quelconque, puis on posera pour le mouvement à force centrale $r^2 \dot{\theta} = C$.

- 3) Exprimer le paramètre p de l'ellipse en fonction des constantes K et C .

4) En utilisant l'aire de l'ellipse, établir la relation entre la période T du mouvement et le demi-grand axe a de l'orbite.

5) A.N. : sachant que la constante K est la même pour toutes les planètes du système solaire, calculer le demi-grand axe a des orbites de Pluton, Jupiter et Mercure. On donne :

| Planètes | T | a |
|----------|-----------|---------------------|
| Terre | 365 jours | $150 \cdot 10^6$ km |
| Mercure | 88 jours | |
| Jupiter | 11,8 ans | |
| Pluton | 248,4 ans | |

9 Satellite freiné

1) Un satellite de la Terre, de masse m , est placé sur une orbite elliptique. Écrire l'expression de son énergie mécanique en fonction de sa vitesse v et de sa coordonnée radiale r .

2) Montrer que les coordonnées radiales r_A et r_B de l'apogée et du périégée sont racines d'une équation du second degré dont les coefficients s'expriment en fonction de l'énergie mécanique et de la constante des aires.

3) En déduire l'expression de l'énergie mécanique en fonction du demi-grand axe a de l'ellipse et établir la relation

$$v^2 = g_0 R^2 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

4) Le satellite est initialement situé sur une orbite circulaire de rayon r_0 . Déterminer sa vitesse v_0 .

5) À son passage par un point A de l'orbite, on exerce sur le satellite dans la direction de son vecteur vitesse et de façon quasi instantanée, une force qui le ralentit.

Déterminer la vitesse v_1 qu'il doit prendre pour atteindre la Terre en un point P tel que $\widehat{AOP} = \frac{\pi}{2}$ (O désigne le centre de la Terre).

6) Calculer la variation d'énergie cinétique subie par le satellite.

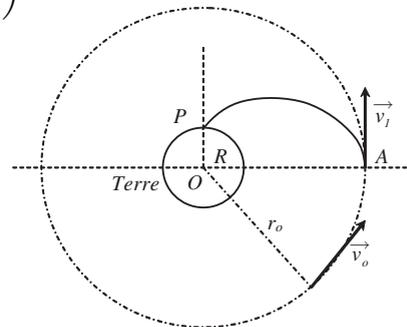


Figure 10.12

10 Satellite

Un satellite est lancé à la distance r_0 du centre de la Terre avec une vitesse v_0 .

1) À quelle condition se met-il sur une trajectoire elliptique ayant pour foyer le centre de la Terre ?

2) À quelle condition le point de lancement est-il le périégée ? À quelle condition est-il l'apogée ?

3) À quelle condition l'ellipse ne recoupe-t-elle pas la Terre ?

11 Orbite de transfert

On veut faire passer un satellite de l'orbite circulaire C_1 de rayon $R_1 = 7\,000$ km à l'orbite C_2 de rayon $R_2 = 7\,400$ km. Pour cela il faut provoquer la mise à feu, au point M_1 , de fusées permettant de modifier légèrement le module de la vitesse, sans changer sa direction ni son sens, ceci en un temps très court devant la période de rotation. La vitesse V'_1 est inférieure à la vitesse de libération du point M_1 .

1) Quelle est la nouvelle orbite du satellite : orbite de transfert ou d'échange (E) ?

2) On se propose de déterminer V'_1 de façon que la nouvelle orbite passe par le point M_2 (figure 10.13). Montrer que l'orbite (E) sera tangente en M_2 au cercle (C_2) de rayon R_2 . Quelle sera la période T_E de l'orbite d'échange ?

3) Soit V'_2 la vitesse du satellite en M_2 sur (E). En utilisant l'énergie mécanique et la constante des aires, déterminer les expressions des vitesses V'_1 et V'_2 . Les calculer numériquement.

4) Au point M_2 , on accélère à nouveau le satellite pour le placer sur une orbite circulaire (C_2). Sa vitesse passe alors de V'_2 à V_2 , sans changement de direction où de sens. Calculer V_2 et la variation totale d'énergie cinétique due aux deux accélérations, celle subie en M_1 et celle subie en M_2 . Comparer cette variation à $E_2 - E_1$. Expliquer ce résultat. Calculer le travail fourni par les moteurs des fusées pour réaliser le changement d'orbite.

A.N. : $R_T = 6\,378$ km, $M_T = 6.10^{24}$ kg, $\mathcal{G} = 6,67.10^{-11}$ USI.

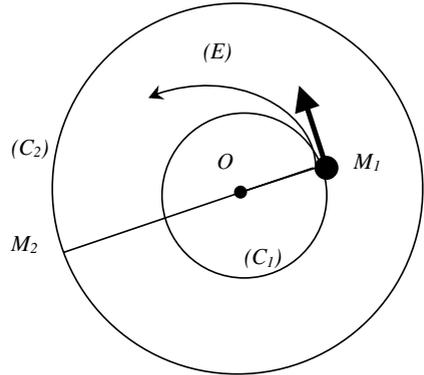


Figure 10.13

Solutions

1) Soit P le périhélie de la trajectoire et A l'aphélie. Si F est le foyer (position du Soleil autour duquel tournent les planètes) alors (figure 11.8) : $FA + FP = 2a$.

Si l'on reprend l'équation polaire de l'ellipse, nous savons que : $r(\theta) = \frac{p}{1+e \cos \theta}$.

Au périhélie (figure 11.8) nous avons $\theta = 0$, d'où $r_p = FP = p/(1+e)$ et à l'aphélie $\theta = \pi$, soit $r_A = FA = p/(1-e)$. Il s'ensuit que $2a = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = \frac{2p}{1-e^2}$, ce qui conduit à $r_A = FA = a(1+e)$ et $r_p = FP = a(1-e)$, d'où $r_A = 1,6614$ U.A., $r_p = 1,3786$ U.A.

2) Le demi-petit axe b est donné par (figure 11.8) $b^2 = a^2(1-e^2)$, soit $b = 1,5134$ U.A.

2) 1) La vitesse d'une planète est donnée par $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$.

2) Au périhélie et à l'aphélie r par un extrémum ce qui impose $\dot{r} = 0$; on a donc dans ces deux positions : $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$.

3) L'aire parcourue par la planète entre deux instants t et $t + dt$ est donnée par : $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}C$.

Cette quantité est constante en vertu de la conservation du moment cinétique. Ceci constitue la deuxième loi de Kepler. C est appelée la constante des aires.

4) Il est facile de voir qu'à l'aphélie et à l'périhélie : $v_P = r_P \dot{\theta}_P$ et $v_A = r_A \dot{\theta}_A$.

En utilisant le résultat de la question 3, il est facile de voir que $v_P r_P = v_A r_A = C$.

Le rapport des deux vitesses est donc (voir exercice 1) $\frac{v_P}{v_A} = \frac{r_A}{r_P} = \frac{1+e}{1-e}$.

Il s'ensuit que la vitesse la plus élevée est celle du périhélie. Plus la planète est éloignée et plus elle se déplace vite.

5) Sa vitesse à l'aphélie est $v_A = 0,8456 \text{ km.s}^{-1}$. L'excentricité de la trajectoire est $e = 0,97$.

3 1) Voir la figure 10.14.

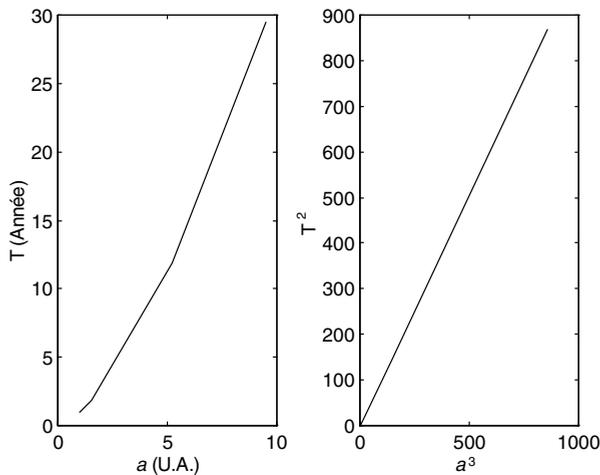


Figure 10.14

Nous voyons que le carré de la période est proportionnel au cube du grand axe a . De plus, dans le système d'unité choisi (T en années et a en U.A.), la pente de la droite $T^2 = f(a^3)$ est égale à 1 et l'on a donc $T^2 = a^3$.

2) La remarque précédente conduit à $a^3(\text{Mercure}) = 0,24^2 \implies a(\text{Mercure}) = 0,0192 \text{ U.A.}$
 $T^2(\text{Vénus}) = 0,72^3 \implies T = 0,1866 \text{ an.}$

4 **Orbite de Jupiter**

1) La distance entre les deux foyers de l'orbite de Jupiter est $2OG = 2c = 2ae = 0,9672 \text{ U.A.}$

2) À l'aphélie nous avons vu (exercice 1) que $r_A = a(1 + e) = 5,6836 \text{ U.A.}$

5 **Première vitesse cosmique**

1) Il s'agit d'une orbite circulaire ; donc la vitesse du satellite est de norme constante. Dans la base de Frenet \vec{e}_t, \vec{e}_n relative au référentiel géocentrique considéré comme galiléen, le principe fondamental de la dynamique appliqué au système satellite conduit à :

$$m \vec{a}_{S/R} = m \frac{dv}{dt} \vec{e}_t + m \frac{v^2}{r} \vec{e}_n = \mathcal{G} \frac{mM_T}{r^2} \vec{e}_n.$$

2) On en déduit que : $\frac{dv}{dt} = 0 \implies v = \text{cste}$, et que $m\frac{v^2}{r} = \mathcal{G}\frac{mM_T}{r^2} \implies v^2 = \mathcal{G}\frac{M_T}{r}$.

A.N. : $\mathcal{G} = 66,67 \cdot 10^{-11}$ USI, $r = (6378 + 130)$ km, $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg $\implies v = 7,8$ km.s⁻¹.

6 Satellite géostationnaire

1) Pour qu'un satellite soit géostationnaire il faut qu'il reste fixe par rapport à un point particulier de la Terre. Il faut donc qu'il ait un mouvement circulaire uniforme et que sa période de révolution soit égale à la période de rotation de la Terre. De plus pour qu'il reste constamment en regard d'un point de la Terre il faut qu'il se trouve dans le plan équatorial. En utilisant le résultat de l'exercice précédent on voit que :

$$v^2 = r^2 \omega^2 = r^2 \frac{4\pi^2}{T^2} = \mathcal{G}\frac{M_T}{r} \implies r^3 = \mathcal{G}\frac{M_T}{4\pi^2} T^2.$$

On trouve une valeur de $r = 42\,223$ km, soit une altitude de 35 823 km. Nous en déduisons aussi que : $v = 42\,223 \times 7 \cdot 10^{-5} = 3,07$ km.s⁻¹.

2) Nous avons donc $r_P = 6\,600$ km et $r_A = 42\,223$ km soit $r_P + r_A = 48\,823$ km = $2a$. Le demi-grand axe vaut donc $a = 24\,411$ km. Nous avons vu à l'exercice 2 que $v_P r_P = v_A r_A = C$.

Nous savons aussi que la conservation du moment cinétique impose que $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} C \implies \frac{2\pi ab}{T_t} = C$, avec T_t période de l'orbite de transfert. Rappelons que l'aire d'une ellipse est égale à πab . Nous voyons donc que $v_P = \frac{2\pi ab}{T_t r_P}$.

Or nous savons d'après la troisième loi de Kepler que : $T_t^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\mathcal{G}M_T}$, d'où :

$$v_P = \frac{2\pi ab}{\sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{\mathcal{G}M_T} r_P}} = \frac{ab}{\sqrt{\frac{a^3}{\mathcal{G}M_T} a(1-e)}}$$

et comme $b = a\sqrt{1-e^2}$ nous concluons que :

$$v_P = \frac{\sqrt{a^2(1-e^2)}}{\sqrt{\frac{a^3}{\mathcal{G}M_T}(1-e)}} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T(1+e)}{a(1-e)}} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_{T r_A}}{a r_P}} = 10,48 \text{ km.s}^{-1}.$$

Nous en déduisons que $v_A = 10,48 \times 6\,600 / 42\,223 = 1,638$ km.s⁻¹. Pour l'amener de l'orbite de transfert à l'orbite circulaire il faut lui communiquer de l'énergie car la vitesse du satellite à l'apogée est trop faible par rapport à celle qui correspond à l'orbite circulaire.

7 Vitesse de libération ou 2^e vitesse cosmique

1) L'énergie effective d'un système est : $E_{\text{eff}} = \mu \frac{C^2}{2v^2} - \mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r}$, avec $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

2) Voir la figure 9.11

3) Si l'énergie effective est négative, le système est lié. L'objet de masse la plus petite ne peut pas quitter l'attraction de l'autre objet. On dit qu'il est enfermé dans un puits de potentiel.

4) La libération se produit quand $E = 0$.

5) Pour libérer un objet de masse m de l'attraction de la Terre, il faut lui communiquer une vitesse v qui vérifie

$$\frac{1}{2} m v^2 - \mathcal{G}\frac{m M_T}{r} = 0 \implies v = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_T}{r}} = 11 \text{ km.s}^{-1} \quad (10.8)$$

8 Trajectoire elliptique

1) Nous voyons que : $r + r e \cos \theta = p \implies y^2 + x^2(1 - e^2) + 2pe = p^2$

$$\frac{y^2}{1 - e^2} + x^2 + 2x \frac{pe}{1 - e^2} + \left(\frac{pe}{1 - e^2} \right)^2 = \left(\frac{pe}{1 - e^2} \right)^2 + \frac{p^2}{1 - e^2}$$

$$\frac{y^2}{1 - e^2} + \left(x + \frac{pe}{1 - e^2} \right)^2 = \frac{p^2}{(1 - e^2)^2}$$

soit
$$\left(\frac{y\sqrt{1 - e^2}}{p} \right)^2 + \left(\frac{1 - e^2}{p} x + e \right)^2 = 1.$$

L'équation d'une ellipse de centre $(x_0, 0)$, de petit axe b et de grand axe a est $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Il s'ensuit que $a = p/(1 - e^2)$, $b = p/\sqrt{1 - e^2}$, $x_0 = -ea = -ep/(1 - e^2)$.

2) Dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$, le vecteur accélération s'écrit $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2, 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}, 0)$.

Sa composante radiale est donc $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$. Le mouvement étant à force centrale, nous avons $r^2\dot{\theta} = C \implies \frac{d^2\dot{\theta}}{dt^2} = 0 = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$. Il n'y a donc pas d'accélération orthoradiale. Si l'on applique le principe fondamental de la dynamique on voit que $ma_r = -\mathcal{G}mM/r^2 \implies a_r = -\frac{K}{r^2}$ avec $K = \mathcal{G}M$.

3) $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{K}{r^2}$, $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$ et $C = r^2\dot{\theta}$. Nous avons $r\dot{\theta}^2 = \frac{C^2}{r^3}$. Il reste exprimer \dot{r} . On a $\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta}$ soit $\dot{r} = \frac{ep \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2}\dot{\theta} = \frac{e}{p}r^2 \sin \theta \frac{C}{r^2} = \frac{eC}{p} \sin \theta$. On a ensuite $\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{eC}{p} \cos \theta \frac{C}{r^2} = \frac{eC^3}{pr^2} \cos \theta$. L'expression de l'accélération radiale donne $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{eC^2}{pr^2} \cos \theta - \frac{C^2}{r^3} = \frac{C^2}{r^2} \left(\frac{e \cos \theta}{p} - \frac{1 + e \cos \theta}{p} \right) = -\frac{C^2}{pr^2} = -\frac{K}{r^2} \implies p = \frac{C^2}{K} = \frac{C^2}{\mathcal{G}M}$

4) La loi des aires conduit à $\frac{2\pi ab}{T} = C$. Or $b = a\sqrt{1 - e^2}$.

9) 1) $E = \frac{1}{2}mv^2 - \mathcal{G}\frac{mM_T}{r}$.

2) À l'apogée (A) et au périhélie (B) nous avons $v_A r_A = v_B r_B = C$ (voir exercice 2). On en déduit que

$$E = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r_A^2} - \mathcal{G}\frac{mM_T}{r_A} \implies r_A^2 + \mathcal{G}\frac{mM_T}{E}r_A - \frac{1}{2}m\frac{C^2}{E} = 0.$$

3) La somme des racines de cette équation, qui est vérifiée pour r_A et r_B , est

$$r_A + r_B = 2a = -\mathcal{G}\frac{mM_T}{E} \implies E = -\mathcal{G}\frac{mM_T}{2a}.$$

Comme $g_0 R_T^2 = \mathcal{G}M_T$ il s'ensuit que :

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{g_0 R_T^2}{r} = -\frac{g_0 R_T^2}{2a} \implies v^2 = g_0 R_T^2 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

4) Si l'orbite est circulaire alors $a = r = r_0$ d'où $v_0^2 = \frac{g_0 R_T^2}{r_0}$ et $Ec = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{mg_0 R_T^2}{2r_0}$.

5) Pour que le satellite arrive sur la Terre au point P il faut que son orbite soit elliptique. Au point P l'équation paramétrée de l'ellipse conduit à : $r(\theta = \pi/2) = R_T = \frac{p}{1 + e \cos \theta} = p$.

Or le paramètre p de l'ellipse vérifie $p = \frac{C^2}{\mathcal{G}(m+M_T)} \simeq \frac{C^2}{\mathcal{G}M_T} = \frac{C^2}{g_0 R_T^2} \implies C^2 = g_0 R_T^3$.

