

Université Abderrahmane Mira de Béjaia

Faculté des sciences exactes

Département de mathématiques

***Etude qualitative
des équations différentielles
ordinaires dans le plan***

Cours, 2^{ème} année Master, Mathématiques

Nadia MOHDEB

Email : n_mohdeb@hotmail.com

Préface

Dans ce petit cours consacré à quelques comportements qualitatifs des équations différentielles ordinaires du plan, destiné aux étudiants ayant fait dans leur cursus le module : équations différentielles 2, on propose un point de vue complémentaire à celui-ci.

Dans la pratique, la plus grande majorité des systèmes physiques, biologiques, ... étudiés conduit à des équations différentielles ordinaires non linéaires dont le comportement qualitatif constitue l'objet principal du présent cours.

Il n'existe pas de méthodes analytiques systématiques pour résoudre les équations différentielles non linéaires. Cependant, la résolution de ces équations passe par l'application de méthodes numériques (approchées).

On présente dans ce qui suit une introduction élémentaire à la théorie qualitative des équations différentielles ordinaires.

Avant d'aborder cette analyse qualitative, on rappelle les théorèmes essentiels sur lesquels se basent la théorie des équations différentielles ordinaires : Le théorème de l'existence et de l'unicité d'une solution d'une EDO, le théorème de dépendance, d'une solution d'une EDO, des conditions initiales et du paramètre lorsqu'elle en dépend, et le théorème du prolongement d'une solution d'une EDO.

On rappelle aussi quelques notions de bases : champ de vecteur, point stationnaire, portrait de phase, ... On présente ainsi la classification de Poincaré des points stationnaires des systèmes différentiels linéaires homogènes de \mathbb{R}^2 . On donne dans le quatrième chapitre une description d'un cycle limite d'un système différentiel du plan, qu'on complète par une version du théorème de Poincaré-Bendixson accompagné d'une démonstration géométrique.

Dans le cinquième chapitre, on présente quelques bifurcations importantes dans le plan, en illustrant géométriquement dans chaque situation, la continuité des solutions par rapport aux paramètres.

Dans la dernière partie, on traite le cas des singularités dégénérées en utilisant la théorie des éclatements, via le polygone de Newton, suivie d'un exemple d'application.

Plusieurs exemples illustratifs sont traités dans ce cours. Des exercices sont proposés à la fin des chapitres dont on estime que des applications sont nécessaires (dans le premier chapitre, des solutions des exercices sont proposées).

Table des matières

1	Théorème d'existence et d'unicité	4
1.1	Existence et unicité de la solution	4
1.2	Solutions maximales et prolongement des solutions locales	6
1.3	Exercices corrigés	8
2	Champ de vecteurs et portrait de phase	12
2.1	Introduction	12
2.2	Tracé du portrait de phase	12
2.2.1	Trajectoires	13
2.2.2	Champ de vecteurs	13
2.2.3	Isoclines	14
2.2.4	Points stationnaires	15
2.2.5	Portrait de phase	16
2.3	Systèmes linéaires homogènes	17
2.3.1	Position du problème	17
2.3.2	La matrice A admet deux valeurs propres réelles	17
2.3.3	La matrice A admet deux valeurs propres complexes	22
2.4	Classification des points stationnaires selon la trace et le déterminant de la matrice A	24
2.5	Linéarisation	26
2.5.1	Principe de la linéarisation	27
2.5.2	Théorème de Hartman-Grobman	28
3	Cycles limites et théorème de Poincaré-Bendixson	32
3.1	Cycles limites	32
3.1.1	Le passage en coordonnées polaires	33
3.1.2	Théorème de Poincaré-Bendixson	34
3.2	Exercices	38

4	Bifurcations dans \mathbb{R}^2	42
4.1	Introduction	42
4.2	Bifurcations dans \mathbb{R}^2 à un paramètre	43
4.2.1	Bifurcation nœud-col	43
4.2.2	Bifurcation fourche	44
4.2.3	Bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf	46
4.2.4	Bifurcation homocline	50
4.3	Exercices	51
5	Les éclatements et le polygone de Newton	53
5.1	Polygone de Newton	53
5.2	Algorithme de l'éclatement	54
5.2.1	Exemple d'application	55

Chapitre 1

Théorème d'existence et d'unicité

1.1 Existence et unicité de la solution

On note $E = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ et $D = I \times \omega$ où I est un ouvert de \mathbb{R} , Ω un ouvert de E et $f : D \rightarrow E$ une fonction continue. Pour tout $(t, x) \in D$, on notera $f(t, x) = (f_1(t, x), \dots, f_n(t, x))$ où chaque fonction f_i est continue de D dans \mathbb{R} . Dans ce cours, on s'intéresse aux équations différentielles ordinaires du premier ordre

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \tag{1.1}$$

où

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}(t).$$

Commençons par préciser la notion de solution pour ce type d'équation.

