

Serie TD3 (ing)

Exo1

ona: $\vec{F} = \vec{F}_0 \sin(\omega t)$

Pour trouver le vecteur accélération on applique PFD :

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a}(t) = \frac{\vec{F}}{m}$$

Alors: $\boxed{\vec{a}(t) = \frac{\vec{F}_0 \sin(\omega t)}{m}}$

le vecteur vitesse $\vec{v}$ on a $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

Alors $\vec{v} = \int \vec{a} dt =$

$$= \int \frac{\vec{F}_0 \sin(\omega t)}{m} dt = \frac{\vec{F}_0}{m} \int \sin(\omega t) dt$$

$$\boxed{\vec{v} = -\frac{\vec{F}_0}{\omega m} \cos(\omega t) + C}$$

on condition initiale: $\vec{v}(t=0) = \vec{0}$

$$-\frac{\vec{F}_0}{m} + \vec{C}_1 = 0 \Rightarrow \vec{C}_1 = \frac{\vec{F}_0}{\omega m}$$

donc $\boxed{\vec{v} = -\frac{\vec{F}_0 \cos(\omega t)}{\omega m} + \frac{\vec{F}_0}{\omega m}}$

le vecteur de position

$$\vec{OM}(t) = \int \vec{v} dt = \int \left(1 - \cos(\omega t) \right) \frac{\vec{F}_0}{m\omega} dt$$

$$\vec{OM}(t) = \left(t - \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \right) \frac{\vec{F}_0}{m\omega} + \vec{C}_2$$

on condition initiale

$$\vec{OM}(t=0) = 0 \Rightarrow \vec{C}_2 = \vec{0}$$

donc

$$\boxed{\vec{OM}(t) = \left(t - \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \right) \frac{\vec{F}_0}{m\omega}}$$

quantité du Mvt.

$$\vec{P}(t) = m \vec{v}(t)$$

donc $\vec{P}(t) = \cancel{m} (1 - \cos(\omega t)) \frac{\vec{F}_0}{\cancel{m}\omega}$

$$\boxed{\vec{P}(t) = (1 - \cos(\omega t)) \frac{\vec{F}_0}{\omega}}$$

2) Montrer que $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$

ona: $\frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a}$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(1 - \cos(\omega t)) \frac{\vec{F}_0}{\omega}}{dt} = \vec{F}_0 \sin(\omega t)$$

$$m\vec{a} = \cancel{m} \left(\frac{\vec{F}_0 \sin(\omega t)}{\cancel{m}} \right) = \vec{F}_0 \sin(\omega t)$$

donc la relation est vérifiée.

Méthode 2

ona: $\left\{ \begin{array}{l} \vec{F} = m\vec{a} \quad \text{--- (1)} \\ \text{et} \\ \frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a} \quad \text{(2)} \end{array} \right.$

donc: Alors

$$\textcircled{1} = \textcircled{2}$$

donc

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}}$$

Exo 2 :

avant la collision :

le système avait une quantité de mouvement $\vec{P}$:

$$\vec{P} = M\vec{V} + m\vec{v}$$

Après la collision :

$$\vec{P}' = (M+m)\vec{V}'$$

Conservation de la quantité de mouvement :

$$\vec{P} = \vec{P}'$$

Alors :

$$M\vec{V} + m\vec{v} = (M+m)\vec{V}'$$

projection sur Ox :

$$MV_x + mv_x = (M+m)V'_x$$

donc :

$$MV = (M+m)V' \cos \alpha \quad \text{--- ①}$$

projection sur Oy :