À l'apogée, c'est-à-dire au point A de cette trajectoire elliptique, nous avons $r_1 v_1 = C$ et par hypothèse $r_1 = r_0$ donc $v_1 = \frac{C}{r_0} = \frac{1}{r_0} \sqrt{g_0 R_T^3} \Rightarrow v_1^2 = \frac{R_T}{r_0} v_0^2$.

6) La variation d'énergie cinétique est

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_0^2) = \frac{1}{2} m v_0^2 \left(\frac{R_T}{r_0} - 1 \right) = \frac{m g_0 R_T^2}{2 r_0} \left(\frac{R_T}{r_0} - 1 \right)$$

10 1) La trajectoire est elliptique si l'énergie mécanique est négative, soit :

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 - \mathcal{G} \frac{m M_T}{r_0} < 0 \implies v_0^2 < 2 \mathcal{G} \frac{M_T}{r_0}.$$

2) Le point de lancement est le périhélie si v_0 est perpendiculaire à r_0 et si r_0 est minimum.

Le point de lancement est l'apogée si v_0 est perpendiculaire à r_0 et si r_0 est maximum.

3) L'ellipse ne recoupe pas la Terre si $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} > R_T$.

11 Orbite de transfert

1) La nouvelle orbite est elliptique.

2) En M_1 la vitesse v'_1 tangente à la trajectoire est perpendiculaire à OM_1 ; donc ce point est le périhélie. Le point M_2 diamétralement opposé est donc l'apogée. En cette position, la vitesse est de nouveau perpendiculaire à OM_2 donc l'orbite (E) est bien tangente en M_2 au cercle (C_2). Le grand axe de l'ellipse est égal à $2a = R_1 + R_2$. On en conclut que $a = \frac{R_1 + R_2}{2} = 7\,200$ km et $T_E^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\mathcal{G} M_T} \simeq 1$ h 40 min.

3) La vitesse v'_1 est donnée par la conservation de l'énergie

$$E = \frac{1}{2} m v_1'^2 - \mathcal{G} \frac{m M_T}{R_1} = -\mathcal{G} \frac{m M_T}{2a} \implies v_1'^2 = 2 \mathcal{G} \frac{M_T}{R_1} - \mathcal{G} \frac{M_T}{a} \simeq 7,79 \text{ km.s}^{-1}.$$

Il est clair que la vitesse v'_2 doit satisfaire $v'_2 R_2 = v'_1 R_1 = C \implies v'_2 = v'_1 \frac{R_1}{R_2} \simeq 7,371 \text{ km.s}^{-1}$.

4) Sur une orbite circulaire de rayon R_2 , la vitesse vérifie (application du PFD) $v_2 = \sqrt{\mathcal{G} \frac{M_T}{R_2}}$ et l'énergie est $E_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 - \mathcal{G} \frac{m M_T}{R_2} = -\mathcal{G} \frac{m M_T}{2R_2}$.

La variation d'énergie cinétique s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta E_c &= \frac{1}{2} m v_1'^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_2'^2 \\ &= \left(\mathcal{G} \frac{m M_T}{R_1} - \mathcal{G} \frac{m M_T}{2a} \right) - \mathcal{G} \frac{m M_T}{2R_1} + \mathcal{G} \frac{m M_T}{2R_2} - \left(\mathcal{G} \frac{m M_T}{R_2} - \mathcal{G} \frac{m M_T}{2a} \right). \end{aligned}$$

$$\Delta E_c = \mathcal{G} \frac{m M_T}{2R_1} - \mathcal{G} \frac{m M_T}{2R_2}. \quad E_2 - E_1 = \mathcal{G} \frac{m M_T}{2R_1} - \mathcal{G} \frac{m M_T}{2R_2} = \Delta E_c.$$

La variation d'énergie cinétique correspond au travail des moteurs.

Le travail des moteurs s'effectue sans changement d'énergie potentielle. On retrouve donc le fait que la variation d'énergie mécanique correspond à la variation d'énergie cinétique.

ANNEXE 1

RAPPEL DES OUTILS MATHÉMATIQUES

1. SCALAIRES ET VECTEURS

Il est important de noter qu'une quantité physique peut se présenter sous les deux natures différentes que sont les **scalaires** et les **vecteurs**.

Une quantité scalaire¹ est généralement un nombre affecté d'une unité comme par exemple la résistance d'un résistor, la température ou la pression en un point de l'espace. Alors que pour un résistor la donnée d'un seul nombre suffit à caractériser la valeur de la résistance, d'autres grandeurs physiques dont la valeur change avec par exemple la position dans l'espace ne pourront pas être caractérisées par un seul nombre. Ce type de grandeur fait appel à la notion plus générale de **champ** de scalaires. Le champ, contrairement au scalaire lui-même, n'est plus défini par un seul nombre mais par une infinité de nombres qui représentent l'évolution de la quantité scalaire dans l'espace. Les exemples de champs de scalaires sont très nombreux comme le potentiel en électrostatique, la pression dans un fluide, la densité dans un solide inhomogène... Un champ de scalaires peut éventuellement se matérialiser par une forme analytique lorsque les causes qui le produisent ont une symétrie suffisamment grande pour en permettre le calcul. Un exemple simple est le potentiel électrostatique $V(x, y)$ créé dans un plan par une charge ponctuelle q donné par :

$$V(x, y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(x^2 + y^2)^{1/2}}.$$

Le potentiel ainsi défini varie dans le plan et peut être calculé en tous points (sauf à l'origine). Le potentiel est donc un champ de scalaires qui peut être représenté dans l'espace. À tout point $M(x, y)$ du plan, on associe la cote $z = V(x, y)$. L'ensemble des points de coordonnées $(x, y, z = V(x, y))$ définit une surface dans l'espace. La figure A1.1 en donne une représentation qui illustre également la symétrie de révolution de ce champ de scalaires.

Les quantités vectorielles diffèrent des quantités scalaires par le fait qu'elles ne peuvent être définies que si l'on prend soin de préciser la direction, le sens, le point d'application et l'intensité de leur action. Par définition, un vecteur est un bipoint orienté dont la longueur correspond à l'intensité de la quantité vectorielle ainsi représentée. On peut citer bon nombre de grandeurs physiques vectorielles telles que la vitesse, les forces, le champ électrique et le champ magnétique. La figure A1.2 donne la représentation d'une force de poussée sur un objet. On voit que le vecteur force est caractérisé par une direction qui représente la **droite d'action de la force**, un sens, un point d'application et une intensité schématisée par la longueur du vecteur force.

1. Nous conseillons, en complément à nos lecteurs, l'ouvrage : *Mathématiques pour la physique*, Y. Noïrot, J.-P. Parisot et N. Brouillet. Dunod, 1997.

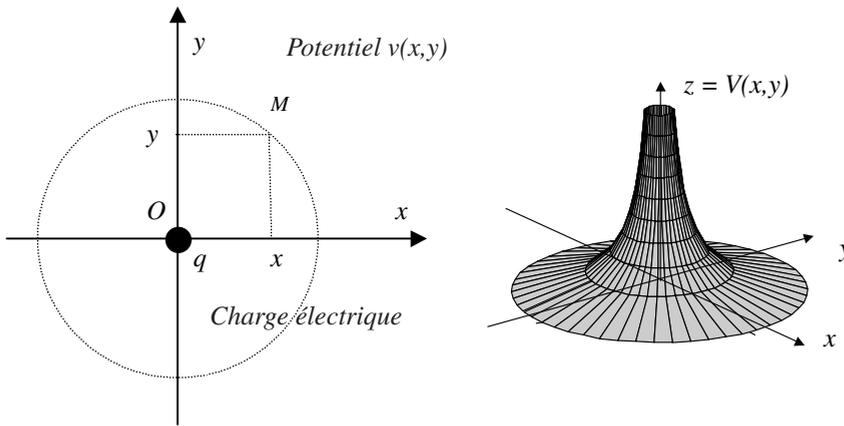


Figure A1.1 • Potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle.

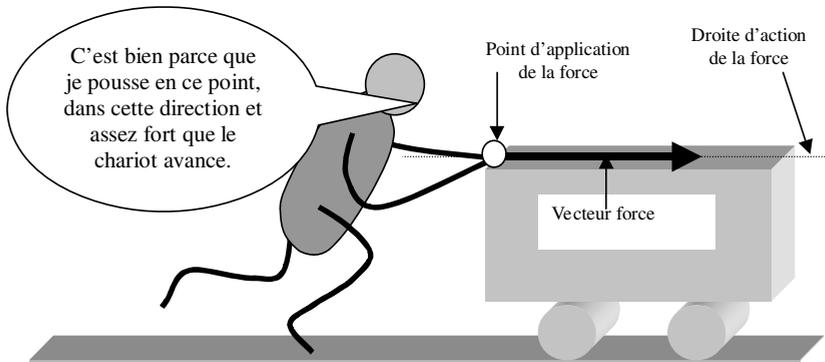


Figure A1.2 • Illustration du caractère vectoriel de la force.

Il convient de noter que le point d'application du vecteur peut revêtir une importance capitale dans certains cas comme dans celui où un système est en rotation autour d'un axe fixe.

Il est clair dans l'exemple de la figure A1.3 que les forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 , qui sont égales, n'ont pas la même action sur le solide, essentiellement parce qu'elles diffèrent par la position de leur point d'application. Hormis le problème important de la rotation, il faut remarquer que lorsqu'un système est soumis à plusieurs forces il est toujours possible de ramener toutes les forces à la même origine pour en déterminer la **résultante**. Un exemple est proposé sur la figure A1.4 où l'on voit que les forces agissant sur un objet cubique peuvent être ramenées en un point G unique de façon à permettre la construction de la somme vectorielle.

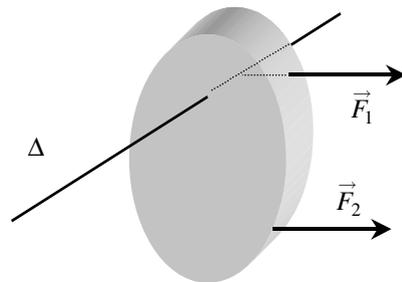


Figure A1.3 • Effets de la position du point d'application des forces sur la rotation d'un solide; la force \vec{F}_1 est sans action sur la rotation alors que la force \vec{F}_2 favorise la rotation dans le sens trigonométrique.

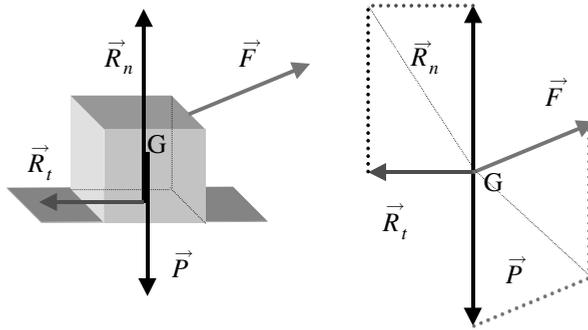


Figure A1.4 • Résultante des forces appliquées à un solide.
Pour déterminer la résultante des forces on ramène le point d'application de toutes les forces en un seul point. Nous avons choisi ici le point G.

En mécanique, les vecteurs sont toujours définis en un point précis de l'espace et sont représentés généralement par un vecteur unique. Cependant il existe d'autres situations pour lesquelles la quantité physique vectorielle varie d'un point à un autre de l'espace : on parle alors de **champ de vecteurs**. Des exemples courants de champs de vecteurs sont le champ électrique, le champ magnétique et le champ de gravitation, mais on peut aussi imaginer le champ de vitesses dans un fluide en mouvement (figure A1.5), etc. Ces champs vectoriels peuvent être aléatoires mais aussi déterminés par une expression analytique qui définira leur valeur en tous points.

Le champ de gravitation à la surface de la Terre est un bon exemple de champ de vecteurs dont la représentation peut être définie par une expression analytique qui découle de la loi de Newton. En tout point P de l'espace distant de SP du centre S de la Terre, le champ de gravitation est donné par

$$\vec{G}(P) = -\mathcal{G} \frac{M_T \vec{SP}}{SP^3}$$

Comme l'indique la figure A1.6, ce champ est radial et centripète (dirigé vers le centre de la Terre). Sa norme est constante à la surface de toute sphère de rayon SP .

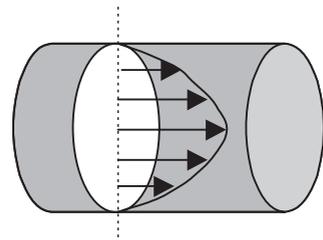


Figure A1.5 • Champ de répartition des vitesses dans un fluide en écoulement dans un tuyau.

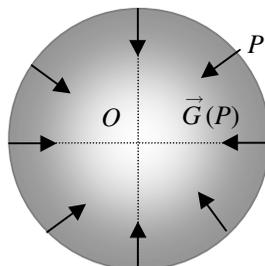


Figure A1.6 • Champ de gravitation à la surface de la Terre.

2. COMPOSANTES D'UN VECTEUR

2.1. Repère

Dans de nombreux problèmes, il importe de préciser l'orientation d'un vecteur par rapport à une référence arbitrairement choisie. Les directions de référence, ou axes du système de référence, permettront de qualifier l'orientation du vecteur par rapport à ce système. Le système de référence que l'on choisit est appelé **repère**. Il est constitué d'un système d'axes et d'une origine. Dans l'espace physique, l'un des repères les plus utilisés est le repère **cartésien**. Il est formé d'une origine O et de trois axes x, y et z . Dans le repère choisi, on se définit ensuite une base. En physique, nous utiliserons exclusivement une base orthonormée, c'est-à-dire une base dans laquelle les trois vecteurs de base sont orthogonaux entre eux et unitaires.

La position de la base dans le référentiel définit le système de coordonnées du point dans le référentiel. Un système de coordonnées très utilisé est le système de coordonnées cartésiennes. Il en existe d'autres, comme le système de coordonnées polaires ou sphériques.

2.2. Coordonnées cartésiennes

Dans le système de coordonnées cartésiennes présenté sur la figure A1.7, la direction des vecteurs de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ du repère (O, x, y, z) est confondue avec celle des axes du repère. Les vecteurs sont orthonormés, c'est-à-dire orthogonaux entre eux et unitaires (la longueur du vecteur est égale à 1). Tout point M dans l'espace est défini par ses trois coordonnées (x, y, z) et on lui associe un vecteur $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ représenté symboliquement par ses composantes (x, y, z) .

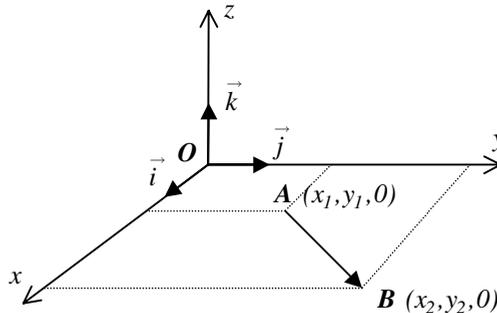


Figure A1.7 • Représentation du système de coordonnées cartésiennes.

Si les points A et B sont contenus dans le plan xOy , les vecteurs position des points $A(x_1, y_1, 0)$ et $B(x_2, y_2, 0)$, notés \vec{OA} et \vec{OB} , vérifient :

$$\vec{OA} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} \quad \vec{OB} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}$$

ce qui permet en utilisant la relation de Chasles de définir le vecteur \vec{AB} :

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1) \vec{i} + (y_2 - y_1) \vec{j}$$

La méthode précédente est généralisable à trois dimensions et un vecteur quelconque de l'espace pourra toujours s'écrire : $\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Par définition de la norme, sa longueur est donnée par :

$$\|\vec{V}\| = V = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

2.3. Coordonnées cylindriques ou polaires

En coordonnées cylindriques on utilise une base que l'on notera $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{k})$. Cette base est utilisée dans tous les problèmes où la symétrie est de révolution autour d'un axe que l'on fixe arbitrairement comme étant l'axe z . Le vocable « coordonnées polaires » est réservé au problème plan $z = 0$. La base est repérée par rapport au repère (O, x, y, z) par l'angle θ que fait le vecteur \vec{u}_ρ avec l'axe des x .

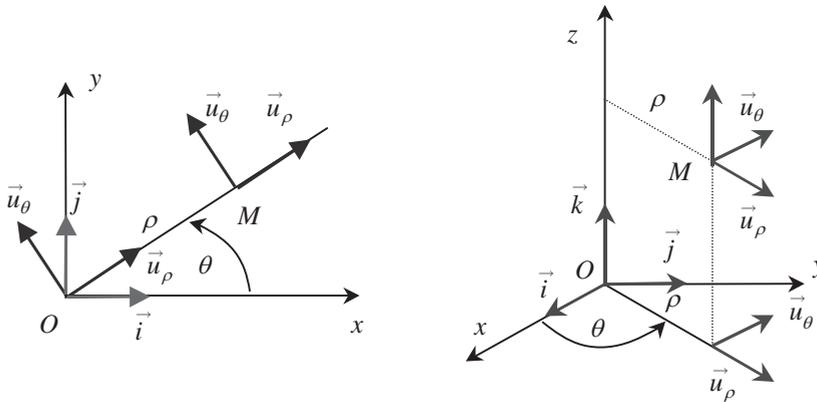


Figure A1.8 • Représentation du système de coordonnées polaires (à gauche) et de coordonnées cylindriques (à droite).

Le vecteur \vec{OM} s'écrit dans la base polaire : $\vec{OM} = \rho \vec{u}_\rho \implies OM = \rho$.