Définition 1.1. Une solution de (1.1) est un couple (φ, J) où J est un intervalle de \mathbb{R} et $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une fonction dérivable sur J à valeurs dans E telle que $(t, \varphi(t)) \in D$ pour tout t de J et

$$\varphi'_i(t) = f_i(t, \varphi(t)), \forall i = 1, \dots, n \text{ et } \forall t \in J..$$

Par composition, On remarque rapidement que puisque f et φ sont deux fonctions continues, alors φ' est également continue sur J et φ est de classe \mathcal{C}^1 sur J .

Définition 1.2. Soit $(t_0, x_0) \in D$. Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

consiste à déterminer un couple (φ, J) où J est un intervalle de \mathbb{R} contenant t_0 et φ une fonction dérivable de J dans E telle que $(t, \varphi(t)) \in D$ pour tout $t \in J$, $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ et $\varphi(t_0) = x_0$.

En intégrant l'équation différentielle ordinaire du problème de Cauchy (1.2) entre t_0 et t et en tenant compte de la condition $x(t_0) = x_0$, on obtient

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \quad (1.3)$$

où

$$\int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds = \left(\int_{t_0}^t f_1(s, \varphi(s)) ds, \dots, \int_{t_0}^t f_n(s, \varphi(s)) ds \right).$$

Réciproquement, toute fonction vérifiant (1.3) est bien une solution de classe \mathcal{C}^1 de (1.2).

Théorème 1.3. [3] (Cauchy-Peano-Arzela) Soit $(t_0, x_0) \in D$ et soient $a > 0$ et $b > 0$ tels que le cylindre $C = \{(t, x) \in D; |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\|_E \leq b\}$ soit inclus dans D . On note

$$M = \sup_{(t,x) \in C} \|f(t, x)\|_E \quad \text{et} \quad \alpha \leq \min \left(a, \frac{b}{M} \right)$$

alors il existe une solution φ au problème de Cauchy (1.2) sur l'intervalle $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, vérifiant $\varphi(t_0) = x_0$.

On peut énoncer le théorème précédent sous la forme simplifiée suivante :

Corollaire 1.4. Soit $f \in \mathcal{C}(D)$ (la fonction f est continue sur D). Alors pour tout $(t_0, x_0) \in D$, il existe un voisinage de t_0 dans \mathbb{R} sur lequel le problème de Cauchy (1.2) admet une solution.

On a besoin des deux définitions suivantes :

Définition 1.5. On dira que f est lipschitzienne en x et on notera $f \in \text{Lip}(D)$, s'il existe $k > 0$ tel que

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\|_E \leq k \|x_1 - x_2\|_E, \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in D$$

Définition 1.6. On dit que f est localement lipschitzienne sur D si pour tout $(t, x) \in D$ il existe un cylindre $B = \{(t', x') \in D, \|x - x'\|_E < \varepsilon_1, |t - t'| < \varepsilon_2\} \subset D$ et une constante $k > 0$ telles que f soit lipschitzienne sur B . On note $f \in \text{Lip}_{loc}(D)$.

Le théorème suivant assure, en plus de l'existence locale de la solution du problème de Cauchy, l'unicité de celle-ci dès que la condition de Lipschitz est satisfaite.

Théorème 1.7. [3] (Cauchy-Lipschitz) Soit $f \in C(D) \cap Lip_{loc}(D)$, il existe une unique solution au problème de Cauchy (1.2) sur l'intervalle $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Remarque 1.8. Soit $f : I \times J \rightarrow E$ une fonction continue, où I et J sont des ensembles bornés de $\mathbb{R} \times E$. Une condition plus parlante que la condition de Lipschitz et qui implique l'inégalité de Lipschitz, est que les dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ pour i allant de 1 à n , existent et soient continues (les x_i , $i = 1, \dots, n$, sont les composantes de x). En effet, les fonctions continues sur des ensembles bornés sont bornées. En appliquant ensuite le théorème des accroissements finis, on a pour tout $(t, x_1), (t, x_2) \in I \times J$,

$$\|f(t, x_2) - f(t, x_1)\| = M \|x_2 - x_1\|,$$

où M est tel que

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x) \right| \leq M, \quad \forall x \in J, \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad \forall j = 1, \dots, n$$

La condition de Lipschitz résulte alors du fait que les dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ ($i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n$) sont bornées.

Le théorème suivant assure que lorsque la fonction $f \in Lip_{loc}(D)$, l'unicité de la solution du problème de Cauchy (1.2) est en fait globale; ce qui peut se traduire par le fait que les graphes des deux solutions distinctes de (1.1) ne peuvent pas se croiser.

Théorème 1.9. [3] (Unicité globale) Soit $f \in C(D) \cap Lip_{loc}(D)$ et soient (φ_1, J_1) et (φ_2, J_2) deux solutions de (1.1) telles que $J_1 \cap J_2 \neq \emptyset$. S'il existe un point t_0 de $J_1 \cap J_2$ tel que $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$ alors $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ sur $J_1 \cap J_2$.

1.2 Solutions maximales et prolongement des solutions locales

On a les trois définitions suivantes :

Définition 1.10. Soit (φ_1, J_1) et (φ_2, J_2) deux solutions de (1.1). On dit que (φ_2, J_2) prolonge (φ_1, J_1) si $J_1 \subset J_2$ et $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ sur J_1 .