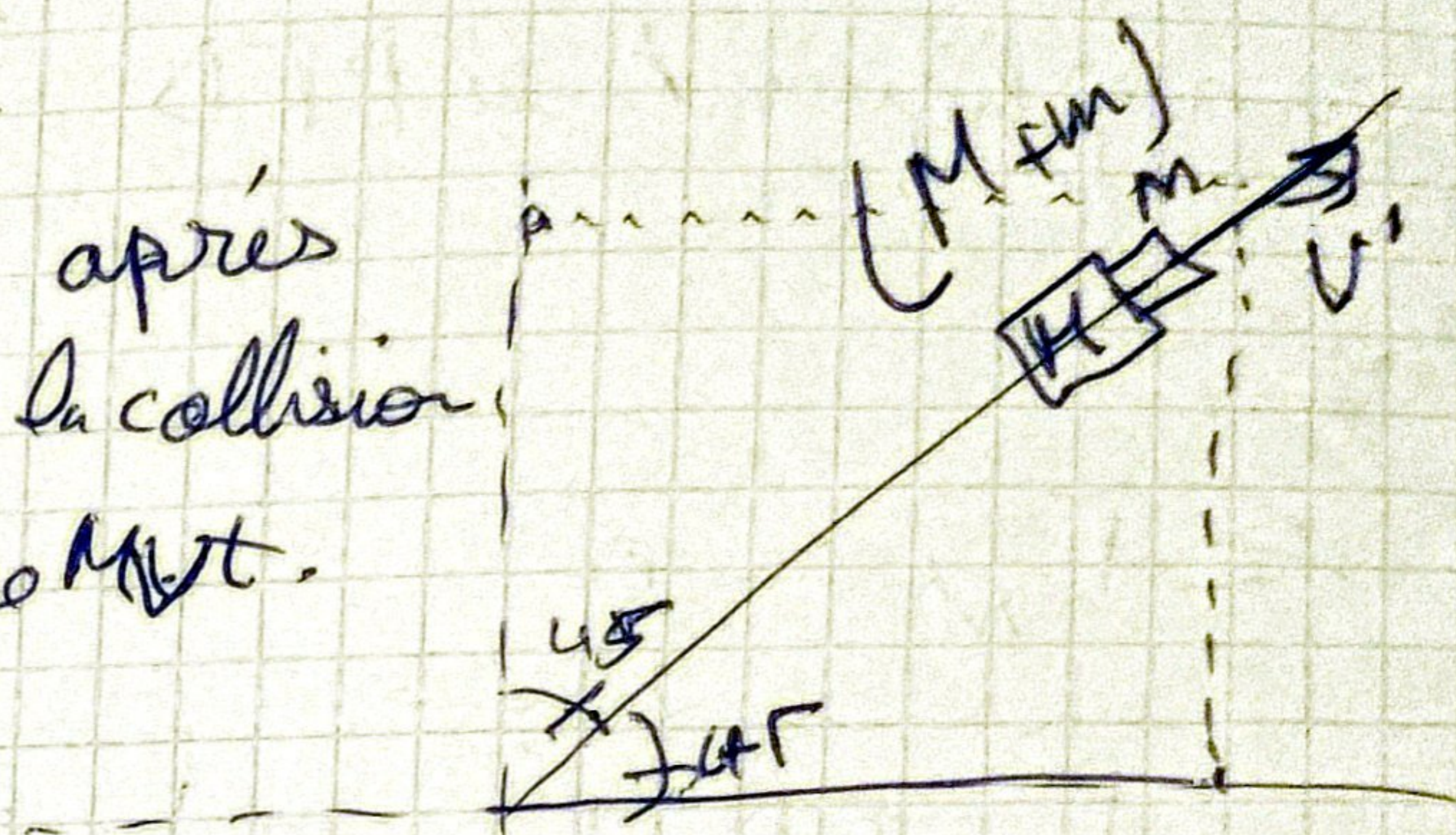
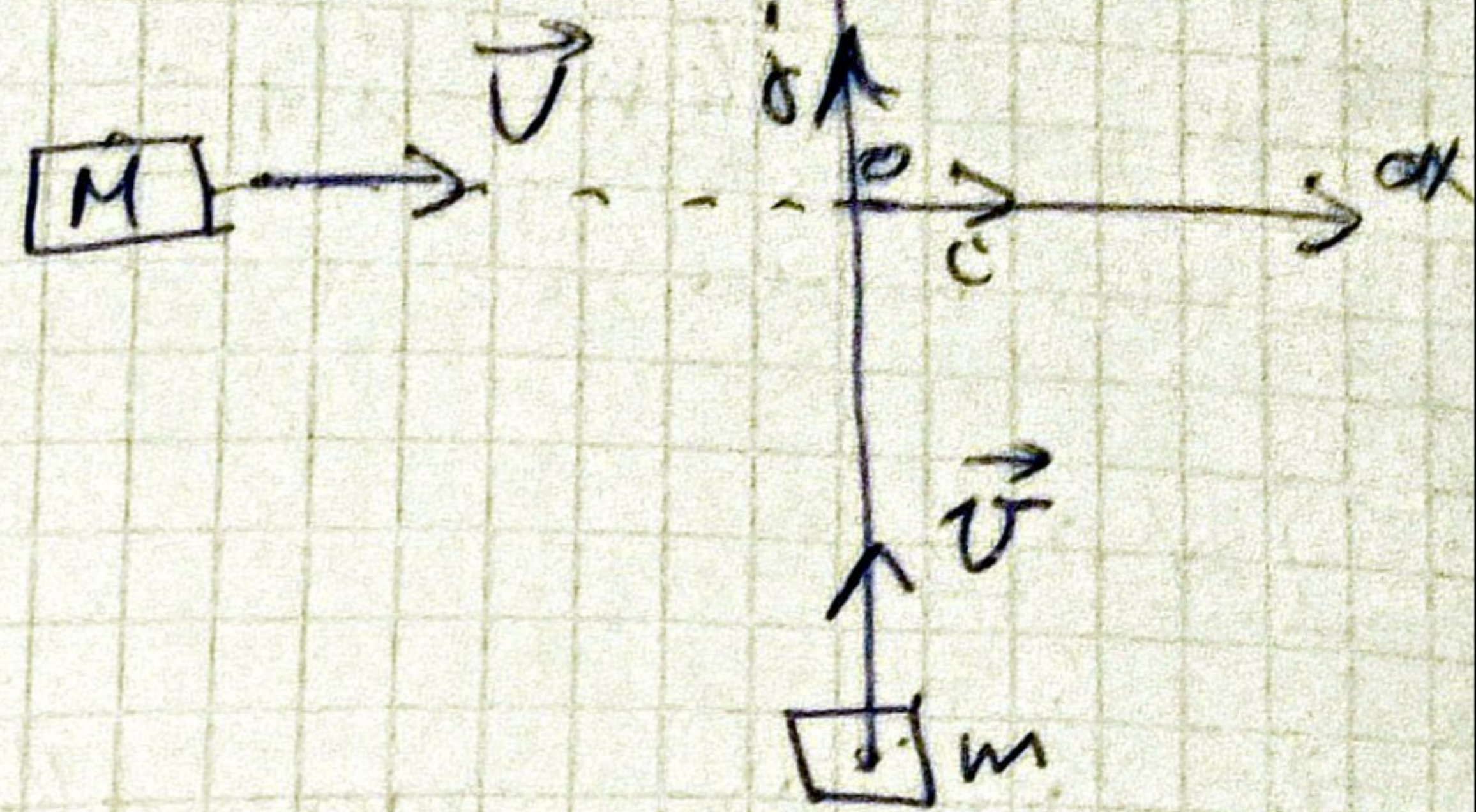
$$MV_y + mv_y = (M+m)V'_y$$

donc : $mv = (M+m)V' \sin \alpha \quad \text{--- ②}$

le rapport entre ① et ② donne :

$$\frac{mv}{MV} = \tan \alpha$$

collision



$$\Rightarrow v = \frac{M}{m} v \tan \alpha$$

AN: $v = 320 \text{ km/h}$

vitesses impossibles pour une petite voiture normale, donc la tension n'a pas raison.