Il est repéré par deux coordonnées de position qui sont ρ et θ . Dans la base cylindrique, ce vecteur s'écrit : $\vec{OM} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{k} \implies OM = \sqrt{\rho^2 + z^2}$.

Il est repéré par trois coordonnées de positions qui sont ρ , θ et z .

2.4. Coordonnées sphériques

Ce système de coordonnées, illustré sur la figure A1.9, est très utile dans tous les problèmes à symétrie sphérique dont un bon exemple est le repérage d'un point à la surface de la Terre.

Le vecteur \vec{OM} est un vecteur radial. Il peut s'exprimer en fonction du vecteur unitaire radial \vec{u}_r qui lui est colinéaire : $\vec{OM} = r \vec{u}_r$, et la base locale sphérique associée à la position du point M est formée des trois vecteurs unitaires $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$. Ces trois vecteurs unitaires sont associés de façon à former une base orthonormée directe. Nous noterons que ces vecteurs dépendent de la position du point M et donc varient d'un point à l'autre de l'espace. Seule leur norme reste constante puisqu'ils sont unitaires. Le point M est repéré dans ce système de coordonnées par trois coordonnées de positions qui sont r , θ et φ .

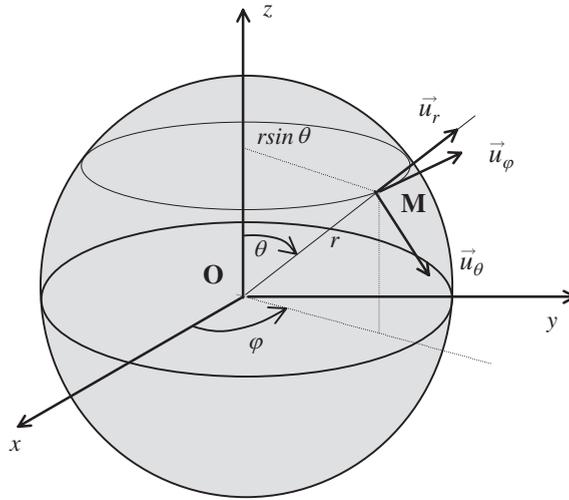


Figure A1.9 • Illustration des grandeurs utilisées dans le système de coordonnées sphériques.

3. PRODUIT SCALAIRE

3.1. Définition

Soit deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} faisant un angle α entre eux ; on appelle **produit scalaire** de \vec{a} par \vec{b} la quantité scalaire définie par :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos(\alpha)$$

Lorsque l'un des deux vecteurs du produit scalaire est un vecteur unitaire, le produit scalaire est alors la projection du vecteur sur la direction du vecteur unitaire, c'est-à-dire la composante de ce vecteur dans cette direction.

Le produit scalaire est une grandeur positive, négative ou nulle selon la valeur de l'angle α entre les deux vecteurs qui forment le produit.

Le calcul du produit scalaire peut se faire à partir des composantes des deux vecteurs. En effet nous avons :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \cdot (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

On utilise aussi la notation suivante en vecteur colonne :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

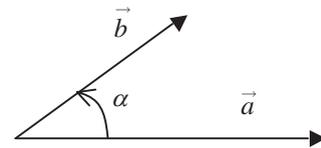


Figure A1.10 • Produit scalaire de deux vecteurs.

3.2. Propriétés

a) Condition de nullité

Le produit scalaire de deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} est nul si et seulement si :

- l'un des vecteurs est nul ;
- les deux vecteurs sont perpendiculaires entre eux.

b) Relation avec la norme

La norme d'un vecteur est égale à la racine carrée de l'autoproduit scalaire.

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

c) Angle entre deux vecteurs

Par définition, l'angle formé entre deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} est donné par :

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab}$$

Ainsi, le cosinus de l'angle entre les deux vecteurs $\vec{a}(1,2,0)$ et $\vec{b}(3,-2,1)$ est donné par

$$\cos(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{70}}$$

3.3. Applications

a) Identité d'Alcachi : longueur d'un côté d'un triangle

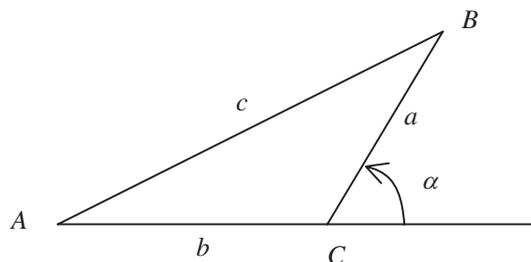


Figure A1.11 • Notations utilisées dans un triangle quelconque ABC.

Il est possible de calculer la longueur du côté AB à partir du produit scalaire de \vec{AB} par lui-même.

$$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$$

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 + 2\vec{AC} \cdot \vec{CB}$$

$$c^2 = b^2 + a^2 + 2bc \cos \alpha$$

b) Travail d'une force constante

Par définition on appelle travail de la force \vec{F} constante sur le déplacement AB rectiligne, la quantité :

$$W_{F_{A \rightarrow B}} = \vec{F} \cdot \vec{AB}$$

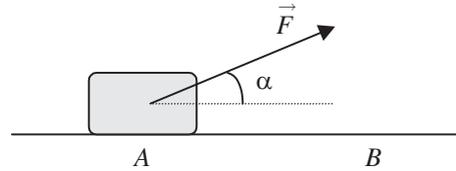


Figure A1.12 • Travail d'une force.

4. PRODUIT VECTORIEL

4.1. Définition

On appelle **produit vectoriel** de \vec{a} par \vec{b} le **vecteur** \vec{c} noté :

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$$

dont la direction est perpendiculaire à \vec{a} et à \vec{b} , le sens est donné par la règle du tire-bouchon et la norme, en désignant par α l'angle entre \vec{a} et \vec{b} , par :

$$c = ab \sin \alpha$$

La règle du tire-bouchon consiste à placer un tire-bouchon perpendiculairement au plan formé par les vecteurs \vec{a} et \vec{b} , puis à tourner le tire bouchon dans le sens correspondant à celui qu'impose le produit vectoriel (de \vec{a} vers \vec{b} s'il s'agit du produit vectoriel $\vec{a} \wedge \vec{b}$). Le sens du produit vectoriel est alors donné par le sens de déplacement du tire bouchon (figure A1.13).

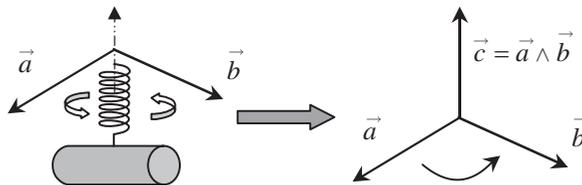


Figure A1.13 • Détermination du sens du produit vectoriel en utilisant la règle du tire-bouchon.

Nous constatons que les vecteurs $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ forment un trièdre direct comme les vecteurs $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dans une base orthonormée directe.

4.2. Propriétés

a) Anticommutativité

Le produit vectoriel change de signe lorsque l'on intervertit les vecteurs. Cette propriété est appelée anticommutativité.

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$$

b) Condition de nullité

Le produit vectoriel de deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} est nul si et seulement si :

- l'un des deux vecteurs est nul ;
- les vecteurs \vec{a} et \vec{b} ont même direction.

c) Double produit vectoriel

Nous donnons sans démonstration l'expression du double produit vectoriel :

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

d) Signification géométrique du produit vectoriel

Considérons deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} faisant un angle α entre eux :

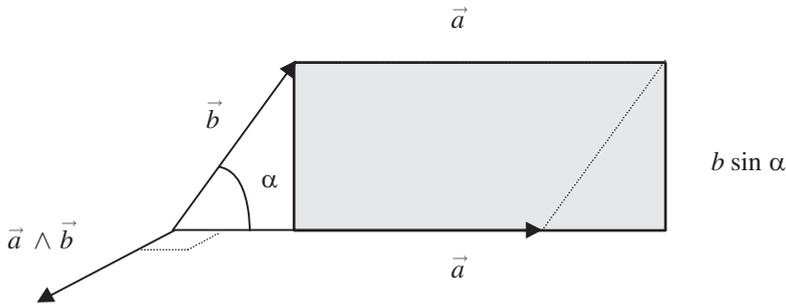


Figure A1.14 • Représentation géométrique de la surface correspondant au produit vectoriel.

La norme du produit vectoriel est égale à $c = ab \sin \alpha$.

C'est la surface grisée du rectangle de la figure A1.14. Cette surface correspond de toute évidence à la surface du parallélogramme défini par les vecteurs \vec{a} et \vec{b} . En outre, le produit vectoriel représente le *vecteur surface orienté* perpendiculairement à la surface définie par \vec{a} et \vec{b} .

4.3. Méthode de calcul

Considérons deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} dont les composantes sont données par :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Le produit vectoriel de \vec{a} et \vec{b} peut s'exprimer en fonction des composantes de \vec{a} et de \vec{b} par :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \wedge (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k})$$

soit

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \left\{ \begin{array}{l} x_1 y_2 \vec{i} \wedge \vec{j} + y_1 x_2 \vec{j} \wedge \vec{i} \\ + x_1 z_2 \vec{i} \wedge \vec{k} + z_1 x_2 \vec{k} \wedge \vec{i} \\ + z_1 y_2 \vec{k} \wedge \vec{j} + y_1 z_2 \vec{j} \wedge \vec{k} \end{array} \right\}$$

En développant les produits vectoriels des vecteurs de base il vient :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} z_2 y_1 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - z_2 x_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{vmatrix}$$

4.4. Applications

a) Normale à un plan

Soit trois points A , B et C . Par ces trois points, il passe un plan dont la normale peut être définie par le produit vectoriel des vecteurs contenus dans le plan. Le vecteur unitaire \vec{u} colinéaire à la normale est donné par :

$$\vec{u} = \frac{\vec{AB} \wedge \vec{AC}}{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|}$$

b) Moment d'une force

Considérons un solide en rotation autour d'un axe fixe et soumis à une force \vec{F} dont le point d'application est en P (figure A1.15).

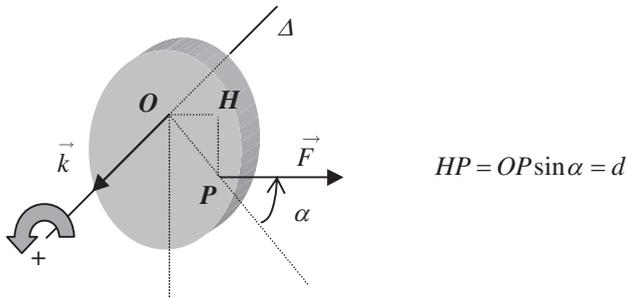


Figure A1.15 • Représentation du moment d'une force par rapport à O .

Par définition, le moment de la force par rapport à O est donné par :

$$\vec{M}_{\vec{F}/O} = \vec{OP} \wedge \vec{F}$$

Le moment d'une force est donc un vecteur perpendiculaire à la fois à la force \vec{F} et à \vec{OP} . La direction et le sens de ce vecteur donnent le sens de rotation que produira l'action de la force \vec{F} autour de l'axe.

Dans le cas où le solide peut tourner autour d'un axe Δ passant par le point O , le moment de \vec{F} par rapport à Δ correspond à la projection de $\vec{M}_{\vec{F}/O}$ suivant la direction de Δ soit :

$$M_{\vec{F}/\Delta} = \vec{M}_{\vec{F}/O} \cdot \vec{k} = (\vec{OP} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{k}$$

où \vec{k} est un vecteur unitaire suivant Δ définissant le sens positif de rotation avec la convention habituelle de la règle du tire-bouchon.

Si la ligne d'action de la force se trouve dans un plan perpendiculaire à Δ , le moment de la force par rapport à Δ est donné par :

$$M_{\vec{F}/\Delta} = \left\| \overrightarrow{OP} \right\| F \sin(\alpha) = \pm Fd$$

où α représente l'angle entre \overrightarrow{OP} et \vec{F} .

La quantité : $HP = d = OP|\sin(\alpha)|$ est appelée **bras de levier** de la force.

Remarque. Si le bras de levier est nul, c'est-à-dire si la **droite d'action** de la force passe par l'axe de rotation, le moment de \vec{F} est alors nul.

5. DÉRIVATION VECTORIELLE

5.1. Définition

On appelle **dérivée** d'un vecteur \overrightarrow{OM} dans une base fixe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le vecteur dont les composantes sont les dérivées des composantes du vecteur \overrightarrow{OM} dans cette base, soit :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

Il est très important de remarquer que la dérivée des vecteurs de base est nulle car ces vecteurs sont constants. De plus, les règles de dérivation sont les mêmes que pour les fonctions scalaires.

5.2. Dérivation d'un vecteur unitaire tournant

Considérons le schéma de la figure A1.16. Le repère O, x, y est muni des bases orthornormées : (\vec{i}, \vec{j}) , base du système de coordonnées cartésiennes, fixe par rapport aux axes x, y et $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$, base du système de coordonnées polaires, mobile par rapport à ces axes.

Les vecteurs \vec{i} et \vec{j} sont constants mais les vecteurs unitaires \vec{u}_ρ et \vec{u}_θ ne le sont pas car ils peuvent tourner autour de la normale au plan. Leur direction varie donc au cours du temps et les deux vecteurs \vec{u}_ρ et \vec{u}_θ sont appelés des **vecteurs tournants**. Nous allons voir comment dériver ces vecteurs non constants dans le temps. Exprimons-les dans la base (O, \vec{i}, \vec{j}) :

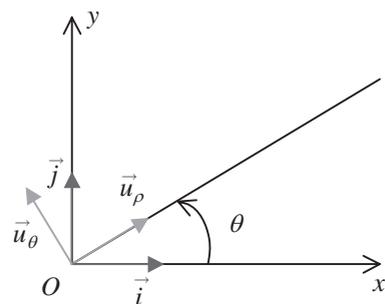


Figure A1.16 • Représentation des vecteurs tournants dans le repère (O, x, y) .

$$\begin{aligned} \vec{u}_\rho(t) &= \cos \theta(t) \vec{i} + \sin \theta(t) \vec{j} \\ \vec{u}_\theta(t) &= -\sin \theta(t) \vec{i} + \cos \theta(t) \vec{j} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Il est immédiat de constater que les vecteurs \vec{u} dépendent du temps par l'intermédiaire de $\theta(t)$. La dérivation temporelle de ces vecteurs s'écrit en utilisant la notation différentielle :

$$\frac{d\vec{u}_\rho(t)}{dt} = \frac{d(\cos \theta(t) \vec{i} + \sin \theta(t) \vec{j})}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta(t)}{dt} = \frac{d(-\sin \theta(t) \vec{i} + \cos \theta(t) \vec{j})}{dt}$$

Il faut alors remarquer que nous devons dériver des sinus et cosinus par rapport à la variable de dérivation t (et non θ). En utilisant le fait que :

$$\frac{d \cos \theta(t)}{dt} = -\sin \theta(t) \frac{d\theta(t)}{dt} = -\sin \theta(t) \dot{\theta}(t)$$

il vient :

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = (-\sin \theta(t) \vec{i} + \cos \theta(t) \vec{j}) \frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = (\cos \theta(t) \vec{i} + \sin \theta(t) \vec{j}) \frac{d\theta(t)}{dt}$$

En comparant ces résultats à l'expression des vecteurs \vec{u} on voit que :

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\rho$$

Nous pouvons donc énoncer ce résultat en tant que théorème, que par la suite nous retiendrons sous l'appellation du théorème de la dérivée du vecteur unitaire tournant.

Théorème de la dérivée du vecteur unitaire tournant

La dérivée par rapport au temps d'un vecteur unitaire tournant est égale au vecteur unitaire tournant qui, lui, est directement orthogonal multiplié par la vitesse angulaire de la rotation de la base tournante.

6. DIFFÉRENTIELLE D'UNE FONCTION

6.1. Définition

Considérons une fonction f de la variable x . Cette fonction est dérivable sur son domaine de dérivation et sa dérivée s'écrit :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

La représentation géométrique de cette fonction correspond, dans le plan xOy , à une courbe définie par $y = f(x)$ comme le montre la figure A1.17. Considérons la droite tangente à la courbe au point d'abscisse x_0 . La dérivée $f'(x_0)$ est égale à la tangente de l'angle que fait cette droite avec l'axe des x .

Soit une variation quelconque Δx de la variable x . On définit la différentielle de la fonction $f(x)$ par : $df(x) = f'(x) \Delta x$.

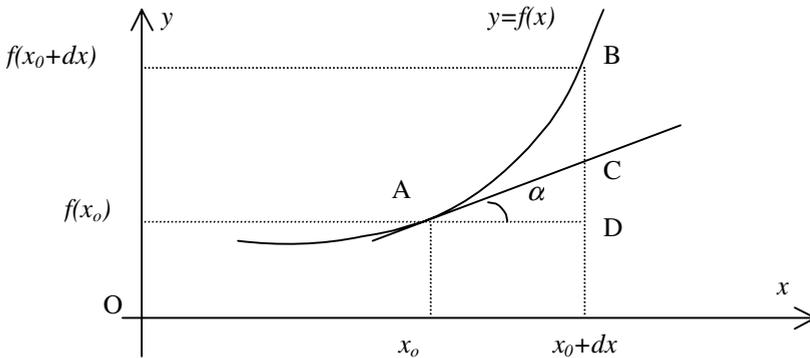


Figure A1.17 • Signification géométrique de la notion de dérivée.

Cette différentielle est fonction de l'abscisse x mais aussi de la variation Δx choisie.

Remarque. Pour la fonction $f(x) = y = x$, on obtient $df(x) = dy = dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$. On écrira donc toujours : $df(x) = f'(x)dx$.

Définition. La différence d'une fonction f d'une variable réelle x est égale au produit de la dérivée de cette fonction par l'élément différentiel (qui est $d(\text{variable})$).