Définition 1.11. Une solution (φ, J) de (1.1) est dite maximale si elle n'admet aucun prolongement.

Définition 1.12. Une solution (φ, J) de (1.1) est dite globale si elle est définie sur I tout entier (i.e : si $J = I$).

Le théorème suivant assure l'existence d'une solution maximale du problème de Cauchy :

Théorème 1.13. [3] (Existence d'une solution maximale) Soit $f \in C(D) \cap Lip_{loc}(D)$. Alors par tout point (t_0, x_0) de D , il passe une unique solution maximale au problème de Cauchy (1.2).

L'existence d'une solution globale est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.14. [8] (Existence d'une solution globale) S'il existe une fonction continue $k : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que pour tout t fixé dans J , l'application $y \mapsto f(t, y)$ soit lipschitzienne de rapport $k(t)$, alors toute solution maximale de l'équation $\dot{x} = f(t, x(t))$ est globale.

Les deux théorèmes qui suivent donnent des conditions suffisantes pour qu'une solution d'une équation différentielle ordinaire soit continue par rapport aux conditions initiales, et pour qu'une solution d'une équation différentielle ordinaire dépendant d'un paramètre soit continue par rapport à celui-ci.

Théorème 1.15. [8] (Continuité des solutions par rapport aux conditions initiales) Si la fonction f est continue en (t, x) et localement lipschitzienne en x , la solution de (1.1) exprimée en fonction des conditions initiales

$$\begin{aligned} x : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, t_0, x_0) &\mapsto x(t, t_0, x_0) \end{aligned}$$

est continue, où $\Omega = J(t_0, x_0) \times D$ avec $J(t_0, x_0)$ l'intervalle sur lequel est définie la solution maximale de conditions initiales (t_0, x_0) .

Théorème 1.16. [8] (Continuité des solutions par rapport à un paramètre) Considérons l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(t, x, \lambda)$$

où λ est un paramètre de \mathbb{R}^k . Si f est localement lipschitzienne en (x, λ) et continue, alors la solution

$$\begin{aligned} x : \Omega' &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, t_0, x_0, \lambda) &\mapsto x(t, t_0, x_0, \lambda) \end{aligned}$$

est continue, où $\Omega' = J'(t_0, x_0, \lambda) \times D \times \mathbb{R}^k$, avec $J'(t_0, x_0, \lambda)$ l'intervalle sur lequel est définie la solution maximale de conditions initiales (t_0, x_0) pour la valeur λ du paramètre.

1.3 Exercices corrigés

Exercice 1.1. Donner un exemple d'équation différentielle ordinaire dont l'unicité de la solution n'est pas satisfaite.

Solution 1.1. Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dot{y} = y^{1/3} \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

La fonction $y \mapsto y^{1/3}$ est continue. Sa dérivée n'est pas définie en zéro. Les conditions suffisantes du théorème de Cauchy-Lipschitz ne sont donc pas remplies. On vérifie que $y = 0$ et $y = \pm\sqrt{8/27}t^{3/2}$ sont des solutions du problème (1.4).

Exercice 1.2. Considérons l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$f(t, x) = \begin{cases} \frac{4t^3x}{t^4 + x^2}, & \text{si } (t, x) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (t, x) = (0, 0) \end{cases}$$

et l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)). \quad (1.5)$$

1. L'application f est-elle continue ? est-elle localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable ?

Que peut-on en déduire pour l'équation (1.5) ?

2. Soit ϕ une solution de l'équation (1.5) qui est définie sur un intervalle I ne contenant pas 0. On définit une nouvelle application ψ par $\phi(t) = t^2\psi(t)$, $t \in I$. // Déterminer une équation différentielle satisfaite par ψ , puis résoudre cette nouvelle équation.

3. Que peut-on en déduire pour l'existence et l'unicité de la solution de l'équation différentielle (1.5) vérifiant la condition initiale $(t_0, x_0) = (0, 0)$.

Solution 1.2. 1. Pour $(t, x) \neq (0, 0)$, la fonction $\frac{4t^3x}{t^4 + x^2}$ est de classe \mathcal{C}^∞ . D'autre part,

$$|f(t, x)| = 2|t| \frac{2t^2|x|}{(t^2)^2 + x^2} \leq |2t|$$

Par passage à la limite, on obtient

$$\lim_{(t,x) \rightarrow (0,0)} f(t, x) = 0 = f(0, 0).$$

D'où, f est continue en $(0, 0)$.

Supposons que la fonction f est localement lipschitzienne au voisinage de $(0, 0)$. Alors

$$\exists \alpha, \beta, k \in \mathbb{R}, \forall t \in]-\alpha, \alpha[, \forall x \in]-\beta, \beta[, |f(t, x) - f(t, 0)| \leq k|x - 0|$$

Ceci signifie que

$$\left| \frac{4t^3x}{t^4 + x^2} \right| \leq k|x|$$

C'est-à-dire,

$$\frac{4t^3}{t^4 + x^2} \leq k$$

En particulier, pour un certain $k_1 > k$

$$\frac{4}{t} \leq k, \forall t \in]0, \alpha[.$$

Ceci est absurde.