Exo 3:

1) La masse minimale m_2 de S_2 en appliquant la PFD:

Sur S_1 :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

$$\vec{P}_1 + \vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{F}_S = \vec{0}$$

Projection:

$$\sum \text{ox} : -P_1 \sin \alpha + T_1 - F_S = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$\sum \text{oy} = -P_1 \cos \alpha + R = 0 \quad \text{--- (2)}$$

$$\text{(2)} \rightarrow \boxed{R = P_1 \cos \alpha}$$

avec: $F_S = \mu_S R = \mu_S P_1 \cos \alpha$

l'eq (1) devient

$$P_1 (\mu_S \cos \alpha + \sin \alpha) + T_1 = 0$$

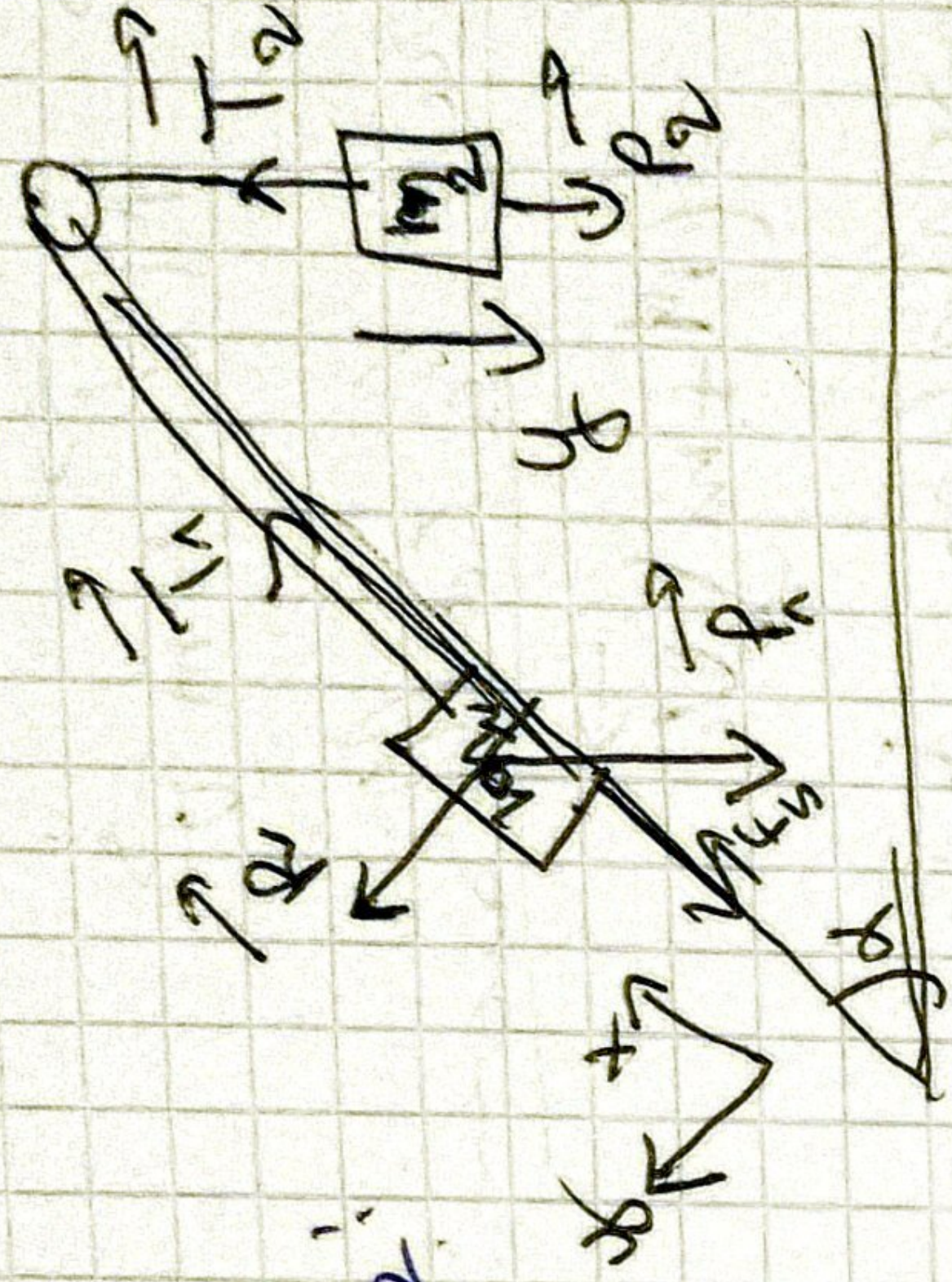
$$T_1 = P_1 (\mu_S \sin \alpha + \cos \alpha) \quad \text{--- (3)}$$

Sur S_2 :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

$$\vec{P}_2 + \vec{T}_2 = \vec{0}$$

Projection:



$$\begin{cases} \text{Ox} : \vec{0} \\ \text{Oy} : \vec{P}_2 - \vec{T}_2 = \vec{0} \end{cases}$$

donc $T_2 = P_2$ --- (4)

avec: $T_2 = T_1$

$$P_2 = P_1 (\sin \alpha + \mu_s \cos \alpha) \rightarrow m_{2\min} = m_1 (\sin \alpha + \mu_s \cos \alpha)$$

$$m_{2\min} = 1,1 \text{ kg}$$

si on prend $m_2 = 1,5 \text{ kg}$.

l'accélération prise par les deux masses:

On a $m_2 > m_{2\min}$ le Mut se fait dans le sens de m_2 on applique le PFD:

Sur S_1

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_{\text{ext}} &= m_1 \vec{a} \\ \vec{P}_1 + \vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{F}_s &= m_1 \vec{a} \end{aligned}$$

Projection

$$\begin{cases} \text{Ox} : -P_1 \sin \alpha + T_1 - F_s = m_1 a \text{ --- (1)} \\ \text{Oy} : -P_1 \cos \alpha + R = 0 \text{ --- (2)} \end{cases}$$

Avec

$$\text{de (1)} \rightarrow -P_1 (\mu_s \cos \alpha + \sin \alpha) + T_1 = m_1 a \text{ --- (3)}$$

Sur S_2 :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m_2 \vec{a} \rightarrow \vec{P}_2 + \vec{T}_2 = m_2 \vec{a}$$

Projection

$$\begin{cases} \text{Ox} : \vec{0} \\ \text{Oy} : P_2 - T_2 = m_2 a \text{ --- (4)} \end{cases}$$

avec $T_2 = T_1$.