Exemples

La fonction $y(x) = 2x$ a pour différentielle $dy = 2dx$.

La fonction $S(R) = \pi R^2$ a pour différentielle $dS = 2\pi R dR$.

Il est important de remarquer que ces quantités sont des nombres réels que l'on peut manipuler comme on le veut. De cette façon on peut écrire que :

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

ce qui correspond à l'autre notation possible de la dérivée d'une fonction que l'on appelle notation différentielle.

6.2. Interprétation géométrique

Il est intéressant de comparer l'accroissement de la fonction $f = f(x+dx) - f(x)$ et la différentielle de cette fonction pour la même abscisse x et variation dx . Cette comparaison peut se faire graphiquement.

$$df(x_0) = f'(x_0)dx = \tan \alpha dx = CD$$

$$\Delta f = f(x_0 + dx) - f(x_0) = BD$$

On constate que la différentielle df est différente de l'accroissement de la fonction Δf . Mais, lorsque la quantité dx devient infiniment petite, Δf tend vers df . Il en résulte que la différentielle d'une fonction s'identifie à la variation de la fonction pour un changement infinitésimal de la variable.

Encart 1.1. Aire d'un disque et différentielle

Appliquons ceci au cas de la fonction $S(R)$ donnant l'aire d'un disque de rayon R . Notre préoccupation est de déterminer la différentielle de cette fonction et de la comparer à l'accroissement de surface quand le rayon du disque passe de R à $R+dR$. De la surface d'un cercle de rayon R , $S(R) = \pi R^2$, nous tirons celle d'un cercle de rayon $R+dR$:

$$S(R + dR) = \pi(R + dR)^2 = \pi R^2 + 2\pi R dR + \pi(dR)^2.$$

L'accroissement de surface résultant est donné par :

$$\Delta S = S(R + dR) - S(R) = 2\pi R dR + \pi(dR)^2$$

alors que la différentielle de la fonction vaut $dS = 2\pi R dR$.

Nous constatons donc que $\Delta S \approx dS$ au premier ordre par rapport à l'infiniment petit dR , c'est-à-dire en négligeant les termes d'ordre supérieur en dR (dR à une puissance supérieure à 1 est infiniment petit devant dR lui-même infiniment petit).

En physique, la quantité dx sera toujours une variation infiniment petite de la variable.

On confondra donc toujours l'accroissement de la fonction (exprimé au premier ordre par rapport à dx) avec la différentielle de cette fonction.

Encart 1.2. Détermination de l'aire d'un disque

Supposons que l'on cherche à exprimer la fonction $S(r)$ donnant la surface d'un disque de rayon r . Exprimons l'accroissement ΔS de cette fonction lorsque le rayon passe de r à $r+dr$.

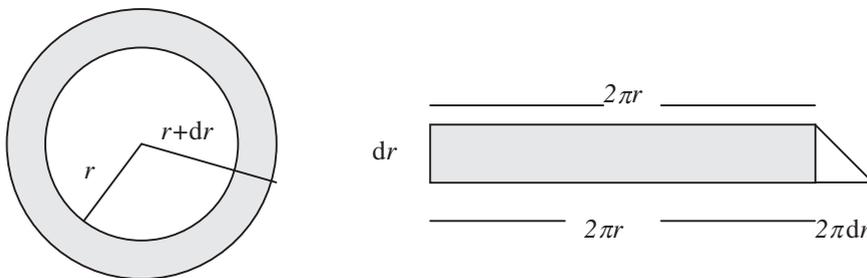


Figure A1.18 • Représentation géométrique de la différentielle de la surface d'un cercle et comparaison avec l'accroissement de surface.

La quantité ΔS est la surface élémentaire de la couronne et vaut $2\pi r dr$ au premier ordre par rapport à dr (le terme correctif $(\pi(dr)^2)$ est un terme du deuxième ordre). Cette expression est donc égale à la différentielle de notre fonction, soit :

$$dS = 2\pi r dr = S' dr$$

Nous constatons donc que si l'on connaît le rayon d'un cercle, il est possible de déterminer l'augmentation de la surface de ce cercle si la variation de son rayon est faible.

De même nous voyons que si l'on connaît le périmètre d'un cercle de rayon r il est possible de déduire la surface du disque associé, puisque, comme l'indique la figure A1.18, l'aire hachurée s'écrit :

$$dS = 2\pi r dr \implies S = \pi r^2 + c$$

Il est évident que la constante c est nulle puisque la surface d'un disque de rayon nul est nulle.

6.3. Calcul de différentielles

Les règles de calcul de différentielles sont les mêmes que pour le calcul de dérivées. Par exemple, la différentielle d'un produit de fonctions est donnée par :

$$d(fg) = (fg)' dx = f'g dx + fg' dx = gdf + fdg$$

6.4. Différentielle d'une fonction de plusieurs variables

a) Définitions

Une fonction réelle de deux variables réelles est une application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} qui associe au couple (x, y) le réel $f(x, y) = z$.

À tout point M du plan (O, x, y) , on fait correspondre un point de l'espace de coordonnées $(x, y, z = f(x, y))$. L'ensemble de ces points forme une surface. Un exemple simple est constitué par le lieu des points d'altitude $z = \text{constante}$ qui définit des plans parallèles au plan O, x, y .

On peut généraliser ceci à une fonction de trois variables $(x, y, z) \rightarrow f(x, y, z)$. Évidemment, la représentation géométrique ferait appel à un espace à quatre dimensions.

En sciences physiques, la plupart des grandeurs calculées peuvent être traitées comme des fonctions de plusieurs variables. C'est ainsi que l'énergie dissipée par effet joule dans une résistance R parcourue par un courant constant d'intensité i pendant la durée t est $W = R \cdot i^2 \cdot t = W(R, i, t)$.

b) Dérivées partielles

Lorsque l'on fixe toutes les variables sauf une, une fonction de plusieurs variables devient une fonction d'une variable. On peut alors déterminer, si elle existe, la dérivée de cette fonction par rapport à cette variable (les autres étant fixées).

Soit la fonction de deux variables $f(x, y)$. Si on fixe $y = y_0$, alors on peut écrire :

$$f(x, y_0) = g(x) \implies \frac{dg}{dx} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{y=cste}$$

La notation ∂ (d rond) est réservée aux dérivées partielles. Ainsi la fonction $f(x, y) = x^2 + 2yx$ possède deux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x$$

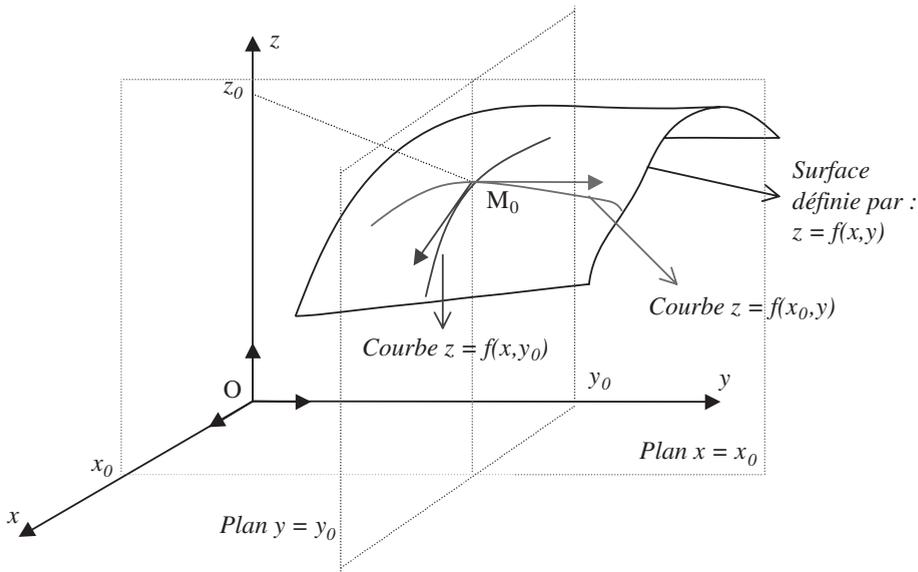


Figure A1.19 • Représentation schématique d'une fonction $z = f(x, y)$ à plusieurs variables. En fixant l'une des variables, par exemple $y = y_0$, nous obtenons une fonction à une seule variable $f(x, y_0)$.

Il est facile de généraliser ce résultat pour des fonctions à n variables et aussi définir des dérivées partielles d'ordre supérieur. En reprenant l'exemple précédent, on aura :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 2 ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0 ;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) .$$

Remarque. Si les dérivées partielles secondes existent et sont continues alors on a toujours $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Ce résultat peut être facilement généralisé aux fonctions de trois variables ou plus.

c) Différentielles partielles, différentielle totale

Reprenons le cas d'une fonction de deux variables $f(x, y)$. La représentation géométrique de cette fonction correspond à une surface. Si on fixe la variable $y = y_0$, on définit alors une courbe $z = f(x, y_0)$ que l'on obtient par intersection de la surface avec le plan $y = y_0$ comme le montre la figure A1.19.

Pour un accroissement dx infiniment petit de la variable x , l'accroissement de la fonction se confond avec la différentielle. On peut écrire :

$$\text{avec } y = y_0 \implies dy = 0 \text{ on a } df = \frac{\partial f}{\partial x} dx$$

On définit ainsi une différentielle partielle par rapport à x que l'on note

$$\partial_x f = \frac{\partial f}{\partial x} dx$$

On peut répéter la même opération en fixant $x = x_0$; on aura alors $\partial_x f = \frac{\partial f}{\partial x} dx$.

Pour une variation des deux variables, dx et dy , l'accroissement infinitésimal de la fonction correspondra à la différentielle totale qui est la somme des différentielles partielles.

$$df = \partial_x f + \partial_y f = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

À titre d'exemple on voit que la fonction $f = x^2y$ admet pour différentielle totale :

$$df = 2xydx + x^2dy$$

De même, si on considère une fonction f de plusieurs variables réelles x, y, z cette fonction admet plusieurs dérivées par rapport à chacune des variables. Ces dérivées représentent l'évolution de cette fonction par rapport à chacune des variables. Toutefois il est possible de connaître l'évolution de la fonction f par rapport à l'ensemble des variables en utilisant la différentielle. On fait apparaître tout d'abord les dérivées partielles de la fonction f par rapport à chacune des variables obtenues lorsque les autres variables sont supposées constantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$$

et la différentielle de la fonction est par définition :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

d) Forme différentielle et différentielle totale

Soit l'expression suivante :

$$\delta f = F(x, y)dx + G(x, y)dy$$

Cette expression a la même forme que la différentielle totale d'une fonction de deux variables x et y . C'est une forme différentielle. On peut se poser la question de savoir s'il existe effectivement une fonction $f(x, y)$ dont la différentielle correspondrait à cette forme. Si tel est le cas, on aura :

$$F(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \text{ et } G(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que cette forme différentielle soit une différentielle totale est l'égalité des dérivées partielles croisées, soit :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial G}{\partial x}$$

Encart 1.3. Intégration d'une différentielle totale

Considérons comme exemple la forme différentielle suivante :

$$F(x, y)dx + G(x, y)dy = 6xydx + 3x^2dy$$

Cela conduit à

$$\begin{cases} F(x, y) = 6xy \\ G(x, y) = 3x^2 \end{cases} \implies \frac{\partial F}{\partial y} = 6x = \frac{\partial G}{\partial x}$$

Comme les dérivées partielles croisées sont égales, il existe bien une fonction $f(x, y)$ qui vérifie :

$$df = 6xydx + 3x^2dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

donc

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy \implies f(x, y) = \int 6xydx = 3x^2y + g(y)$$

La primitive est déterminée à une fonction de y près car y est considéré comme constant dans l'intégration ci-dessus.

La deuxième égalité est utilisée pour déterminer la fonction $g(y)$. La solution est donc :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + g'(y) = G(x, y) \implies g'(y) = 0 \implies g(y) = C$$

La solution finale s'écrit :

$$f(x, y) = 3x^2y + C$$

6.5. Différentielle d'un vecteur

a) Calcul en coordonnées cartésiennes

Considérons (figure A1.20) un vecteur \vec{OM} de composantes (x, y) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . Nous allons considérer que l'extrémité M de ce vecteur se déplace en un point M' très proche de M (déplacement élémentaire). Les coordonnées de M' deviennent $(x' = x+dx, y' = y+dy)$ avec dx et dy des déplacements infiniment petits. Nous cherchons à déterminer la différentielle du vecteur \vec{OM} , c'est-à-dire sa variation \vec{MM}' .

Il est facile de voir que :

$$\vec{MM}' = \vec{OM}' - \vec{OM} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$$

Cette quantité est appelée différentielle du vecteur \vec{OM} et notée $d\vec{OM}$ ou encore déplacement élémentaire $d\vec{l}$.

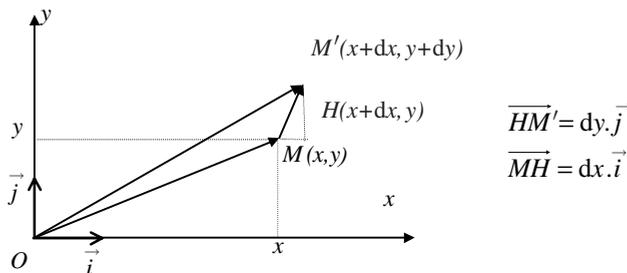


Figure A1.20 • Illustration du calcul de la différentielle d'un vecteur en coordonnées cartésiennes.

La différentielle de ce vecteur considéré comme potentiellement variable est aussi calculable directement à partir de l'expression de \vec{OM} et conduit, en trois dimensions, à la relation suivante :

$$d\vec{OM} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

La quantité obtenue est un vecteur de composantes dx, dy, dz . Elle représente une variation élémentaire quelconque du vecteur \vec{OM} . Il est utile de remarquer que $d\vec{OM}$ représente un déplacement élémentaire dans l'espace. Pour cette raison, la différentielle du vecteur \vec{OM} est notée $d\vec{OM} = d\vec{l}$.

b) Expression en coordonnées polaires

Cette même variation élémentaire $d\vec{OM}$ du vecteur \vec{OM} peut s'exprimer en coordonnées polaires. On peut comme on l'a fait précédemment déterminer la différentielle soit graphiquement soit par un calcul direct. Commençons par la méthode graphique :

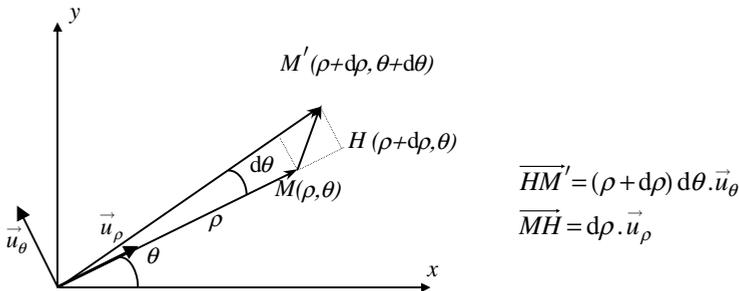


Figure A1.21 • Illustration du calcul de la différentielle d'un vecteur en coordonnées polaires.

Il est facile de voir sur le schéma de la figure A1.21 que la différentielle du vecteur \vec{OM} qui est définie par $d\vec{OM} = \vec{OM}' - \vec{OM} = \vec{MM}'$, peut se décomposer dans la base polaire en

$$d\vec{OM} = \vec{MH} + \vec{HM}' = d\rho \vec{u}_\rho + (\rho + d\rho)d\theta \vec{u}_\theta$$

Le déplacement élémentaire $d\rho$ est négligeable par rapport à ρ , ce qui conduit à :

$$d\vec{OM} = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\theta \vec{u}_\theta$$

Le calcul direct se fait en utilisant les règles de différenciation d'un produit de fonction et de dérivation d'un vecteur unitaire tournant :

$$\vec{OM} = \rho \vec{u}_\rho \implies d\vec{OM} = d(\rho \vec{u}_\rho) = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\vec{u}_\rho = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\theta \vec{u}_\theta$$

Le résultat précédent peut être généralisé en coordonnées cylindriques en ajoutant un déplacement élémentaire dans la direction \vec{u}_z , soit :

$$\vec{OM} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z \implies d\vec{OM} = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$

c) Expression en coordonnées sphériques

Nous partons de la position du point M qui est donnée par $\vec{OM} = r \vec{u}_r$ et nous nous bornons à décrire graphiquement le déplacement élémentaire $d\vec{l}$.

Tout déplacement élémentaire $\overrightarrow{MM'}$ de l'extrémité du vecteur \overrightarrow{OM} peut être projeté sur les vecteurs de bases $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi$. Ce déplacement élémentaire engendre des variations élémentaires ($dr, d\theta, d\varphi$) des paramètres de position (r, θ, φ) du point M . Ces variations élémentaires doivent être converties en déplacements élémentaires en particulier lorsqu'il s'agit des angles. Elles s'obtiennent facilement en utilisant la figure A1.22.

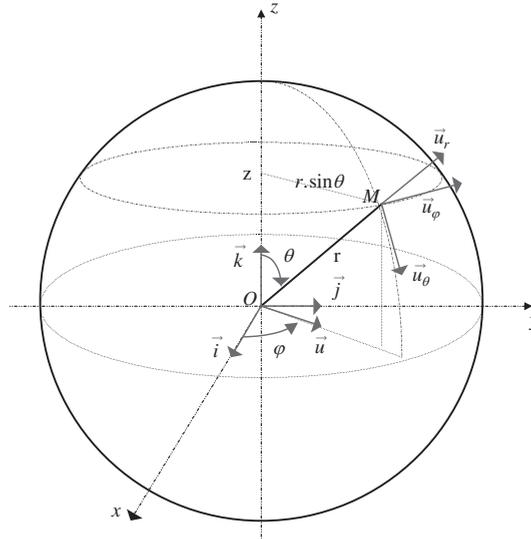


Figure A1.22 • Détermination d'un déplacement élémentaire en coordonnées sphériques.