Le théorème de l'unicité des solutions des équations différentielles n'est donc pas applicable pour l'équation différentielle (1.5).

2. On a

$$\psi(t) = \frac{1}{t^2}\phi(t)$$

En dérivant les deux membres, on obtient

$$\psi'(t) = \frac{1}{t^2}\phi'(t) - \frac{2}{t^3}\phi(t).$$

En remplaçant $\phi'(t)$ par sa valeur (puisque ϕ est une solution de l'équation différentielle (1.5)), on aura

$$\psi'(t) = \frac{4}{t^2} \frac{t^3\phi(t)}{t^4 + \phi(t)^2} - \frac{2}{t}\psi(t).$$

En exprimant le tout en fonction de ψ , on obtient la nouvelle équation différentielle

$$\frac{\psi'(t)(1 + \psi(t)^2)}{\psi(t)(1 - \psi(t)^2)} = \frac{2}{t}$$

La décomposition des fractions rationnelles en éléments simples donne

$$\psi'(t) \left(\frac{1}{\psi(t)} + \frac{1}{1 - \psi(t)} - \frac{1}{1 + \psi(t)} \right) = \frac{2}{t}$$

En intégrant par rapport à t on obtient

$$\ln \left| \frac{\psi(t)}{1 - \psi(t)^2} \right| = \ln t^2 + c$$

où c est une constante de \mathbb{R} . D'où

$$\frac{\psi(t)}{1 - \psi(t)^2} = ct^2.$$

La résolution de l'équation du deuxième degré

$$ct^2\psi(t)^2 + \psi(t) - ct^2 = 0$$

aboutit à

$$\psi(t) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4c^2t^4}}{2ct^2}.$$

D'où

$$\phi(t) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4c^2t^4}}{2c}.$$

Ainsi, par la condition initiale $(t_0, x_0) = (0, 0)$, il passe une infinité de solutions de l'équation différentielle (1.5).

Exercice 1.3. On considère l'équation différentielle

$$\dot{y} = x + y^2 \tag{1.6}$$

Soit y une solution maximale définie sur un intervalle ouvert I .

1. Montrer que I est majorée.
2. On pose $b = \sup I$.
 - Montrer que y est croissante.
 - Trouver la limite de y en b .

Solution 1.3. 1. Supposons que I n'est pas majoré. Pour $x \geq 1$, on a $\dot{y} \geq 1 + y^2$. En intégrant entre 1 et x , on obtient que

$$\arctan(y(x)) - \arctan(y(1)) \geq x - 1.$$

Ceci est absurde puisque la fonction \arctan est bornée.

2. Soient $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_2 \geq x_1$. En intégrant (1.6) entre x_1 et x_2 on obtient

$$y(x_2) = y(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} \dot{y}(s) ds.$$

C'est-à-dire,

$$y(x_2) - y(x_1) = \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} + \int_{x_1}^{x_2} y(s)^2 ds.$$

Il est clair que $y(x_2) - y(x_1) \geq 0$, ce qui implique que y est croissante.

3. La fonction y est croissante au voisinage de b . Ceci signifie que $y'(x)$ est positif au voisinage de b . Comme

$$y(x) = y(a) + \int_a^x y'(s) ds.$$

où $a \in I$, et la solution y est maximale, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow b^-} y(x) = +\infty.$$

car sinon, on peut prolonger y en b , ce qui implique que la solution y n'est pas maximale.

Chapitre 2

Champ de vecteurs et portrait de phase

2.1 Introduction

On s'occupe d'un système différentiel autonome de dimension deux, donc de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (2.1)$$

où f et g sont des fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

Rappelons qu'un système différentiel est dit autonome si les équations intervenant dans ce système ne font pas intervenir la variable par rapport à laquelle sont calculées les dérivées.

Nous supposons que les fonctions f et g sont continument dérivables, pour assurer le fait que par tout point M du plan passe une solution et une seule. Pour alléger les écritures, nous supposons de plus, que toutes les solutions sont définies sur \mathbb{R} tout entier.

2.2 Tracé du portrait de phase

Pour mieux tracer le champ de vecteurs (2.1), on va présenter ici des techniques permettant d'en prévoir assez simplement quelques propriétés essentielles.

2.2.1 Trajectoires

Définition 2.1. On appelle trajectoire (ou orbite) du système (2.1), l'ensemble parcouru dans le plan (x, y) par le point de coordonnées $(x(t), y(t))$ lorsque t parcourt \mathbb{R} .

En d'autres termes, une trajectoire du système (2.1) est l'ensemble des points du plan $\{(x(t), y(t)); t \in \mathbb{R}\}$.

Nous allons voir dans la proposition suivante que plusieurs solutions peuvent avoir pour image la même trajectoire.