(3) + (4) :

$$-P_1(\mu_s \cos \alpha + \sin \alpha) + P_2 = (m_1 + m_2)a.$$

donc $P_2 = m_2 \cdot g$; $P_1 = m_1 g$

$$a = \frac{m_2 + m_1(\mu_s \cos \alpha + \sin \alpha)}{(m_2 + m_1)} \cdot g$$

$$a = 2,91 \text{ m/s}^2.$$

La hauteur h .

$$h = \frac{1}{2} a t_h^2 = 5,83 \text{ m}.$$

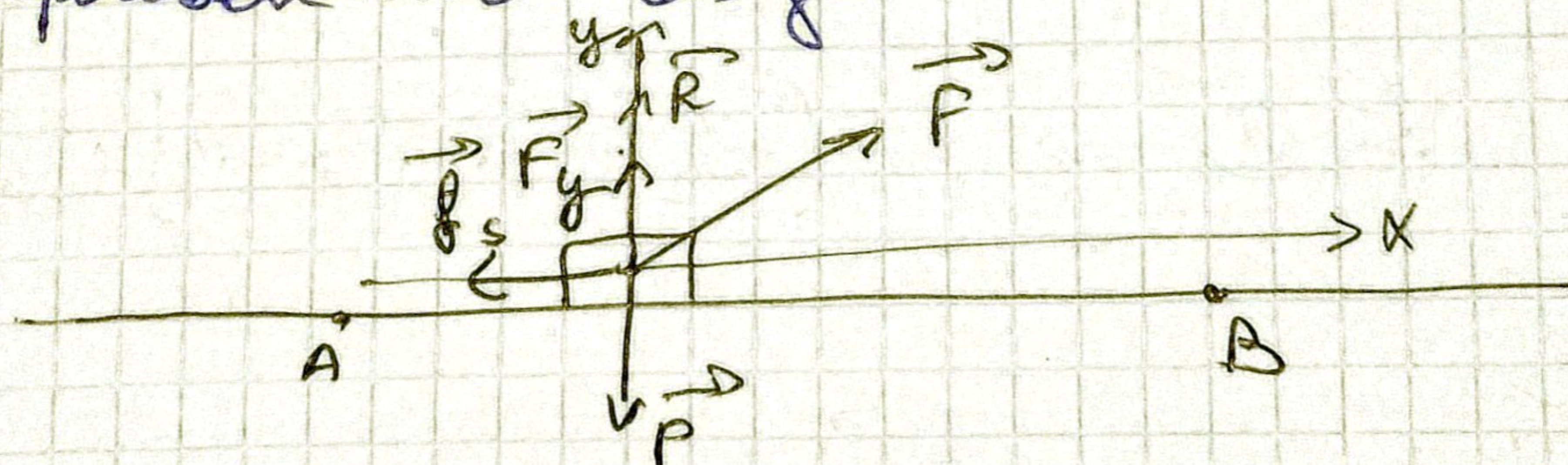
La vitesse des deux masses lorsque la masse m_2 heurte le sol :

$$v = a t_h = 2,91 \text{ m/s}.$$

Exo 4

Partie 1 a l'équilibre :

1) ~~les~~ Représentation des forces :



2) En appliquant PFD :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} ; \vec{F} + \vec{R} + \vec{P} + \vec{f}_s = \vec{0}.$$

3) la projection

$$\begin{cases} \text{ox: } F_x - f_s = 0 & \text{--- (1)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{oy: } R + F_y - P = 0 & \text{--- (2)} \end{cases}$$

4) La valeur minimale de la force d'entraînement $F_{\min}$

$$\text{De (1): } F_x = f_s = 8.66 \text{ N} \Rightarrow (F_x)_{\min} = 8.66 \text{ N.}$$

$$F_x = F \cos \theta \Rightarrow F = \frac{F_x}{\cos \theta} \Rightarrow F_{\min} = \frac{(F_x)_{\min}}{\cos \theta} = 10.38 \text{ N}$$

le coefficient de frottement statique μ_s .

$$\text{ana: } f_s = \mu_s R \rightarrow \mu_s = \frac{f_s}{R}$$

$$\text{(2) donc: } R = P - F_y = mg - F \sin \theta.$$

$$\text{D'où: } \mu_s = \frac{f_s}{mg - F \sin \theta} \Rightarrow \mu_s \approx 0.2$$

partie 2 en Mvt

$$\text{on pose } F = 12 \text{ N} > F_{\min}$$

1) l'accélération:

En appliquant PFD:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a} \rightarrow \vec{F} + \vec{R} + \vec{P} + \vec{f}_s = m \vec{a}$$

projection

$$\begin{cases} \text{ox: } F_x - f_c = ma \Rightarrow a = \frac{F_x - f_c}{m} = \frac{F \cos \theta - \mu R}{m} \\ \text{oy: } R + F_y - P = 0 \Rightarrow R = P - F_y = P - F \sin \theta \end{cases}$$

donc $a = \frac{F \cos \theta - M_c (P - F \sin \theta)}{m} \approx 1,22 \text{ m/s}^2$

2) la nature de Mvt:

La trajectoire est rectiligne (ox), et l'accélération constante ($a > 0$). donc le Mvt est rectiligne uniformément accéléré (MRUA).