Détermination d'un déplacement élémentaire en coordonnées sphériques :

- selon \vec{u}_r le passage de r à $r + dr$ produit le déplacement dr ;
- selon \vec{u}_θ le passage de θ à $\theta + d\theta$ produit un déplacement $r d\theta$;
- selon \vec{u}_φ le passage de φ à $\varphi + d\varphi$ produit un déplacement $r \sin \theta d\varphi$.

Le vecteur $d\vec{l}$, dont les composantes dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ sont les valeurs précédemment déterminées, s'écrit donc :

$$d\overrightarrow{OM} = d\vec{l} = dr \cdot \vec{u}_r + r \cdot d\theta \cdot \vec{u}_\theta + r \cdot \sin \theta \cdot d\varphi \cdot \vec{u}_\varphi$$

7. VECTEUR GRADIENT D'UNE FONCTION

7.1. Définition

On appelle **vecteur gradient** d'une fonction scalaire $f(x, y, z)$ de plusieurs variables réelles le vecteur noté $\overrightarrow{\text{grad}}$ défini par :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

Ce vecteur peut être défini à partir de l'opérateur nabla :

$$\overrightarrow{\text{grad}}f = \overrightarrow{\nabla}f$$

$$\text{avec : } \nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} .$$

Le gradient d'un champ de scalaires (fonction $f(x, y, z)$) est un vecteur qui renseigne sur l'évolution de la fonction dans l'espace. Il est facile de s'en convaincre en travaillant avec des fonctions à une seule variable. Le gradient est alors un vecteur dont l'intensité correspond à la dérivée de la fonction. Un exemple est donné à la fin de cette partie.

7.2. Relation entre le gradient et la différentielle

Nous avons vu que par définition :

$$\overrightarrow{\text{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Si l'on multiplie scalairement le vecteur gradient par le vecteur déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ il vient :

$$d\overrightarrow{OM} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}f \cdot d\overrightarrow{OM} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k})$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}f \cdot d\overrightarrow{OM} = df$$

Cette dernière relation est particulièrement importante car elle permet de donner une signification du gradient d'une fonction. En effet, considérons une surface équipotentielle définie par $f = \text{cste}$. Supposons que M appartienne à la surface équipotentielle. Alors quel que soit le déplacement élémentaire de M sur cette surface équipotentielle, on aura $df = 0$ soit :

$$\overrightarrow{\text{grad}}f \cdot d\overrightarrow{OM} = 0$$

Dans cette expression $d\overrightarrow{OM}$ est non nul puisqu'il représente un déplacement élémentaire quelconque dans la surface équipotentielle ainsi que $\overrightarrow{\text{grad}}f$. Cela montre que pour que l'égalité soit vérifiée il faut que $\overrightarrow{\text{grad}}f$ soit perpendiculaire à la surface équipotentielle.

Le vecteur gradient $\overrightarrow{\text{grad}}f$ est perpendiculaire aux surfaces équipotentielles $f = \text{cste}$.

Si, maintenant, on considère un déplacement du point M dans la direction et le sens du gradient (c'est-à-dire perpendiculairement à la surface équipotentielle), on aura :

$$df = \overrightarrow{\text{grad}}f \cdot d\overrightarrow{OM} = \left\| \overrightarrow{\text{grad}}f \right\| \left\| d\overrightarrow{OM} \right\| > 0 \implies df > 0$$

Le vecteur gradient $\overrightarrow{\text{grad}} f$ est donc orienté vers les valeurs croissantes de la fonction f .

Encart 1.4. Le gradient de température

À titre d'exemple simple, prenons le cas d'une fonction température ne dépendant que d'une seule variable z . Nous supposons que cette fonction décroît linéairement avec l'altitude.

Exemple : $T(z) = T_0 - az$

$$\overrightarrow{\text{grad}} T(z) = \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial z} = -a \end{cases} \quad (1.2)$$

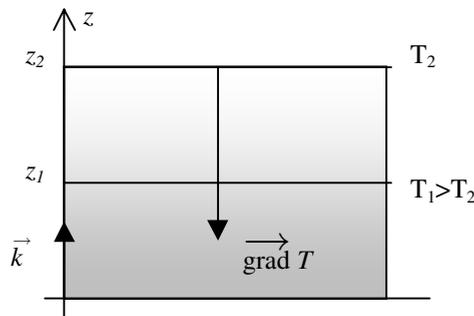


Figure A1.23 • Exemple de représentation d'une fonction gradient.

Les surfaces « équipotentiels » sont dans ce cas l'ensemble des points pour lesquels la température est la même.

$$T(z) = cste \implies T_0 - az = cste \implies z = cste$$

Les surfaces « équitempératures » sont donc des plans parallèles au plan O, x, y . Le gradient de $T(z)$ est un vecteur perpendiculaire à ces plans et dirigé vers les températures croissantes.

8. INTÉGRALES ET PRIMITIVES

8.1. Primitives

Soit une fonction d'une variable $f(x)$, on appelle **primitive de f** une fonction $F(x)$ qui vérifie $F'(x) = f(x)$. L'équation précédente peut s'écrire en notation différentielle, ce qui conduit à :

$$\frac{dF}{dx} = f(x) \implies dF = f(x)dx$$

La fonction primitive, $F(x)$, est représentée par la notation suivante :

$$F(x) = \int f(x)dx$$

La primitive d'une fonction est toujours définie à une constante près puisque la dérivée d'une constante est nulle. On a donc de façon générale :

$$\int f(x)dx = F(x) + C = G(x)$$

Si l'on connaît une condition sur la fonction $G(x)$ recherchée, alors la constante n'est plus quelconque. La condition se présente sous la forme $G(x_0) = C_0$. On obtient une détermination de C en reportant cette relation dans l'expression de la primitive.

La solution recherchée est donc unique :

$$G(x) = \int f(x)dx = F(x) - F(x_0) + C_0$$

8.2. Intégrale définie

Si, au lieu d'intégrer de façon générale la fonction $f(x)$, celle-ci est intégrée entre deux bornes a et b , nous obtenons à l'issue du calcul un nombre appelé **intégrale définie de f** , ou **intégrale simple de f** entre a et b :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (1.3)$$

Ce résultat ne dépend pas du choix de la primitive car par différence, la constante qui peut différencier deux primitives disparaît.

Remarque. Lorsque l'on recherche une primitive dont on connaît une condition pour une valeur x_0 de la variable de la forme $G(x_0) = C_0$, on peut pratiquer comme indiqué dans le paragraphe 8.1., c'est-à-dire déterminer la primitive et ensuite calculer la constante pour que la condition soit vérifiée. On peut aussi calculer l'intégrale de la fonction $f(x)$ entre deux bornes, l'une correspondant à x_0 pour laquelle on connaît la valeur $G(x_0)$, l'autre correspondant à une valeur quelconque de la variable. Si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ et $G(x)$ la primitive correspondant à la solution recherchée, on aura :

$$\int_{x_0}^x f(x)dx = F(x) - F(x_0) = G(x) - C_0$$

soit

$$G(x) = F(x) - F(x_0) + C_0$$

8.3. Signification géométrique de l'intégrale définie

Considérons une fonction f dont le graphe est représenté sur la figure A1.24.

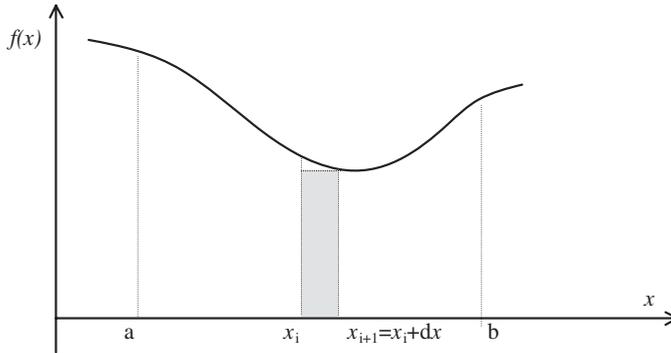


Figure A1.24 • Représentation schématique de l'intégrale.

Supposons que l'intervalle $[a, b]$ sur lequel nous effectuons l'intégrale définie de la fonction $f(x)$ soit découpé en N bandes de largeur dx . L'intégrale définie peut s'écrire :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

Sur chacun des intervalles de largeur dx , la fonction $f(x)$ est comprise entre une valeur M maximale et une valeur m minimale. Il en résulte que l'intégrale est bornée par la relation :

$$\sum_{i=0}^{N-1} M_i (x_{i+1} - x_i) \geq \int_a^b f(x)dx \geq \sum_{i=0}^{N-1} m_i (x_{i+1} - x_i)$$

Nous voyons facilement que les bornes supérieure et inférieure se rejoindront pour peu que l'intervalle $\delta x_i = x_{i+1} - x_i$ soit extrêmement petit quel que soit i . Pour cela, il suffit de faire tendre le nombre d'intervalles N vers l'infini. Il est ainsi possible de définir géométriquement l'intégrale au sens de Riemann, par la relation limite suivante :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^{N-1} f(x_i) \delta x_i \right)$$

L'expression ci-dessus montre que pour calculer une intégrale, il suffit de sommer les aires de tous les rectangles de hauteur $f(x_i)$ et de largeur δx_i quand N tend vers l'infini, soit quand δx_i tend vers 0.

9. INTÉGRALES VECTORIELLES

9.1. Champ de vecteurs

Soit (D) une région de l'espace et $M(x, y, z)$ un point de cette région. Un **champ de vecteurs** est défini par la transformation suivante :

$$M(x, y, z) \longrightarrow \vec{E}(M) = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$$

dans laquelle E_x, E_y et E_z sont des fonctions des coordonnées x, y, z et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base du repère cartésien utilisé. Cette notion a été abordée en introduction (paragraphe 1.). Rappelons que des exemples classiques de champs de vecteurs sont le champ de gravitation, le champ électrique, etc.

9.2. Circulation d'un champ de vecteurs

Considérons un champ de vecteurs $\vec{E}(M)$ et une portion de courbe (C) limitée par les points M_1 et M_2 .

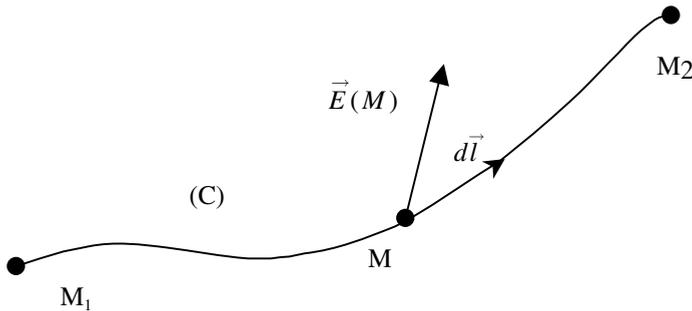


Figure A1.25 • Circulation d'un champ entre deux points M_1 et M_2 .

On appelle **circulation élémentaire** de $\vec{E}(M)$ sur (C) pour un déplacement élémentaire $d\vec{l}$ la quantité : $\delta\mathcal{C}(\vec{E}) = \vec{E}(M) \cdot d\vec{l}$.

L'expression de la circulation peut s'écrire en fonction du système de coordonnées choisi. En coordonnées cartésiennes, il est facile de vérifier que pour un problème plan la circulation élémentaire s'écrit

$$\delta\mathcal{C}(\vec{E}) = E(x, y) \cdot dx + E(x, y) \cdot dy$$

La circulation élémentaire se présente donc comme une forme différentielle. La circulation de $\vec{E}(M)$ sur (C) entre M_1 et M_2 s'obtient en intégrant la circulation élémentaire sur le chemin suivi, soit :

$$\mathcal{C}_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{E}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{E}(M) \cdot d\vec{l}$$

Remarques

- Si le champ de vecteurs est un champ de forces \vec{F} , la circulation de \vec{F} sur (C) entre M_1 et M_2 est égale au travail de \vec{F} lorsque son point d'application passe de M_1 à M_2 en suivant le chemin défini par la courbe (C) .
- Si le champ de vecteurs est uniforme, on a alors :

$$\mathcal{C}_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{E}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} = \vec{E}(M) \cdot \int_{M_1}^{M_2} d\vec{l} = \vec{E}(M) \cdot \overrightarrow{M_1 M_2}$$

- Si la circulation élémentaire correspond à la différentielle totale d'une fonction $G(x, y)$, on peut écrire :

$$\delta C(\vec{E}) = \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} = dG$$

$$C_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{E}) = G(M_2) - G(M_1)$$

La circulation ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de la position initiale et finale. En particulier, la circulation sur une courbe fermée donnera toujours 0.

- Le calcul de l'intégrale curviligne se ramène en général au calcul d'une intégrale simple. En effet, la courbe (C) peut être caractérisée par une fonction $y = f(x)$ qui indique que les variable x et y ne sont pas indépendantes. On a alors :

$$dy = f'(x)dx$$

$$C_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{E}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} = \int_{x_1}^{x_2} E_x(x, f(x))dx + E_y(x, f(x))f'(x)dx$$

soit

$$C_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{E}) = \int_{x_1}^{x_2} [E_x(x, f(x)) + E_y(x, f(x))f'(x)] dx$$

ANNEXE 2

INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE CÉLESTE

1. HISTORIQUE

L'étude¹ de la position et du mouvement des astres, encore appelée *astronomie de position*, est certainement l'une des sciences les plus vieilles qui soient. Les Grecs, les Chinois et les Égyptiens en furent les précurseurs. Scientifiquement les Grecs nous ont laissé le plus de traces. En 600 avant J.-C., Anaximandre spécula que la Terre était un corps céleste cylindrique isolé dans l'espace au centre de l'univers et que les astres tournaient autour de la Terre sur des roues. Parménide, en 504 avant J.-C., imagina que la Terre devait être sphérique ; il nota que l'éclat des planètes variait au cours du temps et en déduisit qu'elles étaient éclairées par le Soleil. Il affirma que la lumière du Soleil était réfléchiée par la Lune et les planètes. Ceci fut confirmé par Aristote qui vécut de 384 à 321 avant J.-C. Connue comme le père du géocentrisme, Aristote affirmait que la Terre était sphérique et immobile. Dans la théorie géocentrique la Terre est placée au centre de l'Univers et les astres tournent autour de la Terre. À titre de preuve de l'immobilisme de la Terre, Aristote avançait que tout objet lancé verticalement vers le haut retombe à la même position. Son argumentation sur la sphéricité de la Terre reposait sur les observations suivantes : le mât d'un bateau est visible avant le corps du bateau, l'ombre de la Terre lors d'une éclipse de Lune est limitée par un arc de cercle.

Héraclide (388-315) fut le premier à envisager que la Terre tourne sur elle-même en un jour. Pour interpréter le mouvement de Vénus, il suggéra que Vénus tournait autour du Soleil et non de la Terre. Aristarque de Samos affirma alors que cela devait être le cas de toutes les planètes, y compris la Terre, mais cette idée fut rejetée.

À partir de 250 avant J.-C., le géocentrisme est toujours de mode et l'interprétation du mouvement des planètes passe par la théorie des épicycles que l'on doit à Ptolémée. Dans

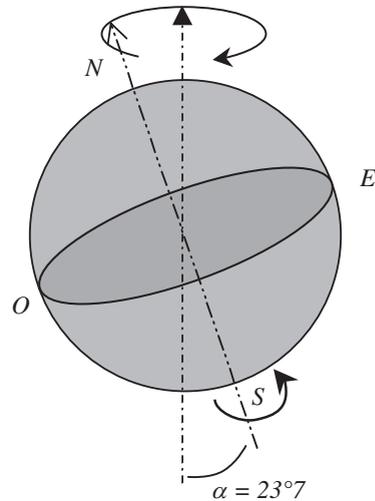


Figure A2.1 • Mouvement de précession de l'axe de rotation de la Terre par rapport à une direction fixe.

1. À lire : *Histoire de la découverte du système solaire* par J. Sivardière, B.U.P., 1995, n°773 et 776, 645-662 et 1265-1282.

cette théorie, les planètes décrivent des trajectoires circulaires autour d'un centre qui décrit lui-même une trajectoire circulaire. À cette époque Hipparque (190-120) qui fut probablement l'un des plus grands astronomes de l'Antiquité découvrit la trigonométrie et la **précession des équinoxes**. Le mouvement de précession signifie que l'axe de rotation de la Terre n'est pas fixe mais tourne à $23^{\circ}7'$ d'une direction fixe (figure A2.1) en une **année platonique** soit 25 800 ans approximativement. On remarquera que ce mouvement de précession, qui s'effectue dans le sens rétrograde, ne correspond qu'à un décalage de $50''$ par an et est de ce fait difficile à observer. On peut mesurer ici tout le génie d'Hipparque d'avoir pu déceler ce mouvement à cette époque !

C'est Erathostène (273-192) qui mesura le premier le rayon de la Terre (figure A2.2) en mesurant à la même heure le même jour l'inclinaison des rayons du Soleil par rapport à la verticale du lieu en deux villes situées sur un même méridien. En effet, le jour du solstice d'été le Soleil est au Zénith à Syène (ville égyptienne) et, au même moment, à Alexandrie les rayons sont inclinés de $7^{\circ}12'$ c'est-à-dire un angle de $360/50$. Il en conclut que la circonférence de la Terre est égale à 50 fois la distance séparant Syène d'Alexandrie. Cette distance, mesurée à cette époque à pied, vaut 820 km. Il s'ensuit que la circonférence terrestre vaut donc $50 \times 820 = 41\,000$ km.