Proposition 2.2. Soit $S(t) = (x(t), y(t))$ une solution du système (2.1). Pour tout réel a , $S_a(t) = S(t - a)$ est aussi une solution de (2.1), dont la trajectoire coïncide avec celle de $S(t)$.

Preuve

Il est facile de voir que, puisque le système (2.1) est autonome, si $S(t)$ est une solution de (2.1), $S_a(t)$ en est aussi une. De plus, si t parcourt \mathbb{R} , alors $(t - a)$ également. Par conséquent, ces deux solutions $S(t)$ et $S_a(t)$ parcourent toutes les deux l'image $S(\mathbb{R})$.

Si la solution S passe par le point M à l'instant t_0 , la solution S_a passe par le même point M à l'instant $t_0 + a$. Autrement dit, la solution S_a parcourt la même trajectoire que la solution S avec un retard constant égal à a .

Remarque 2.3. D'après la proposition ci-dessus, la trajectoire parcourue ne dépend que du point M , et pas de t_0 . Le point M détermine donc une unique trajectoire. Rappelons cependant qu'une même trajectoire est parcourue, à des instants différents, par une infinité de solutions.

2.2.2 Champ de vecteurs

Définition 2.4. L'application

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (f(x, y), g(x, y)) \end{aligned}$$

définit un champ de vecteurs.

A chaque point $M = (x, y)$ du plan, on associe le vecteur $V(M) = (f(x, y), g(x, y))$. Un champ de vecteurs (2.1) est donné par la propriété suivante :

En tout point M du plan où $V(M) \neq 0$, la trajectoire passant par M est tangente à $V(M)$.

Pratiquement, pour représenter le champ associé au système (2.1), on se donne un quadrillage de la partie du plan choisie ; en chaque point de ce quadrillage, on trace un petit vecteur égal, ou colinéaire à $V(M)$. En observant le champ de vecteurs, on a déjà une idée du comportement des trajectoires. On verra une illustration d'un champ de vecteurs dans un exemple un peu plus loin.

2.2.3 Isoclines

On définit les ensembles de \mathbb{R}^2 sur lesquels s'annulent les composantes \dot{x} et \dot{y} du système (2.1).

Définition 2.5. (*Isoclines horizontale*) On appelle *isocline horizontale* l'ensemble I des points (x, y) tels que $g(x, y) = 0$.

Soit $M = (x, y)$ un point de I . Si $f(x, y) \neq 0$, alors la trajectoire passant par M a une tangente horizontale. Elle est parcourue de gauche à droite si $f(x, y) > 0$, de la droite vers la gauche si $f(x, y) < 0$.

L'ensemble I est constitué en général d'une ou de plusieurs courbes, qui partagent le plan en régions dans lesquelles le signe de $g(x, y)$ reste constant.

Définition 2.6. (*Isocline verticale*) On appelle *isocline verticale* l'ensemble J des points (x, y) tels que $f(x, y) = 0$.

Soit $M = (x, y)$ un point de J tel que $g(x, y) \neq 0$. La trajectoire passant par M a une tangente verticale. Elle est parcourue de bas en haut si $g(x, y) > 0$, de haut en bas si $g(x, y) < 0$.

L'ensemble J est constitué en général d'une ou de plusieurs courbes, qui partagent le plan en régions dans lesquelles le signe de $f(x, y)$ reste constant.

Quand on trace à la fois I et J , on partage le plan en des régions sur lesquelles le champ de vecteurs a les propriétés suivantes :

- Régions où f et g sont positives : dans ces régions les trajectoires du système (2.1) se dirigent, pour t croissant, vers le haut et à droite.
- Régions où f est positive et g est négative : les trajectoires du système (2.1) se dirigent vers le bas et à droite.
- Régions où f est négative et g est positive : les trajectoires de (2.1) se dirigent vers la gauche et le haut.
- Régions où f et g sont négatives : les trajectoires de (2.1) se dirigent vers le bas et à gauche.

2.2.4 Points stationnaires

Considérons le système différentiel non linéaire en dimension deux (2.1), vérifiant les hypothèses du théorème d'existence et d'unicité des solutions.

Définition 2.7. *On appelle point stationnaire (ou point d'équilibre ou point singulier) un point $M(x_0, y_0)$ tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et $g(x_0, y_0) = 0$: la solution du système (2.1) passant par un tel point est la solution constante $x(t) = x_0$ et $y(t) = y_0$.*

Les points stationnaires se situent à l'intersection de l'isocline horizontale et de l'isocline verticale.

Le comportement des trajectoires au voisinage des points stationnaires est particulièrement intéressant. Il sera étudié par la suite.

Exemple 2.8. *Les points stationnaires du système*

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin x \\ \dot{y} = \sin y \end{cases} \quad (2.2)$$

sont les points de coordonnées $x = k\pi$ et $y = m\pi$, où k et m sont des entiers relatifs.