3) expressions vitesse + équation horaire $x(t)$.

$$\begin{cases} v(t) = at + v_0 & ; v(t) = 1,22t \\ x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 & ; x(t) = 0,61t^2 \end{cases}$$

4) le temps t_b nécessaire. Sachant que $AB = 5 \text{ m}$.

~~$$AB = \frac{1}{2}at_b^2 \quad \text{donc} \quad t_b^2 = \frac{2AB}{a}$$~~

~~$$t_b = \sqrt{\frac{2AB}{a}}$$~~

$$AB = \frac{1}{2}at_b^2 = 0,61t_b^2$$

donc $t_b^2 = \frac{2AB}{0,61}$

$$t_b = \sqrt{\frac{2AB}{0,61}} \approx \cancel{2,86 \text{ s}} \cdot 4,04 \text{ s}$$

Exo 5

(PFD) $\vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$

$$\begin{cases} -T \sin \theta = m a_g & \text{--- (1)} \\ T \cos \theta - P = 0 & \text{--- (2)} \end{cases}$$

base
cylind.
 $(\vec{e}_g, \vec{e}_\theta, \vec{k})$

(1) $\rightarrow -T \sin \theta = -m R \theta^2$ --- (3)

(2) $\rightarrow T \cos \theta = mg$

$T = \frac{mg}{\cos \theta} = \underline{\underline{AN: T = 2 N}}$

par déf: $T = k \Delta l = k(l - l_0) = \frac{mg}{\cos \theta}$

$l = \frac{mg}{k \cos \theta} + l_0$ $\underline{\underline{AN: l = 0,2 m}}$

nbre de tour / s $\rightarrow$ rotation angulaire $\omega = \dot{\theta}$

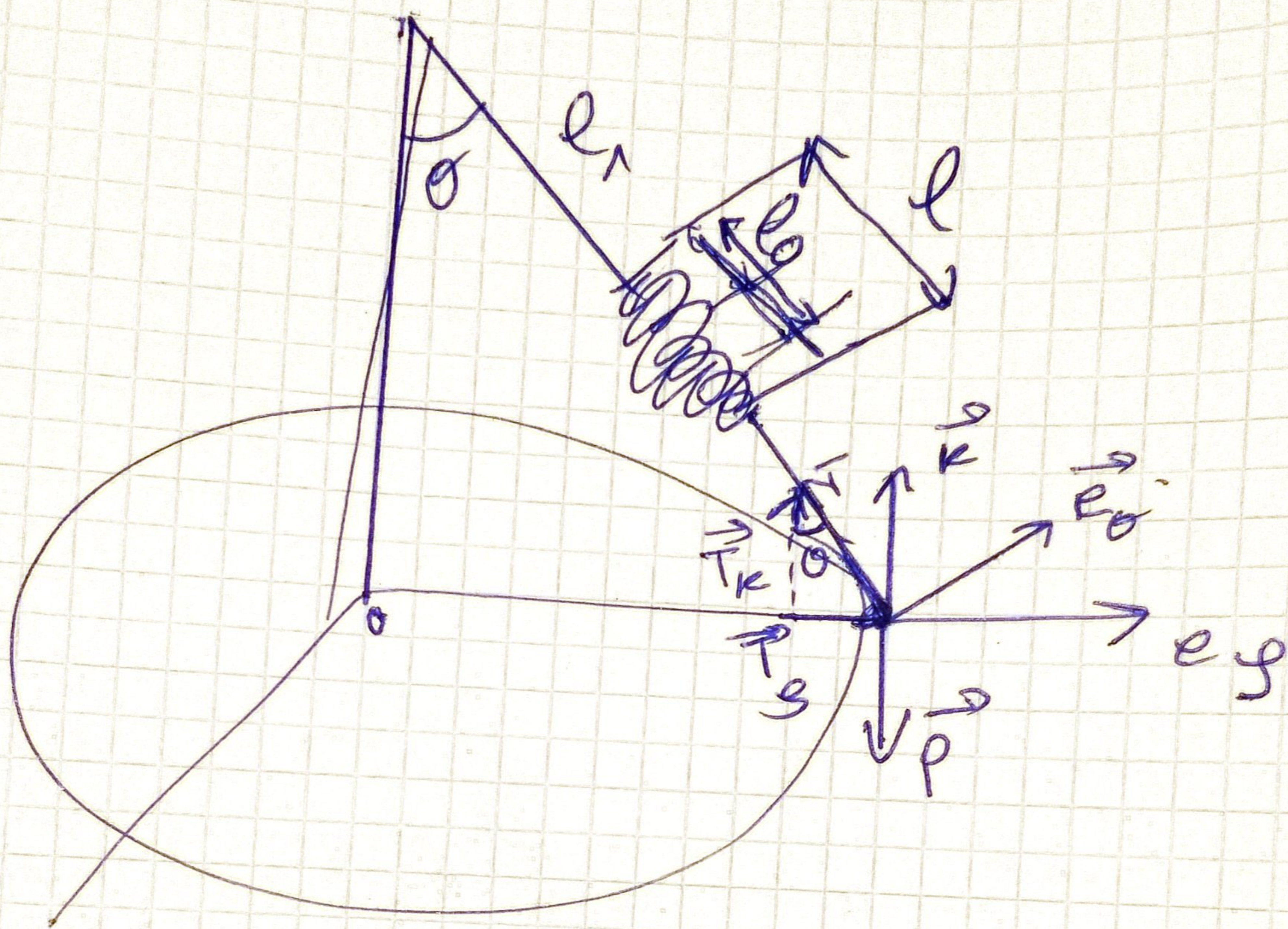
(3) $\rightarrow +T \sin \theta = m R \omega^2 \rightarrow \omega = \frac{T \sin \theta}{m R}$

$R = (l_1 + l) \sin \theta$

$\Rightarrow \omega = \frac{T \sin \theta}{m(l_1 + l) \sin \theta} = \frac{mg}{\cos \theta \cdot m(l_1 + l)}$