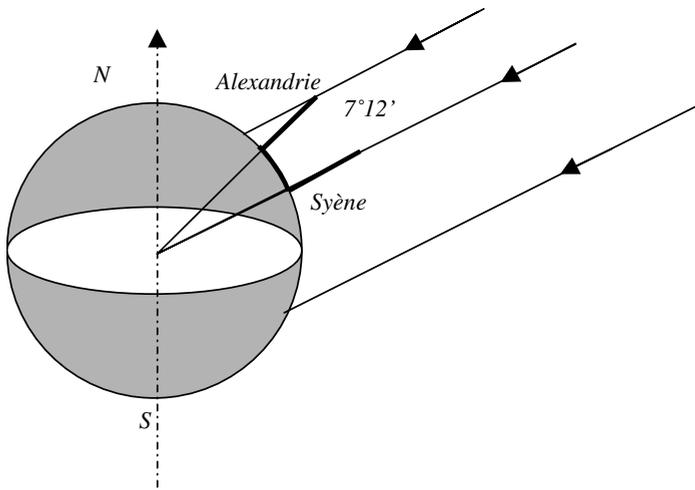


Figure A2.2 • Le Soleil étant très éloigné de la Terre, ses rayons arrivent tous parallèles entre eux à la surface de la Terre. Ils rencontrent la verticale d'un lieu sous une incidence qui dépend de la latitude. Un poteau planté verticalement dans le sol permet de mesurer l'inclinaison des rayons solaires.

Le père de la théorie héliocentrique est Copernic qui vécut en 1473-1543. Il a donné son nom au référentiel de Copernic qui est le référentiel galiléen par excellence. Rappelons que le référentiel de Copernic est un référentiel dont l'origine se trouve au centre du système solaire (c'est-à-dire au voisinage du centre du Soleil) et dont les axes pointent dans la direction de trois étoiles fixes. Jusqu'à présent aucune expérience n'a permis de démontrer que ce référentiel n'est pas galiléen. Il faut en effet savoir que le Soleil parcourt notre galaxie à la vitesse de $200 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ mais doit parcourir une trajectoire gigantesque. Il effectue donc sa ronde en à peu près 2.10^8 années (200 millions d'années environ) soit une **année galactique**. On peut donc en très bonne approximation considérer que le centre du système solaire est en mouvement de translation rectiligne uniforme même sur un temps d'une année.

Les lois qui régissent le mouvement des planètes ont été découvertes par l'astronome Danois Johannes Kepler qui vécut entre 1571 et 1630. Il utilisa les données accumulées par Tycho Brahé (1546-1601). Ces données lui permirent de mettre en évidence la nature elliptique des trajectoires astrales.

Galilée² vécut à la même époque (1564-1642). Il permit une meilleure observation des planètes en utilisant sa célèbre lunette dite lunette de Galilée. Il publia en 1610 un livre intitulé *Le messager des étoiles* dans lequel il fit part de ses découvertes : les montagnes existent sur la Lune, quatre astres tournent autour de Jupiter ! Il est extrêmement connu à cause de ses démêlés avec les Pères de l'Église. Grâce à ses observations, Galilée était convaincu de la pertinence de la théorie héliocentrique proposée par Copernic et Ptolémée. Il écrivit en 1632 un livre intitulé *Dialogue sur les deux principaux systèmes du monde* et il fut jugé en 1633 pour avoir osé prétendre que la Terre tournait autour du Soleil.

Ce fut Newton (1642-1716) qui permit de déterminer les lois de la mécanique céleste en définissant la loi dite de Newton ou *loi de la gravitation universelle*³. Nous devons également à Newton les principes de la mécanique qu'il énonça sous forme de lois appelées les *trois lois de Newton*, à savoir, **le principe d'inertie**, **le principe fondamental de la dynamique** et **le principe des actions réciproques**.

2. DÉFINITIONS

L'**astronomie** est la science qui étudie la position, le mouvement et le comportement des corps célestes.

Par opposition l'**astrologie** est un art divinatoire qui cherche à déterminer l'influence présumée des astres sur la destinée humaine. Cet art est basé sur l'influence de la position des astres par rapport aux constellations du zodiaque à la date de naissance d'un individu. Les *constellations du zodiaque* sont au nombre de 12 : Sagittaire, Capricorne, Verseau, Poisson, Bélier, Taureau, Gémeaux, Cancer, Lion, Vierge, Balance, Scorpion. La position des astres définit l'horoscope de l'individu. Cela signifie que si vous êtes du signe du Bélier le Soleil devrait être dans la constellation du Bélier à la date de votre naissance. Or les constellations du zodiaque ont bougé au fil des temps à cause de la précession des équinoxes. Actuellement il y a un décalage d'une constellation en retard à cause du mouvement rétrograde de précession. Ainsi un Bélier naît quand le Soleil est dans la constellation des Poissons mais est néanmoins Bélier pour les astrologues !!!

La **cosmologie** est une branche de l'astronomie qui étudie l'évolution de l'univers considéré dans son ensemble.

La **cosmogonie** est le récit mythique de la formation de l'univers mais aussi la science de la formation des objets célestes.

L'**astrophysique** est la science qui étudie l'intérieur des étoiles.

Une **étoile** est un astre qui possède un éclat propre dû aux réactions nucléaires dont il est le siège comme par exemple le Soleil ou l'étoile polaire. La réaction qui se produit est la transformation de l'hydrogène en hélium. L'hydrogène s'épuise progressivement et l'étoile se transforme. Il existe des étoiles géantes (peu denses et très lumineuses), des naines (étoiles à forte densité et peu émissives), des étoiles à neutrons et des trous noirs (espace où la gravitation est si forte que même la lumière ne peut en sortir).

2. À lire : *Galilée le messager des étoiles*, par J.P. Maury, Collection Découvertes Gallimard n° 10, 1993.

3. À lire : *Newton et la mécanique céleste*, par Jean-Pierre Maury Découvertes Gallimard n° 91, 1990.

Une **planète** est un corps céleste sans lumière propre gravitant autour d'une étoile.

Un **astéroïde** est une planète de faible taille ($R < 2\,000$ km). Sa forme n'est pas nécessairement sphérique.

Une **galaxie** est un vaste ensemble d'étoiles et de poussières interstellaires dont la cohésion est assurée par la gravitation. Une galaxie peut contenir des dizaines, voire des centaines de milliards d'étoiles. Il existe différentes galaxies, comme les galaxies spirales, elliptiques et irrégulières. Elles se comptent par dizaines de milliers et sont le constituant de l'Univers. Elles se regroupent en amas. Ainsi notre galaxie fait partie de l'amas local qui compte une vingtaine de galaxies, parmi lesquelles on trouve les deux nuages de Magellan ainsi qu'Andromède. Les amas galactiques sont eux-mêmes regroupés en superamas. On admet que toutes les galaxies se sont formées au même moment environ un milliard d'années après le Big Bang, qui se serait produit il y a 15 milliards d'années environ. L'âge de l'Univers est déterminé par l'âge de ses plus vieux atomes. On l'obtient en mesurant la radioactivité de certains éléments comme le carbone 14 par exemple.

Une **constellation** est une région du ciel reconnaissable à un groupe d'étoiles voisines présentant un aspect invariable (du moins sur un laps de temps court devant l'âge de l'Univers). Il existe dans notre galaxie 88 constellations sur la voûte céleste, dont l'une des plus célèbres est la Grande Ourse. Notons que l'étoile la plus brillante d'une constellation est notée α , la suivante β , etc.

Une **nébuleuse** est un nuage de gaz et de matière interstellaire. C'est encore une tache lumineuse étendue. Citons à titre indicatif la nébuleuse d'Orion, la nébuleuse d'Andromède et les nuages de Magellan observés pour la première fois par l'explorateur lors de son voyage dans l'hémisphère Sud.

3. LA VOIE LACTÉE

La Voie Lactée est le nom donné à notre galaxie (figure A2.3). Elle se présente sous la forme d'un vaste disque aplati d'environ 100 000 années-lumière (a.l.) de diamètre et 5 000 a.l. d'épaisseur. Il est bon de rappeler que l'année-lumière est la distance parcourue par la lumière en une année soit :

$$1 \text{ a.l.} \approx 10^{13} \text{ km}$$

Notre galaxie est donc un disque de 10^{18} km de diamètre et il faudrait à la lumière cent mille années pour traverser ce disque d'un bord à l'autre. Autant dire, puisque la vitesse limite de déplacement est celle de la lumière, qu'il nous est physiquement impossible de visiter notre propre galaxie !

L'étoile de notre galaxie, qui nous est la plus essentielle, est le Soleil. Les planètes du système solaire, comme la Terre, gravitent autour d'elle car le Soleil est extrêmement massif. Situé à 24 000 a.l. du centre de la galaxie, il est actuellement admis que notre Soleil s'est formé il y a 5 milliards d'années, soit 25 années galactiques, et qu'il persistera encore pendant à peu près le même temps. Les réserves d'hydrogène s'épuiseront alors et l'hélium se transformera en carbone et oxygène : le Soleil deviendra une géante rouge comme le sont déjà Bételgeuse dans l'épaule gauche d'Orion, Adelbaran dans le Taureau ou encore Antares dans le Scorpion. Le Soleil grossira de plus en plus jusqu'à vaporiser les différentes planètes intérieures⁴.

4. À lire absolument ! *Astronomie et Astrophysique*, par Marc Séguin et Benoît Villeneuve, Masson, 1995.

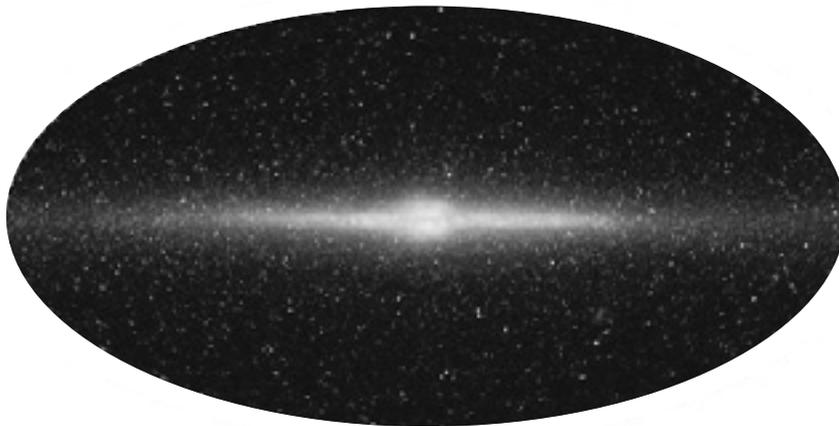


Figure A2.3 • Image de notre Voie Lactée obtenue à partir du satellite COBE (NASA). On y distingue parfaitement le bulbe et le fait que notre galaxie se présente sous la forme d'un disque aplati.

4. LE SYSTÈME SOLAIRE

Le système solaire est constitué du Soleil autour duquel gravitent les planètes. C'est un univers très réduit en comparaison de celui de notre galaxie puisque la plus éloignée des planètes est Pluton située à 6 milliards de km du Soleil soit environ 0,002 a.l. Le Soleil le plus proche de notre Soleil est Proxima du Centaure à 40 000 milliards de km soit approximativement 4 a.l.

Le Soleil est de plus loin l'astre le plus massif du système solaire. C'est pourquoi les planètes gravitent-elles autour de son centre. La masse de la Terre est de $6 \cdot 10^{24}$ kg alors que celle du Soleil est de $2 \cdot 10^{30}$ kg. Les planètes du système solaire sont séparées en deux classes :

- les planètes telluriques, de faible masse : Mercure, Vénus, la Terre et Mars. Mercure et Vénus sont également appelées *planètes intérieures* car elles sont contenues à l'intérieur de l'orbite terrestre ;
- les planètes joviennes, plus lourdes : Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune et Pluton.

La Terre se trouve à 150 millions de km du Soleil et il faut donc à la lumière solaire à peu près 8 minutes pour nous parvenir. Ainsi le Soleil est-il à 8 minutes lumière de la Terre.

Nous avons déjà eu l'occasion de noter que Kepler⁵ a été le premier astronome à comprendre le mouvement des planètes en s'appuyant sur l'observation de leurs positions au cours du temps. Il précisa les caractéristiques du mouvement des planètes sous forme de lois connues sous le nom de **lois de Kepler**. Ces lois sont au nombre de trois et s'énoncent de la façon suivante :

5. Johannes Kepler (1571-1630). Les lois émises par Kepler sont l'aboutissement des travaux d'observation (à l'œil nu !) de Tycho Brahé (1546-1601).

LOIS DE KEPLER

Première loi. *Les planètes décrivent des trajectoires elliptiques dont le Soleil est un foyer.*

Deuxième loi. *Les planètes parcourent des aires égales pendant des intervalles de temps égaux.*

Troisième loi. *Le carré de la période de révolution d'une planète est proportionnel au cube du grand axe.*

Nous reportons dans le tableau A2.1 quelques caractéristiques des planètes du système solaire.

| Nom | T_{rs} | Aplatissement | R_e km | T_r | a ($\times 10^6$ km) | e | inclinaison | M ($\times 10^{24}$ kg) | d |
|---------|-----------|---------------|----------|-----------|-------------------------|--------|-------------|----------------------------|-----|
| Mercuré | 58,6j | 0 | 2 439 | 87,97j | 57,9 | 0,206 | 7 00' | 3,31023 | 5,4 |
| Vénus | 243j | 0 | 6 052 | 244,7j | 108,2 | 0,0068 | 3 24' | 4,871 024 | 5,2 |
| Terre | 23h56'04s | 0,00335 | 6 378 | 365,25j | 149,6 | 0,0167 | 0 | 5,971 024 | 5,5 |
| Mars | 24h37'22s | 0,00518 | 3 397 | 686,98j | 227,9 | 0,093 | 1 51' | 6,421 023 | 3,9 |
| Jupiter | 9h55'30s | 0,06481 | 71 398 | 11,863ans | 778,4 | 0,048 | 1 18' | 1,91027 | 1,3 |
| Saturne | 10h30' | 0,10762 | 60 000 | 29,41ans | 1 425,6 | 0,054 | 2 29' | 5,691 026 | 0,7 |
| Uranus | 17h14' | 0,03 | 26 320 | 84,02ans | 2 870 | 0,046 | 0 46' | 8,71025 | 1,1 |
| Neptune | 18h | 0,0259 | 24 300 | 164,79ans | 4 501 | 0,01 | 1 46' | 1,031 026 | 1,7 |
| Pluton | 6j09h17' | ? | 1 150 | 248,4ans | 5 881 | 0,246 | 17 10' | 1,11022 | 2,1 |

Tableau A2.1 • Paramètres caractéristiques du mouvement des planètes du système solaire (T_{rs} période de rotation sidérale, R_e rayon équatorial, T_r période de révolution, a le demi-grand axe, e excentricité, M masse et d densité).

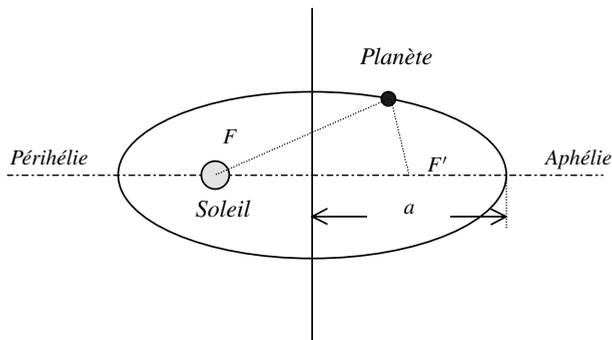


Figure A2.4 • Représentation de la trajectoire elliptique d'une planète autour du Soleil. Le Soleil est l'un des foyers F de l'ellipse. Le demi-grand axe a est représenté.

On notera avec intérêt que les planètes ne gravitent pas toutes dans le même plan. Leur trajectoire est repérée par l'inclinaison de leur plan de révolution par rapport à un plan de référence appelé le **plan de l'écliptique** qui contient la trajectoire du Soleil et la Terre (figure A2.6). C'est de loin Pluton qui possède la trajectoire la plus inclinée sur l'écliptique. Le plan de l'écliptique est incliné de $23^{\circ}26'$ sur le plan de l'équateur céleste. Aux

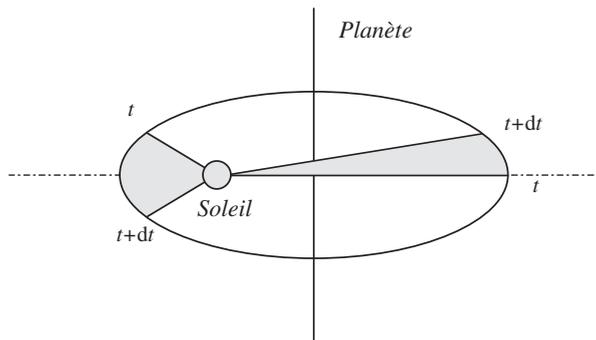


Figure A2.5 • Illustration de la deuxième loi de Kepler. Les aires hachurées sont égales pour peu que l'on considère le même temps de parcours.

deux intersections de l'écliptique avec l'équateur, nous trouvons les **équinoxes**. Le **point vernal** ou point γ est le point où se trouve le Soleil à l'équinoxe de printemps. Ce point n'est pas fixe eu égard au mouvement de précession des équinoxes dont nous avons déjà parlé. L'axe de rotation de la Terre est appelé axe du monde ; il coupe la sphère céleste au pôle boréal Nord ou *Zénith*. Ce point se trouve actuellement dans la constellation de la Petite Ourse très près de l'étoile polaire. Toutefois, à cause de la précession des équinoxes, l'axe du monde perce la sphère céleste en un point dont la position change lentement au cours du temps. C'est ainsi qu'il y a 4 000 ans, le zénith était localisé dans la constellation du Dragon.