Remarque 2.9. *La fonction constante $S(t) = (x_0, y_0)$ dont la dérivée est identiquement nulle, est une solution du système (2.1). Autrement dit, le point $M = (x_0, y_0)$ est une trajectoire du système (2.1). Puisque par chaque point du plan passe une trajectoire de (2.1) et une seule, les autres trajectoires ne passent pas par le point M . D'où l'appellation du point stationnaire du système (2.1), puisque la solution qui passe par ce point y reste, y stationne.*

On distingue deux types de points stationnaires :

Définition 2.10. (*[10], [11]*) *Un point stationnaire (x_0, y_0) du système (2.1) est dit hyperbolique si toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne $D_F(x_0, y_0)$, où $F = (f, g)$, ont la partie réelle non-nulle. Dans le cas contraire, il est dit non-hyperbolique.*

- *Si au moins une des deux valeurs propres de la matrice Jacobienne $D_F(x_0, y_0)$ est nulle, on parle d'un point stationnaire dégénéré.*
- *Si une seule valeur propre de la matrice Jacobienne $D_F(x_0, y_0)$ est nulle, on dit dans ce cas que le point stationnaire est semi-hyperbolique.*
- *Si les deux valeurs propres de la matrice Jacobienne $D_F(x_0, y_0)$ sont nulles, la singularité est dite non élémentaire.*

A ce stade, on peut déjà avoir une idée de ce qu'on appelle portrait de phase du système (2.1), qu'on définit ci-dessous, en traçant des trajectoires compatibles avec tous les renseignements donnés ci-dessus.

2.2.5 Portrait de phase

Nous allons étudier la façon dont les trajectoires du système (2.1) s'organisent dans le plan et notamment comment elles se comportent près des points où $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$ s'annulent simultanément, c'est-à-dire près des points stationnaires.

Définition 2.11. *On appelle portrait de phase d'un système différentiel l'ensemble de ses trajectoires.*

Dans la pratique, tracer le portrait de phase d'un système de dimension deux, c'est tracer dans le plan (x, y) , suffisamment de trajectoires pour que l'on puisse les imaginer toutes.

Exemple 2.12. *Considérons le système différentiel de \mathbb{R}^2*

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x - 2 \\ \dot{y} = x^2 - y \end{cases} \quad (2.3)$$

Les points stationnaires, les isoclines, le champ de vecteurs et les trajectoires du système (2.3) sont illustrés sur le portrait de phase représenté sur la figure 2.1.

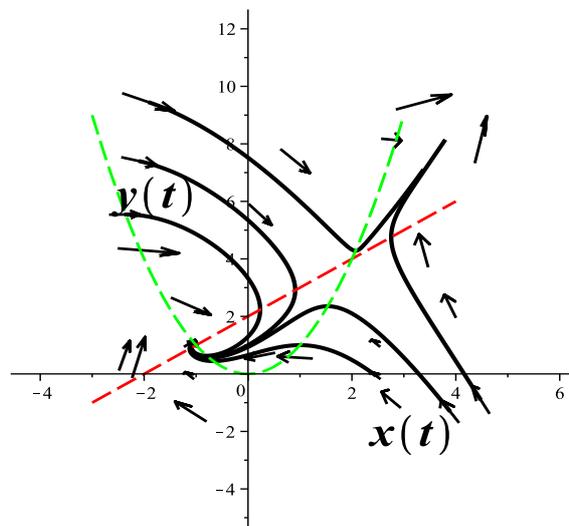


FIGURE 2.1 – Portrait de phase du système (2.3).

On peut voir qu'on peut deviner le comportement de certaines trajectoires du système (2.3), mais pas forcément celui de toutes les trajectoires : en se basant sur le sens du champ de vecteurs, on peut attribuer à certaines conditions initiales sur le plan, plusieurs comportements de trajectoires.

Nous allons d'abord étudier les portraits de phases des systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants dans le plan, et ensuite celui des systèmes différentiels non linéaires.

2.3 Systèmes linéaires homogènes

2.3.1 Position du problème

Considérons le système différentiel linéaire homogène du plan

$$\dot{X} = AX \quad (2.4)$$

où A est une matrice carré d'ordre deux, à coefficients constants dans \mathbb{R} .

Si l'on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, l'équation (2.4) s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} \quad (2.5)$$

On sait que la forme des solutions du système (2.5) dépend du type des valeurs propres de la matrice A .

Chaque solution $(t, x(t), y(t))$ de (2.5) est l'équation paramétrée d'une courbe du plan (x, y) . Cette courbe est la trajectoire de la solution $(t, x(t), y(t))$.

Le point $(0, 0)$ est toujours un point stationnaire des systèmes différentiels linéaires homogène du plan. C'est la trajectoire de la solution nulle ($x(t) = 0, y(t) = 0$). Si la matrice A est inversible (c'est à dire si zéro n'est pas une valeur propre de A), c'est même le seul point stationnaire de (2.5). Les autres trajectoires sont des courbes qui ne passent pas par l'origine.

Nous allons étudier, selon une classification due à Henri Poincaré, le type des portraits de phase du système linéaire (2.5) en fonction du type des valeurs propres de la matrice A correspondantes.

