Université A/Mira de Bejaia
Département de Recherche opérationnelle
L2 MA.

Bejaia 2024/2025

# Série de TD N° 3 d'Analyse 3

**Exercice 1.** Étudier le domaine de convergence simple des séries de fonctions $\sum_n f_n$, définies par

1. $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{3^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.
2. $f_n(x) = \dfrac{\cos nx}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.
3. $f_n(x) = e^{-n^2 x}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.
4. $f_n(x) = \dfrac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^+$.

**Exercice 2.** Étudier la convergence simple, uniforme, normale et absolue des séries de fonctions $\sum_n f_n$, définies par

1. $f_n(x) = x^n(1-x^n)$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$.
2. $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{e^{-nx^2}}{n^2+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

**Exercice 3.** Considérons la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{n}$, $x \in I = [-r, r]$, $0 < r < 1$.

1. Montrer que $\sum_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{n}$ converge uniformément sur $I$.
2. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, $x \in I$.

**Exercice 4.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = ne^{-nx}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq n} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq n} f_n$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ où $a > 0$ mains ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-nx}$, $x \in [1, +\infty[$.