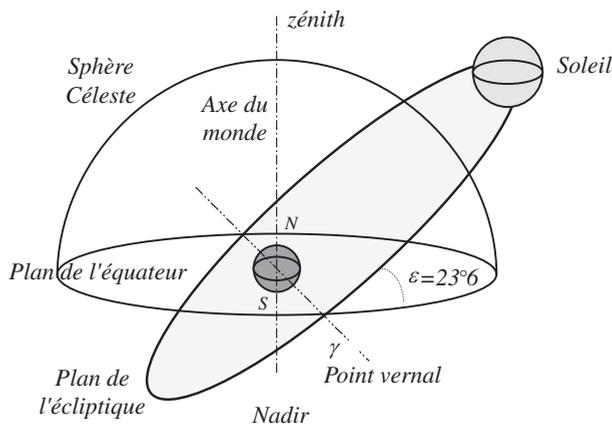


Figure A2.6 • Représentation de la sphère céleste et de l'axe du monde avec le plan de l'écliptique dans lequel se déplace le Soleil par rapport à la Terre.

Nous savons que la période de révolution peut être déterminée à partir des lois de Kepler et quantifiée avec assez de précision en appliquant le principe fondamental de la dynamique pour un système à deux corps (voir chapitres suivants).

La dimension et la forme des planètes sont très variables ; la plus grosse est Jupiter et la plus déformée Saturne. Tournant toutes autour d'un axe propre, elles ont un mouvement de rotation caractérisé par la période de *rotation sidérale* . C'est ainsi que la Terre tourne autour d'elle-même en 23 h 56' 04". Notons que cette période est très variable d'une planète à une autre et qu'il n'existe aucun calcul permettant de prédire la période de rotation.

Il est admis que cette période résulte de la rotation initiale des planètes lorsqu'elles furent créées dans la galaxie. Leur mouvement de rotation est à l'origine de leur déformation qui se caractérise par un aplatissement. L'aplatissement provient de l'action de la force centrifuge qui est plus importante à l'équateur qu'aux pôles. Sous l'action de cette force, il y a formation d'un bourrelet équatorial. Le rayon terrestre à l'équateur est donc plus grand que le rayon terrestre aux pôles. Le phénomène d'aplatissement qui en résulte est, en partie, à l'origine de la différence entre la valeur de l'accélération de la pesanteur aux pôles, $g = 9,83 \text{ ms}^{-2}$, et à l'équateur $g = 9,78 \text{ ms}^{-2}$. La plus aplatie des planètes est de loin Saturne pour laquelle l'aplatissement est voisin de 10 %. L'aplatissement de Saturne est très visible sur la figure A2.7.

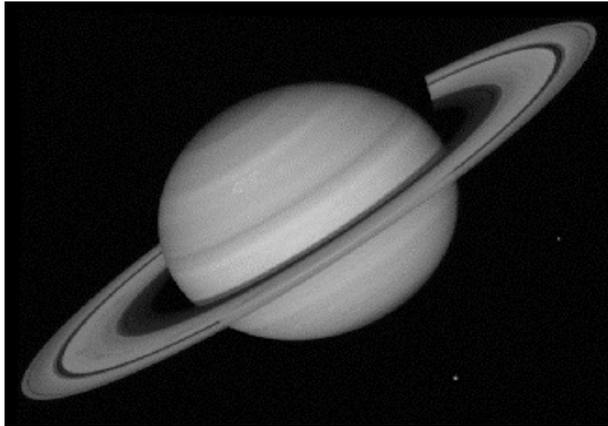


Figure A2.7 • Saturne et ses anneaux. Noter l'aplatissement de la planète très visible sur la photographie (photographie prise à partir de la sonde Voyager).

5. LA DÉFINITION DU TEMPS

La notion de temps a toujours été intimement liée au mouvement des astres. Alors que certains peuples (Arabes et Chinois) ont longtemps utilisé la Lune pour définir le temps, les Romains, sous l'empire de Jules César, ont cherché à adopter un calendrier conforme aux variations saisonnières et ont mesuré le temps en jours et en années, en prenant comme référence le passage du Soleil à l'équinoxe de printemps. Ce calendrier fut appelé en 46 av. J.-C. **calendrier julien**⁶. La période de révolution du Soleil définit alors l'année et la période de rotation de la Terre le jour. La définition du temps dépend très précisément de ces deux quantités. Les Romains l'avaient bien compris en introduisant **l'année bissextile** tous les quatre ans (l'année est rallongée d'un jour tous les quatre ans) ce qui conduisit à une durée moyenne de l'année de 365,25 jours. Malheureusement c'était sans compter sur la précession rétrograde des équinoxes ! Il fallut attendre le 4 octobre 1582 pour que le Pape Grégoire XIII s'en aperçoive et rectifie le calendrier en faisant adopter le **calendrier grégorien** dans lequel la durée de l'année est de 365,2422 jours. Le jour est donc une base de temps très importante. C'est ainsi que l'on peut définir le **jour stellaire** comme

6. Nous recommandons particulièrement la lecture suivante : *Le calendrier* par Paul Couderc Collection Que Sais-je ? n°203, P.U.F.

étant la durée qui sépare les passages successifs d'une étoile au méridien d'un même lieu (figure A2.8). On observe alors que l'étoile repasse au méridien avec une avance de quatre minutes par jour (de 24 h). Le jour stellaire vaut donc :

$$1 \text{ jour stellaire} = 23 \text{ h } 56' 4'' 0989 \text{ de temps universel.}$$

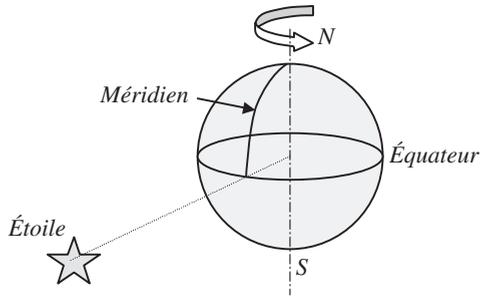


Figure A2.8 • Le jour stellaire est obtenu en mesurant la durée qui sépare deux passages consécutifs d'une étoile au méridien d'un même lieu .

Le **jour sidéral** est défini à partir de l'année sidérale obtenue par passage du Soleil au point vernal. Comme ce point n'est pas fixe à cause de la précession des équinoxes, le jour sidéral est plus court que le jour stellaire. En effet, le point vernal rétrograde de $50''$ sur l'écliptique par an, soit $(50'' / 365,25) \cos 23^\circ 7' = 0,125''$ par jour sur le plan de l'équateur. Il en résulte que le jour sidéral vaut :

$$1 \text{ jour sidéral} = 1 \text{ jour stellaire} - 0,0084 \text{ s} = 23 \text{ h } 56' 4'' 0905 \text{ de temps universel.}$$

Le **jour solaire** est défini comme étant la durée qui sépare deux passages consécutifs du Soleil au méridien d'un même lieu. Le jour solaire, dont la durée est de 24 h exactement diffère du jour stellaire à cause du mouvement de révolution de la Terre sur son orbite. Nous savons en effet que la Terre a une période de révolution de 365,25 jours, ce qui permet d'affirmer qu'elle parcourt pratiquement 1° par jour sur son orbite. Le méridien d'un même lieu serait en conjonction avec le Soleil si la Terre était fixe. Comme elle se déplace d' 1° par jour par rapport au Soleil ce méridien doit effectuer chaque jour 1° supplémentaire pour être en conjonction avec le Soleil (figure A2.9). Le temps mis par un méridien terrestre pour décrire 1° est de $24 \text{ h} / 360$ soit $24 \times 60 \text{ min} / 360 = 4 \text{ minutes}$. Le jour solaire est donc 4 minutes plus long que le jour stellaire.

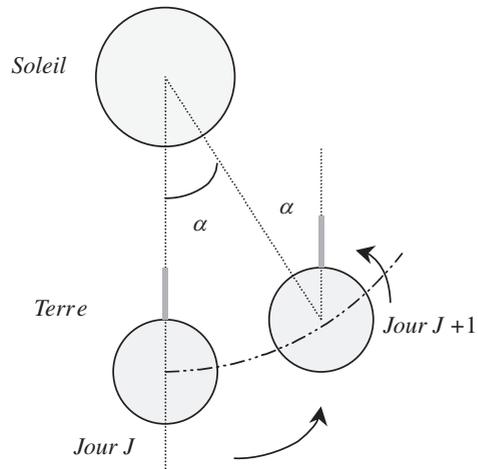


Figure A2.9 • Illustration du décalage entre jour stellaire et jour solaire. Le repère vertical qui indique la durée du jour stellaire indiquera le jour solaire lorsqu'il sera dans la direction des pointillés.

1 jour solaire (synodique) = 24 h de temps universel.

On peut, en outre, définir le temps sur une durée plus longue qui est celle de l'année. L'année tropique correspond à la durée séparant deux passages consécutifs du Soleil au point vernal, soit :

1 année tropique = 365,24220 jours de temps universel.

6. TEMPS ET REPÉRAGE DE LA LONGITUDE DES ÉTOILES

6.1. Ascension droite et déclinaison

Le repérage de la longitude d'une étoile nécessite l'utilisation d'un référentiel. Le référentiel le plus commode est en général le référentiel **équatorial**. L'un des axes du référentiel est l'axe du monde, l'autre est dirigé du centre de la Terre vers le point vernal, et le dernier axe est perpendiculaire aux précédents (figure A2.10).

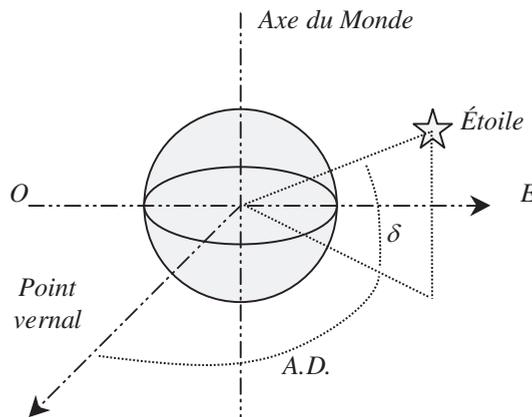


Figure A2.10 • Coordonnées équatoriales montrant la position du point vernal, l'ascension droite et la déclinaison d'une étoile.

Ces deux derniers axes sont dans le plan de l'équateur l'axe du monde étant perpendiculaire à ce plan. Les axes de ce référentiel sont fixes par rapport à la sphère céleste si l'on omet la précession équinoxiale. La longitude d'une étoile est alors repérée dans ce référentiel par son **ascension droite** noté *AD* définie en heures, minutes et secondes modulo 24 h. Toutes les étoiles d'un même méridien ont donc même longitude ou même *AD*.

La **hauteur** (ou altitude) de l'étoile par rapport à l'équateur est définie par la déclinaison de l'étoile exprimée en degrés.

6.2. Le repérage de la longitude et la rotation de la Terre

La longitude d'une étoile est donnée par son *AD* qui, en première approximation, est constante au cours du temps. Toutefois, l'*AD* d'une étoile est l'angle que fait l'étoile par rapport au point vernal et cette quantité doit être liée à l'observateur. Il importe alors de remarquer que l'observateur tourne avec la Terre alors que les étoiles restent fixes sur

la sphère céleste, donc fixes par rapport au point vernal. Pour un observateur terrestre, les étoiles semblent donc tourner en sens inverse du sens de rotation de la Terre. Nous savons que la Terre tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ; les étoiles semblent donc tourner dans le sens horaire. Elles se lèvent donc à l'est et se couchent à l'ouest exactement comme le fait le Soleil. Le repérage en longitude d'une étoile est donc compliqué par la rotation de la Terre. Une complication supplémentaire vient de la différence existant entre le jour stellaire (sidéral) et le jour solaire.

Comme nous pouvons le voir sur la figure A2.11 (page suivante), la différence entre jour sidéral et jour solaire qui est de 4 min, fait qu'un observateur terrestre verra les étoiles se lever (ou se coucher) avec une avance de 4 min par jour solaire. C'est pourquoi l'aspect du ciel change au cours du temps et c'est pourquoi il est possible de découvrir chaque jour de nouvelles constellations au lever des étoiles. Il n'en serait pas de même si l'on avait choisi comme base de temps le jour sidéral. Les étoiles auraient alors des positions fixes pour un observateur qui les regarderait tous les jours à la même heure sidérale.

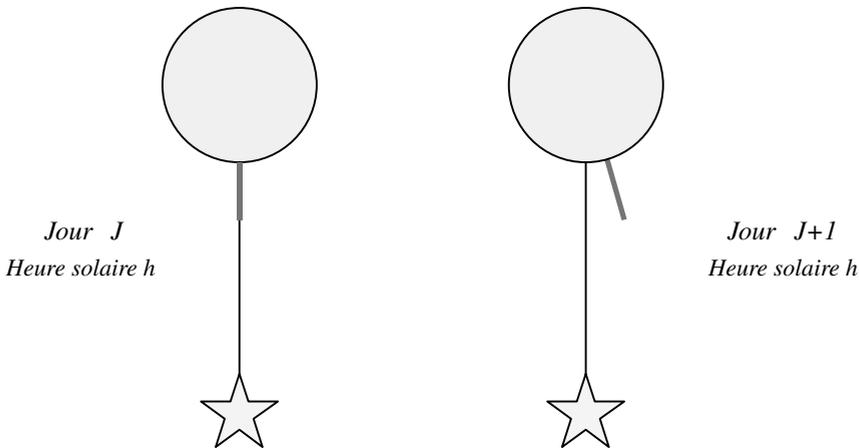


Figure A2.11 • Illustration du changement de longitude d'une étoile d'un jour solaire à une autre. Une étoile apparaît en conjonction avec le bâton avec une avance de 4 min par jour solaire.

Il est clair que le choix du jour solaire fut le plus judicieux pour les besoins de la vie courante. En effet, si l'on avait choisi le jour sidéral comme base de temps, au bout de 15 jours nous serions en avance d'une heure par rapport au Soleil et au bout de 12 fois ce temps (6 mois) il serait midi au Soleil et minuit à la pendule.

Malheureusement, ce choix de l'écoulement du temps complique singulièrement notre tâche pour ce qui est du repérage des étoiles. Le jour sidéral aurait été, dans ce cas, plus judicieux car, dans cette base de temps, les étoiles sont à une heure précise au même endroit. Il nous faut donc tenir compte du décalage entre jour solaire et jour sidéral pour repérer la longitude des étoiles.

Nous présentons maintenant la façon de procéder pour déterminer la longitude d'une étoile et comme cette longitude reste la même pour un méridien d'observation donné, nous nous placerons par la suite sur les graphes à l'équateur :

- la première étape consiste à consulter dans la table des éphémérides l'ascension droite de l'étoile que l'on cherche à observer ;
- la deuxième étape consiste à se fixer une heure d'observation et la position de l'observateur (longitude et latitude).

Il importe alors de déterminer l'heure solaire au lieu d'observation qui dépend du pays dans lequel on se trouve. En France, le 21 mai 1996, une observation réalisée à 22 heures légales (on parle ici de **temps légal** qui est le temps adopté par les états) sur le méridien de Greenwich sera faite à 20 heures solaire ou 20 heures de TUG (*Temps Universel de Greenwich*) car nous sommes alors à l'heure d'été et nous avons une avance de 2 heures sur le Soleil (alors qu'en hiver l'avance n'est que d'une heure et il serait alors 21 heures TUG).

Si cette observation est faite en dehors du méridien de Greenwich, il faut corriger le temps de la longitude d'observation. Ainsi le 21 mai 1996 à 22 heures, le **temps local** (TL) n'est pas le même à Strasbourg ($7^{\circ}45'$), au Mans ($0,12^{\circ}$) ou à Brest ($-4^{\circ}29'$). Pour faire le calcul il suffit de convertir la longitude du lieu en temps par le biais de la période de rotation de la Terre $24 \text{ h} = 360^{\circ}$ soit $1^{\circ} = 4 \text{ min}$. Pour reprendre notre exemple s'il est 20 heures au méridien de Greenwich, il est 20 heures 01 minute au Mans, 20 heures 31 minutes à Strasbourg et 19 heures 42 minutes à Brest en temps local.

Il faut alors convertir ce temps local (TL) en temps sidéral local (TSL). Pour cela on peut utiliser une méthode grossière qui consiste à utiliser le fait qu'il y a par jour un décalage de 4 min entre le temps sidéral et le temps légal. On se fixe comme origine du temps sidéral le passage au zénith du Soleil au point vernal, c'est-à-dire l'équinoxe de printemps. Il est alors 0 heure sidérale alors qu'il est 12 heures solaire en temps universel. On utilise alors la correction suivante pour passer du temps universel au temps sidéral :

$$\text{Heure Sidérale} = \text{Heure Solaire} + C$$

où C est une constante donnée dans le tableau 9.2.

| Jour | Heure Solaire | Heure Sidérale | C |
|--------------|---------------|----------------|------------|
| 21 mars | 12 h | 0 h | 12 h |
| 22 mars | 12 h | 0 h 04 min | 12 h 4 min |
| 23 mars | 12 h | 0 h 08 min | 12 h 8 min |
| 21 juin | 12 h | 6 h | 18 h |
| 21 septembre | 12 h | 12 h | 0 h |
| 21 décembre | 12 h | 18 h | 6 h |

Tableau A2.2 • Valeurs de la constante C à différentes dates.