2.3.2 La matrice A admet deux valeurs propres réelles

Nous nous intéressons dans cette partie aux trajectoires du système différentiel du plan (2.5), où la matrice A admet deux valeurs propres réelles λ et μ .

Les valeurs propres de A sont positives

On suppose que $0 < \lambda < \mu$.

Les vecteurs propres U et V relatifs respectivement à λ et μ forment une

base de \mathbb{R}^2 .

La solution générale du système (2.5) s'écrit,

$$X(t) = C \exp(\lambda t)U + D \exp(\mu t)V$$

où $X(t) = (x(t), y(t))$ et C et D sont des constantes réelles. Il s'agit alors d'étudier ces courbes paramétrées selon les valeurs de C et D . L'étude se fait facilement en raisonnant dans la base (U, V) . En effet :

- Si $C = D = 0$, la trajectoire du système (2.5) se réduit au point $(0, 0)$.

- Si $D = 0$ et $C \neq 0$, les trajectoires du système (2.5) sont les demi-droites issues de l'origine, de direction U si $C > 0$, et de direction $-U$ si $C < 0$. Lorsque t parcourt \mathbb{R} de $-\infty$ à $+\infty$, ces trajectoires sont parcourues de l'origine vers l'infini.

- Si $C = 0$ et $D \neq 0$, les trajectoires du système (2.5) sont les demi-droites issues de l'origine, de direction V si $D > 0$, et de direction $-V$ si $D < 0$. Lorsque t va de $-\infty$ à $+\infty$, ces trajectoires sont parcourues de l'origine vers l'infini.

- Si $C \neq 0$ et $D \neq 0$, les trajectoires du système (2.5) partent de l'origine (pour t tendant vers $-\infty$) tangentiellement à U ou $-U$, et admettent une branche infinie parabolique de direction V ou $-V$ (pour t tendant vers $+\infty$).

Selon les signes de C et D , la trajectoire de (2.5) reste dans un des quarts du plan déterminé par les droites de directions U et V .

On dit dans ce cas que l'origine est *un noeud répulsif* ou *un noeud instable* (répulsif car les trajectoires sont parcourues depuis l'origine) (voir figure 2.2).

Exemple 2.13. Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = \frac{1}{2}y \end{cases} \quad (2.6)$$

L'origine est un point singulier du système (2.6). Les valeurs propres de la matrice associée à (2.6) sont 2 et $(1/2)$. L'origine est donc un noeud répulsif (figure 2.2).

Les valeurs propres de A sont négatives

On suppose que $\mu < \lambda < 0$.

Les trajectoires du système (2.5) sont du même type que précédemment, mais leur sens de parcours est inversé : elles sont parcourues depuis l'infini (pour t tendant vers $-\infty$) vers l'origine (pour t tendant vers $+\infty$).

On dit que l'origine est *un noeud attractif* ou *un noeud stable* (car les trajectoires sont parcourues vers l'origine) (voir figure 2.3).

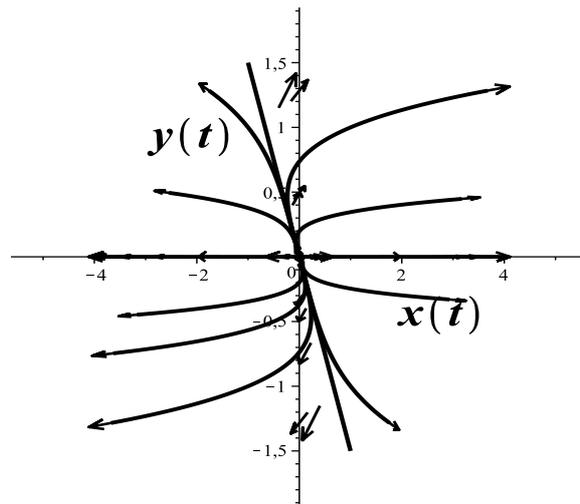


FIGURE 2.2 – Portrait de phase du système (2.6).

Exemple 2.14. *Considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{3}x + 4y \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (2.7)$$

Les valeurs propres de la matrice associée au système (2.7) sont (-1) et $(-1/3)$. L'origine est donc un noeud attractif (figure 2.3).

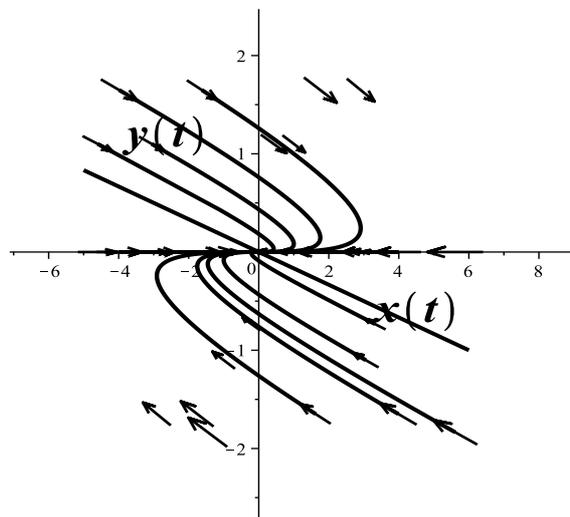


FIGURE 2.3 – Portrait de phase du système (2.7).