$\omega = \frac{g}{\cos \theta (l_1 + l)}$

$\underline{\underline{AN: \omega = 0,92 \text{ tr. s}^{-1}}}$



de 90°, P
fil en fonction de v

exercice 10 :

M de masse m
à un dem



Exo 6

I)

1) Le poids $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$

2) La force de frottement $\vec{f} = +\alpha v \vec{U}_z$

II)

Établir l'équation vectoriel du Mvt :

on applique le principe fondamental de la dynamique on trouve

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{f}_r = m \vec{a}$$

$$m\vec{g} + \alpha v \vec{U}_z = m\vec{a}$$

3) projection sur Oz :

$$P - f_r = ma \rightarrow mg - \alpha v = ma$$

$$mg - \alpha v = m \frac{dv}{dt} \quad \dots \quad / m$$

$$\boxed{g - \frac{\alpha}{m} v = \frac{dv}{dt}} \quad \dots \quad (1)$$

on pose $A = \frac{\alpha}{m}$

donc : (1) : $g - Av = \frac{dv}{dt}$

4) l'expression du v(t) :

$$\int \frac{dv}{(g - Av)} = \int dt \Rightarrow \int \frac{dv}{(g - \frac{\alpha}{m} v)} = \int dt$$

$$\int \left(\frac{-\frac{\alpha}{m}}{g - \frac{\alpha}{m} v} \right) dv = \int \frac{\alpha}{m} dt \rightarrow \ln \left(\frac{\alpha}{m} \right) dt$$

$$\ln \left(g - \frac{\alpha}{m} v \right) = -\frac{\alpha}{m} t + C'$$

$$e^{\ln(g - \frac{\alpha}{m} v)} = e^{-\frac{\alpha}{m} t + C'}$$

~~$$g - \frac{\alpha}{m} v = \exp \left(-\frac{\alpha}{m} t \right)$$~~

$$g - \frac{\alpha}{m} v = C \cdot e^{-\frac{\alpha}{m} t}$$

$$-\frac{\alpha}{m} v = C \cdot e^{-\frac{\alpha}{m} t} - g$$

$$v = C \cdot e^{-\frac{\alpha}{m} t} + \frac{mg}{\alpha}$$

au condition initiale $t=0s; v=0$

$$0 = \frac{gm}{\alpha} + C' \rightarrow C' = -\frac{gm}{\alpha}$$

$$\text{avec } \tau = \frac{m}{\alpha}$$

$$v = g\tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

g) l'expression de α :
on a $v = \frac{gm}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m} t}\right)$ lorsque $v = v_{\text{lim}}$ de Mvt
devient uniforme c'est-à-dire la vitesse est
indépendante du temps donc $v = v_{\text{lim}} = \frac{gm}{\alpha}$.

2^{ème} Méthode

A la vitesse limite v_{lim} , l'accélération devient
nulle $\left(\frac{dv}{dt} = 0\right)$ donc:

$$v_{\text{lim}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{gm}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m} t}\right) = \frac{gm}{\alpha}$$