Il nous faut donc trouver cette conversion le 21 mai 1996. Du 21 mars au 21 mai, il y a 60 jours soit un décalage de $60 \times 4 \text{ min} = 240 \text{ min} = 4 \text{ h}$. À 12 heures solaire, il sera donc 4 heures sidérale et la correction est donc de 16 heures. L'heure sidérale locale au Mans le 21 mai 1996 à 22 heures légale ou 20 heures 01 minute TU sera donc de :

$$TSL = TL + C = 20 \text{ h } 01 + 16 \text{ h} + 8 \times 4 \text{ min} / 24 = 12 \text{ h } 02 \text{ min } 33 \text{ s (modulo } 24 \text{ h)}.$$

Nous savons donc que, par rapport aux étoiles, il est 12 h 0 min 33 s au Mans le 21 juin à 22 heures. Cet angle s'appelle l'angle horaire du méridien du lieu d'observation.

L'**angle horaire** sous lequel nous voyons l'étoile du méridien du lieu d'observation est donné par la différence entre l'angle horaire du méridien d'observation ou TSL et l'ascension droite de l'astre comme l'indique la figure A2.12 :

$$\psi = AH = TSL - AD$$

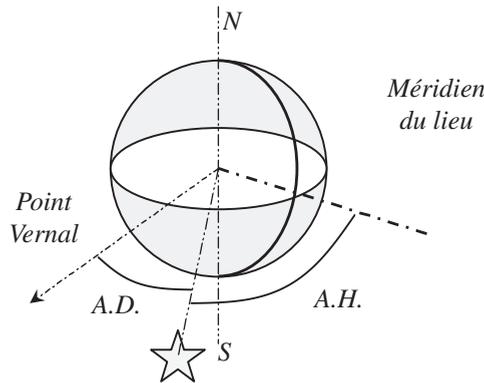


Figure A2.12 • Illustration de la définition de l'angle horaire *AH* et de l'ascension droite *AD*.

7. REPÉRAGE DE L'ALTITUDE DU SOLEIL AU COURS DE L'ANNÉE

7.1. Interprétation des saisons

Du fait de l'inclinaison de l'axe de rotation de la Terre par rapport au plan de l'écliptique, l'inclinaison des rayons du Soleil varie au cours de l'année. Elle dépend également du lieu d'observation (figure A2.13).

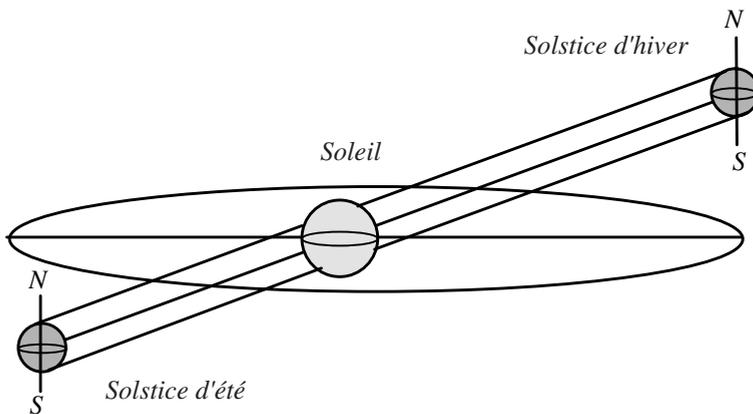


Figure A2.13 • Illustration de l'influence de la position de la Terre par rapport au Soleil sur la définition des saisons.

L'angle que font les rayons du Soleil lorsque celui-ci est au zénith (midi au Soleil) est de $23^{\circ}7'$ le 21 juin et de $-23^{\circ}7'$ le 21 décembre par rapport au plan de l'équateur. Aux équinoxes, cet angle est égal à 0° . On voit ainsi que le 21 décembre à 12 heures solaires, seule une partie de l'hémisphère nord est éclairée par les rayons solaires alors que tout l'hémisphère sud l'est. C'est la nuit arctique et le Soleil de minuit dans l'hémisphère austral. Au solstice d'été la situation est inversée ; notons que la Terre est alors au plus loin du Soleil. Les saisons s'expliquent donc par la variation de l'inclinaison des rayons du Soleil par rapport au plan de l'équateur et non par l'éloignement de la Terre par rapport au Soleil.

7.2. Altitude du Soleil à son zénith

Nous venons de voir que les rayons solaires ont une inclinaison variable au cours des saisons. Cela entraîne également que le Soleil n'est pas toujours perçu à la même altitude au cours de l'année. En hiver il est bas sur l'horizon et haut en été. Si l'on considère un lieu de latitude λ , la figure A2.14 indique comment repérer la hauteur du Soleil à son zénith :

$$\alpha = 90 - (\lambda - \delta)$$

où δ est l'angle que font les rayons du Soleil avec le plan de l'équateur.

Au solstice d'été, à Paris de latitude 48° , le Soleil culmine à son zénith à une altitude de $90 - (48 - 23) = 65^\circ$, alors que cet angle n'est plus que de 42° au équinoxes et de 19° au solstice d'hiver. Il y a donc une amplitude de variation de 46° entre l'hiver et l'été, quel que soit le lieu considéré. Toutefois, cette amplitude est plus ou moins perceptible selon le lieu. Ainsi, pour prendre les extrêmes, l'altitude du Soleil varie de 113° à 67° à l'équateur et de 0° à 23° aux pôles, sachant qu'en ces lieux il est invisible pendant six mois.

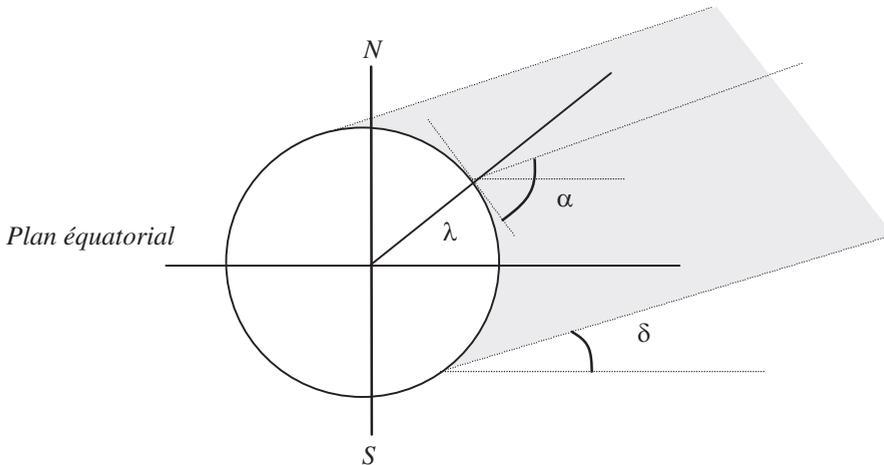


Figure A2.14 • Représentation de l'inclinaison des rayons du Soleil en un lieu de latitude λ .

À RETENIR

- **L'astronomie** est la science qui étudie la position, le mouvement et le comportement des corps célestes.
- La **Voie Lactée** est le nom donné à notre galaxie. Celle-ci est un vaste disque aplati de 100 000 a.l. de diamètre et de 5 000 a.l. d'épaisseur.
- Toutes les planètes de notre système solaire décrivent des mouvements gouvernés par les trois lois de Kepler.

- Toutes les planètes ont un **mouvement plan**. Le plan de leur trajectoire s'appelle l'**écliptique**.
- La position d'une étoile (ou d'une planète) est repérée dans le référentiel équatorial par son **ascension droite** (angle que fait le méridien de l'étoile avec le point vernal) et sa **hauteur**.
- À cause de la rotation de la Terre sur elle-même le repérage de la position d'un astre nécessite la connaissance du temps sidéral (TSL). L'**angle horaire** sous lequel on observe une étoile d'un méridien d'observation est donné par la différence du temps sidéral local et de l'ascension soit $AH = TSL - AD$.
- L'altitude d'un astre, quand il culmine à son zénith, dépend de la latitude du point d'observation. Si sa déclinaison est δ , son altitude dans un lieu de latitude λ est donné par $\alpha = 90 - (\lambda - \delta)$.

BIBLIOGRAPHIE

- **Mécanique du point. Cours et problèmes résolus. LI, IUT.** *F. Viot*, Dunod (2005).
- **Mécanique du point. Exercices corrigés. 1^{re} année MPSI-PCSI-PTSI.** *David Teysier*, Ellipses (2005).
- **La Physique en Fac, Mécanique 1^{re} et 2^e année.** *J. Cipriani*, 2^e édition, Edisciences (2003).
- **Mécanique 1^{re} année MPSI, PCSI,** *J. M. Brébec*, collection *H. Prépa*, Hachette Supérieur (2003).
- **Mécanique du point, problèmes résolus.** *H. Lumbroso*, Dunod (2002)
- **Toute la mécanique. Cours et exercices corrigés.** *L. Bocquet, J. P. Faroux, J. Renault*, MPSI-PCSI, J'intègre, Dunod (2002).
- **Mécanique I,** *H. Gié, J. P. Sarmant*, Tec et Doc (1996).
- **Mécanique. Fondements et applications.** *J. P. Perez*, 5^e édition, Coll. Enseignement de la Physique, Masson (1997).
- **Cours de Physique de Berkeley, 1. Mécanique,** *C. Kittel, W.D. Knight*, en français chez Dunod (1999).
- **Le cours de Physique de Feynman, Mécanique I,** *R. Feynman*, en français chez Dunod (1999).
- **Astronomie et astrophysique.** *M. Séguin et B. Villeneuve*, Masson (1995).
- **Mathématiques pour la Physique.** *Y. Noïrot, J.-L. Quereyl et J. Mesplède*, Bréal (1985)

INDEX

A

Abscisse curviligne, 8
Accélération
 angulaire, 11
 coordonnées cartésiennes, 9
 coordonnées polaires, 9
 d'entraînement, 42, 188
 dans la base de Frenet, 10
 de Coriolis, 42, 188
 définition, 9
 relative, 42
Angle
 de frottement, 70
 horaire, 320
Année
 bissextile, 316
 galactique, 310
 platonique, 310
Apesanteur, 196
Apogée, 258
Ascension droite, 318
Astéroïde, 312
Astronomie, 311
Astrophysique, 311

B

Bande passante, 165
Barycentre, 227, 241
Base de Frenet, 7
Bifurcation, 194
Binet, 255
Bras de levier, 293

C

Calendrier
 grégorien, 316
 julien, 316
Centre d'inertie, 58
Centre de masse, 227
Champ, 285
 de gravitation, 285
 de scalaires, 283
Champ de gravitation, 176
 à la surface de la Terre, 177

 au voisinage de la surface de la Terre, 178
Champ de pesanteur, 200
Chronologie, 3
Cinématique, 1
Circulation, 94, 307
Constante des aires, 237
Constellation, 312
 du zodiaque, 311
Coordonnées, 4
 cartésiennes, 286
 cylindriques, 287
 sphériques, 287
Cosmogonie, 311
Cosmologie, 311

D

Décrément logarithmique, 135
Dérivée, 294
 partielle, 297
Déviation vers l'est, 202
Différentielle
 d'un vecteur, 300
 d'une fonction à une variable, 294
 totale, 299

E

Écliptique, 314
Énergie mécanique, 103
Énergie potentielle, 100
 de gravitation, 179
 de pesanteur, 101
 effective, 238
 élastique, 102
Équation
 caractéristique, 133
 différentielle, 12
 différentielle non linéaire, 12
 horaire, 13
Équinoxes, 315
État lié, 104, 239
États de diffusion, 239
Excentricité, 257

F

- Facteur de qualité, 165
- Force
 - centrale, 234
 - d'inertie, 188
 - d'inertie centrifuge, 193, 197
- Forces
 - conservatives, 99
 - d'interaction, 66
 - de contact, 68
 - de frottement, 68
- Formule de Binet, 255
- Foucault, 188
- Frottement
 - solide, 69
 - visqueux ou fluide, 69

G

- Galaxie, 312
- Gradient, 302
- Grand axe, 259

H – I

- Hauteur, 318
- Impédance mécanique, 163

J – K

- Jour
 - sidéral, 317
 - solaire, 317
 - stellaire, 316
- Kepler, 264

L

- Libération, 239
- Loi
 - de composition des accélérations, 42
 - de composition des vitesses, 36
 - de Newton (1^{ère} loi), 60
 - de Newton (2^e loi), 62
 - de Newton (3^e loi), 65
 - des aires, 236
 - générale de composition des vitesses, 39
- Lois de Kepler, 261, 313

M

- Marée (phénomène des), 205
- Masse réduite, 230

Moment

- cinétique, 64
- cinétique d'un système à deux corps, 229
- d'une force, 292

Mouvement

- accélééré, retardé, 13
- circulaire uniforme, 15
- de rotation de R' par rapport à R , 31
- de translation de R' par rapport à R , 29
- hélicoïdal, 16
- rectiligne sinusoidal, 14
- rectiligne uniforme, 12
- uniformément varié, 13

N – O

- Nébuleuse, 312

Oscillateur

- amorti par frottement fluide ou visqueux, 132
- amorti par frottement solide, 137
- critique, 135
- harmonique, 125

Oscillations forcées, 155**P**

- Périgée, 258
- Paramètre, 257
- Pendule de Foucault, 220
- Planète, 312
 - jovienne, 313
 - tellurique, 313
- Poids, 197
 - apparent, 196
- Point vernal, 315
- Portrait de phase, 141
- Précession des équinoxes, 310
- Principe d'inertie, 57, 60
- Principe des actions réciproques, 65
- Produit
 - scalaire, 288
 - vectorel, 290
- Pseudopériode, 134
- Puissance, 98
 - instantanée, 163
 - moyenne, 164
- Puits de potentiel, 104

Q – R

Quadratures (époque des), 207

Quantité de mouvement, 59

Référentiel, 2

de Copernic, 3

définition, 5

du centre de masse, 229

équatorial, 318

géocentrique, 3

non galiléen, 187

terrestre, 3

Régime forcé, 158

Règle du tire bouchon, 290

Repère, 286

Résonance, 161

Rotation sidérale, 315

S

Saisons, 321

Satellite

en orbite circulaire, 183

géostationnaire, 184

Scalars, 283

Stabilité, 104

Système

de coordonnées, 4

isolé, 58

matériel, 57

pseudo-isolé, 58

Syzygies (époque des), 207

T

Temps

légal, 320

local, 320

universel de Greenwich, 320

Théorème

de l'énergie cinétique, 98

de l'énergie mécanique, 103

de la dérivée d'un vecteur unitaire

tournant, 294

de la force centrale, 234

du moment cinétique, 64

Transformation de Galilée, 35

Translation

circulaire, 31

quelconque, 31

rectiligne unforme, 30

Travail, 94

de la force élastique, 97

de la force de Lorentz, 97

du poids, 95

élémentaire, 94

Tribologie, 71

V – Z

Vecteur, 283

tournant, 293

Vitesse

angulaire, 11

coordonnées cartésiennes, 6

coordonnées cylindriques, 7

coordonnées polaires, 7

d'entraînement, 39

dans la base de Frenet, 8

de libération, 240

définition, 5

relative, 39

Voie Lactée, 312

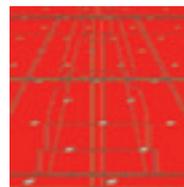
Zénith, 315

050586 - (I) - (1,5) - OSB 80° - PUB - NGT

Achevé d'imprimer sur les presses de
SNEL Grafics sa
Z.I. des Hauts-Sarts - Zone 3
Rue Fond des Fourches 21 – B-4041 Vottem (Herstal)
Tél +32(0)4 344 65 60 - Fax +32(0)4 286 99 61
Juillet 2007 – 42319

Dépôt légal : août 2007

Imprimé en Belgique



Alain Gibaud • Michel Henry

COURS DE PHYSIQUE MÉCANIQUE DU POINT

Cet ouvrage aborde l'ensemble de la mécanique du point et introduit les concepts d'énergie et de puissance. Dans cette seconde édition entièrement actualisée, une nouvelle rubrique d'*Exercices d'application avec solution détaillée* complète les applications et les nombreux exercices corrigés.

Les deux premiers chapitres sont dédiés à la cinématique du point ainsi qu'aux changements de référentiels. Ensuite les lois fondamentales de la mécanique sont présentées ainsi que les concepts d'énergie et de puissance et les oscillateurs libres et forcés. Un chapitre est consacré à la caractérisation des référentiels non galiléens : cas du référentiel terrestre avec le poids d'un corps et du référentiel géocentrique avec le phénomène des marées. Les deux derniers chapitres sont consacrés au problème à deux corps. L'accent est mis sur la notion de référentiel barycentrique.

Les outils mathématiques nécessaires à la bonne compréhension d'un cours de physique et les notions de base de la mécanique céleste sont présentés en fin d'ouvrage.

COURS DE PHYSIQUE

Ce cours de physique présente les grands domaines de la physique enseignés en 1^{re}, 2^e et/ou 3^e années de licence.

- *Optique* (Pariset/Le Boiteux)
- *Mécanique du point* (Gibaud/Henry)
- *Mathématiques pour la physique* (Noirot/Brouillet)
- *Électromagnétisme 1 et 2* (Cordier)



6647754
ISBN 978-2-10-050586-9



www.dunod.com



ALAIN GIBAUD
est professeur à l'université
du Maine.

MICHEL HENRY
est maître de conférences à
l'IUFM des Pays de Loire.