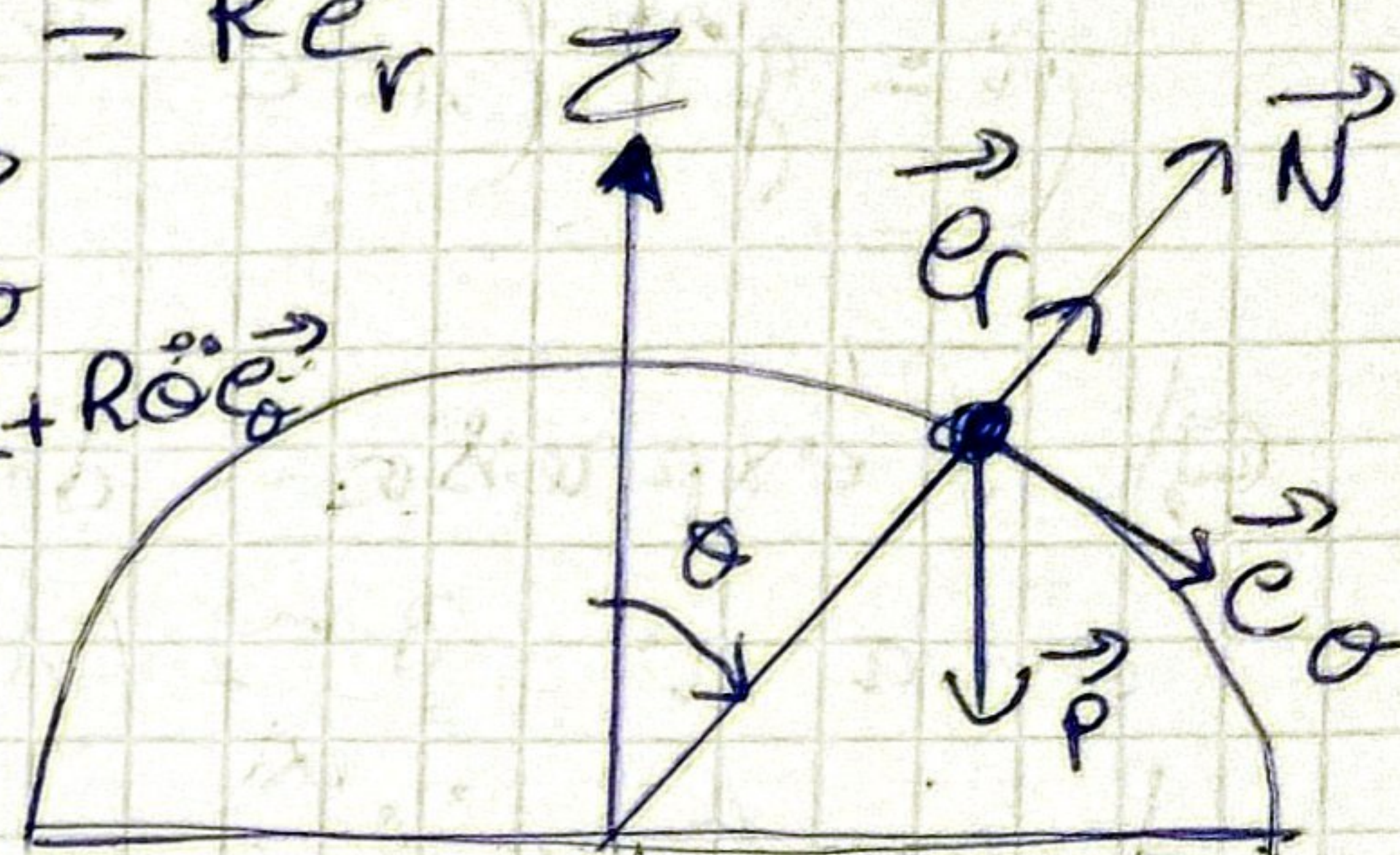
$$\alpha = \frac{gm}{v_{\text{lim}}}$$

$$\text{AN: } \alpha = 20 \cdot \frac{9,81}{45} \approx 4,36 \text{ Kg/s.}$$

Exo 7:

Le système étudié est l'enfant esquimau, en MVT dans le référentiel terrestre, g est connu à son poids $\vec{P}$ et a la réaction $\vec{N}$ de l'igloo, qui est sans frottement. Dans la base polaire:

$$\begin{cases} \vec{N} = N \vec{e}_r \\ \vec{P} = -mg \cos \theta \vec{e}_r + mg \sin \theta \vec{e}_\theta \\ P_{\text{tan}} = mg \sin \theta \\ P_{\text{norm}} = mg \cos \theta \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{OM} = r \vec{e}_r = R \vec{e}_r \\ \vec{v} = R \dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ \vec{a} = -R \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + R \ddot{\theta} \vec{e}_\theta \end{cases}$$



(PFD): $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a} \rightarrow \vec{P} + \vec{N} = m \vec{a}$

project sur $\vec{e}_r$: $N - mg \cos \theta = m a_r = -m R \dot{\theta}^2$

project sur $\vec{e}_\theta$: $mg \sin \theta = m a_\theta = m R \ddot{\theta}$

* l'eqt de mvt est celle projetée sur $\vec{e}_\theta$

* l'eqt projetée sur $\vec{e}_r$ contient en effet une force inconnue N .

g) l'eqt de Mvt

$$mg \sin \theta = m R \ddot{\theta} \quad \text{---} / m R$$

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{R} \sin \theta \quad \text{---} \times (\theta^\circ)$$

$$\ddot{\theta} \theta - \frac{g}{R} \theta^\circ \sin \theta = 0$$

$$\int \ddot{\theta} \theta dt - \frac{g}{R} \int \theta^\circ \sin \theta dt = c$$

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{g}{R} \cos \theta = C$$

comme l'enfant s'élance de $\theta = 0$ sans vitesse

$\dot{\theta} = 0$ donc

$$\boxed{\frac{g}{R} = C}$$

Exo 8 !

1) calcul de la masse de Mars.

la Troisième loi de Kepler.

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM}$$

$$\text{donc } M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

$$r = 9377 \text{ kg} \rightarrow 9377 \times 10^6 \text{ m}$$

$$T = 7.65 \text{ h} \rightarrow 7.65 \times 3600 = 27540 \text{ s}$$

$$\text{Ainsi: } M = \frac{4\pi^2 (9.377 \times 10^6)^3}{6.674 \times 10^{-11} \times (2754)^2}$$

$$M \approx 6.42 \times 10^{23} \text{ kg}$$

2) le temps avant la collision

$$v = 18 \text{ km/an} = 0.18 \text{ m/an}$$

$$r = 9377 \text{ km} \rightarrow 9377 \times 10^6 \text{ m}$$

$$t = \frac{r}{v}$$

$$t = \frac{9.377 \times 10^6}{0.18} \approx 5.21 \times 10^7 \text{ ans}$$

Phobos entrera en collision avec Mars dans environ 52,1 millions d'années.

3) la distance

$$\text{On a: } T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM}$$

$$r^3 = \frac{GMT^2}{4\pi^2}$$

$$T = 24h = 24 \times 3600 = 86400s$$

$$M = 6,42 \times 10^{23} \text{ kg}$$

donc:

$$r^3 = \frac{6,674 \times 10^{-11} \times 6,42 \times 10^{23} \times (86400)^2}{4\pi^2}$$

$$r^3 = 7,53 \times 10^{20} \text{ m}^3$$

$$r = 4,23 \times 10^7 \text{ m} = 42300 \text{ km}$$

donc la distance est:

$$r \approx 42300 \text{ km}$$

Exo 2:

1) force agissant sur la masse:

$$\vec{P} = m \vec{g} \quad \text{le poids}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{T} \text{ tension dans le fil} \\ \text{dans la base } (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta) \end{array} \right.$$

projection

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_g = \vec{P}_g = -mg \cos \theta \\ \vec{e}_\theta = \vec{P}_\theta = -mg \sin \theta \end{array} \right.$$

La Tension T agit uniquement dans la direction radiale $(\vec{e}_r)$.

en appliquant PFD

$$\vec{e}_r: T - mg \cos \theta = m a_r \quad \dots (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_\theta: -mg \sin \theta = m a_\theta \quad \dots (2) \end{array} \right.$$

$$(1) \rightarrow a_r = \frac{v^2}{l} = l \dot{\theta}^2$$

$$T = mg \cos \theta = m l \dot{\theta}^2$$

$$T = mg \cos \theta + m l \ddot{\theta}^2$$

$$(2) \rightarrow a_\theta = l \ddot{\theta}$$

$$-mg \sin \theta = m l \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

l'accélération.

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$$

à l'instant initial ($\theta = 90^\circ$).

$$\cos 90^\circ = 0 \text{ et } \sin 90^\circ = 1$$

la tension du fil devient

$$T = m l \dot{\theta}^2$$

$$T = 0$$

$$\dot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin 90^\circ = -\frac{g}{l}$$

l'accélération.

$$a = \sqrt{a_v^2 + a_o^2}$$

à l'instant initial ($\theta = 90^\circ$).

$$\cos 90^\circ = 0 \text{ et } \sin 90^\circ = 1$$

la tension du fil devient.

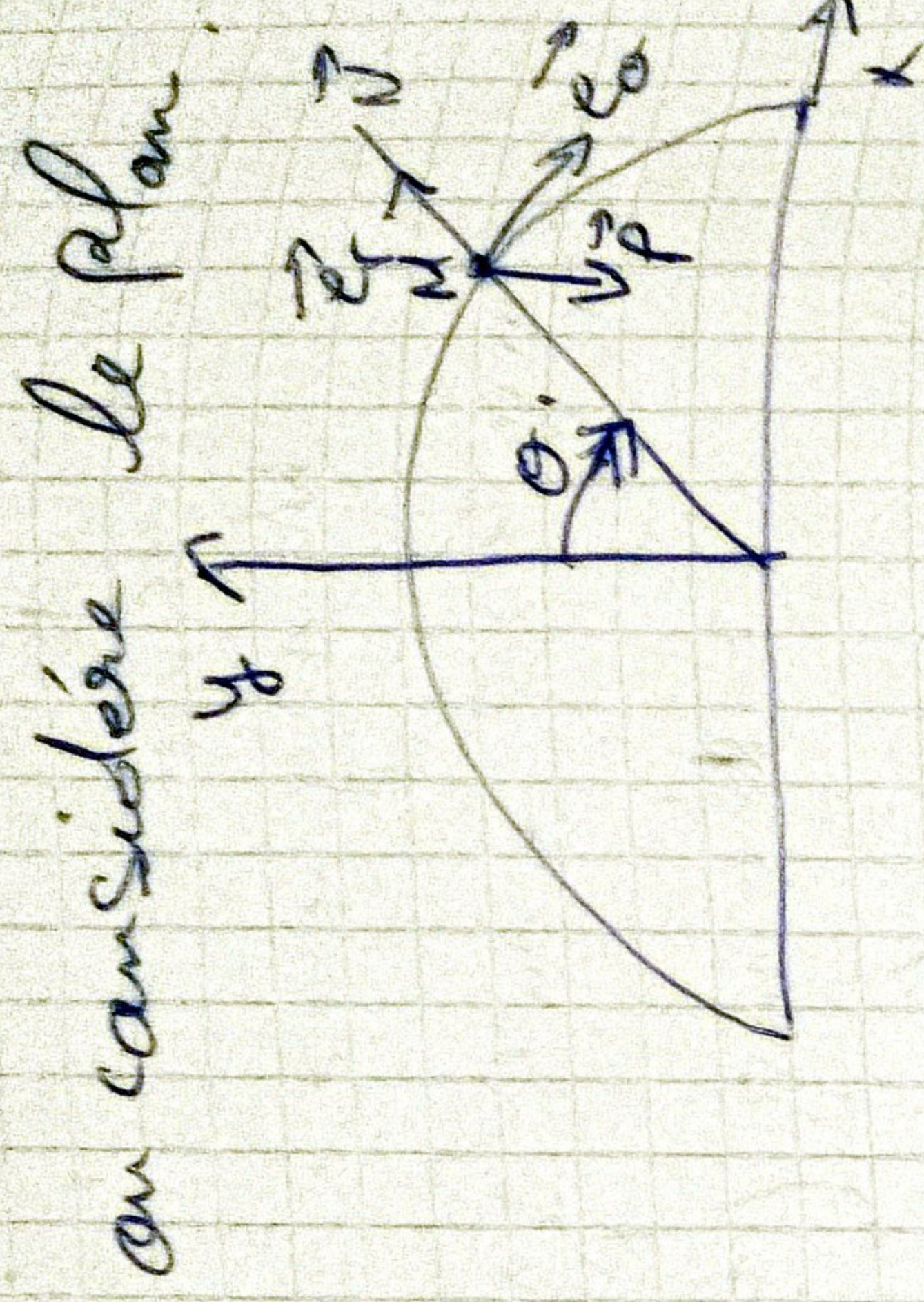
$$T = m l \dot{\theta}^2$$

$$T = 0$$

$$\dot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin 90^\circ = -\frac{g}{l}$$

Exo 10:

pour simplification
sur oxy.



Vecteur position:

$$\vec{OP} = R\vec{e}_x + R\vec{e}_y$$

Vecteur vitesse:

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta + R\dot{\theta}\vec{e}_\phi = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

4) Moment cinétique

$$\vec{h}_O = \vec{OP} \wedge (m\vec{v}) = R\vec{e}_y \wedge m(R\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = mR^2\dot{\theta}\vec{e}_z$$

5) calcul de $\frac{dh_O}{dt}$

$$\frac{d\vec{h}_O}{dt} = mR^2\ddot{\theta}\vec{e}_z$$

6) Moment de chaque force.

$$\vec{\tau}_O(\vec{N}) = \vec{OP} \wedge \vec{N} = \vec{0}$$

$$\vec{\tau}_O(\vec{P}) = \vec{OP} \wedge \vec{P} = PR\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\vec{e}_z = mgR\cos\theta\vec{e}_z$$

7) Application du théorème du moment cinétique au point O.

$$\frac{d\vec{h}_O}{dt} = \vec{\tau}_O(\vec{N}) + \vec{\tau}_O(\vec{P})$$

$$\ddot{\theta} - \frac{g}{R}\cos\theta = 0$$