Les valeurs propres de A sont de signes opposés

On suppose que $\lambda < 0 < \mu$.

Notons U et V les vecteurs propres associés aux valeurs propres λ et μ respectivement.

La solution générale du système (2.4) s'écrit

$$X(t) = C \exp(\lambda t)U + D \exp(\mu t)V$$

où $X(t) = (x(t), y(t))$ et C et D sont des constantes réelles. Dans la base (U, V) , les trajectoires du système (2.4) s'écrivent

$$u(t) = C \exp(\lambda t) \text{ et } v(t) = D \exp(\mu t)$$

Il s'agit d'étudier ces courbes paramétrées selon les valeurs de C et de D :

- Si $C = D = 0$, la trajectoire du système (2.4) se réduit à l'origine.
- Si $D = 0$ et $C \neq 0$, la trajectoire de (2.4) est la demi-droite dirigée vers l'origine, de direction U si $C > 0$, et $-U$ si $C < 0$: lorsque t va de $-\infty$ à $+\infty$, les trajectoires du système (2.4) sont parcourues de l'infini vers l'origine.
- Si $C = 0$ et $D \neq 0$, la trajectoire du système (2.4) est la demi-droite issue de l'origine, de direction V si $D > 0$, et $-V$ si $D < 0$. Lorsque t va de $-\infty$ à $+\infty$, cette trajectoire est parcourue de l'origine vers l'infini.
- Si $C \neq 0$ et $D \neq 0$, les trajectoires du système (2.4) correspondantes partent pour t tendant vers $-\infty$, asymptotiquement à la droite passant par l'origine de direction U , et finit (pour t tendant vers $+\infty$) asymptotique à la droite passant par l'origine de direction V . Selon les signes de C et de D , la trajectoire du système (2.4) reste dans un des quarts du plan déterminés par les droites de directions U et V .

On dit dans ce cas que l'origine est *un col* ou *un point selle* (figure 2.4).

Exemple 2.15. *Considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{3}x + 4y \\ \dot{y} = y \end{cases} \quad (2.8)$$

Les valeurs propres de la matrice associée au système (2.8) sont (1) et $(-1/3)$. L'origine est donc un col (figure 2.4).

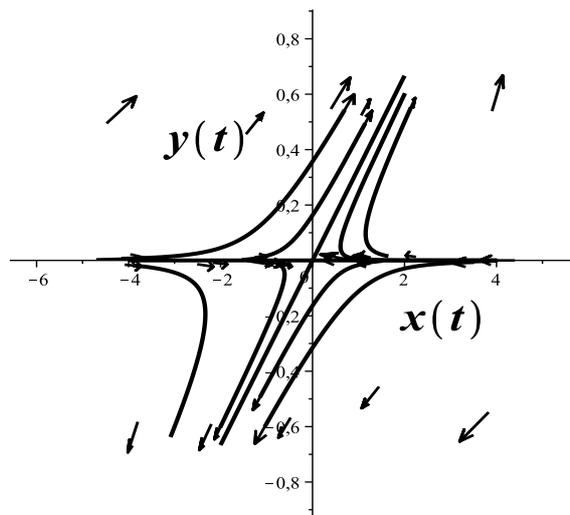


FIGURE 2.4 – Portrait de phase du système (2.8).

La valeur propre de A est double

Supposons que la matrice A possède une valeur propre double λ . Une étude élémentaire des applications linéaires du plan fait que deux cas seulement sont possibles :

- ou bien la matrice A est diagonale, donc s'écrit sous la forme λI , où I est la matrice unité.

- ou bien la matrice A n'est pas diagonalisable. Dans ce cas il n'existe qu'une seule direction de vecteurs propres. Si on prend U le vecteur propre associé à la valeur propre λ , on peut choisir un deuxième vecteur V linéairement indépendant de U , tel que dans la nouvelle base (U, V) le système (2.5) s'écrit

$$\begin{cases} \dot{u} = \lambda u + v \\ \dot{v} = \lambda v. \end{cases} \quad (2.9)$$

Examinons les solutions et le portrait de phase du système (2.5) dans chaque situation :

- Si $A = \lambda I$, le système (2.5) s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x \\ \dot{y} = \lambda y \end{cases} \quad (2.10)$$

Les solutions de (2.10) sont de la forme

$$\begin{cases} x = ce^{\lambda t} \\ y = de^{\lambda t} \end{cases} \quad (2.11)$$

où $c, d \in \mathbb{R}$.

Le rapport de x sur y est constant, ainsi que le signe de x et de y . Il en

résulte que chaque trajectoire est contenue dans une demi-droite passant par l'origine.

On voit facilement que, sauf si $c = d = 0$, les trajectoires du système (2.10) parcourent entièrement ces demi-droites, depuis l'origine vers l'infini si λ est positive, et dans le sens inverse si λ est négative (en prenant en considération l'unicité de la solution et que l'origine est elle-même une solution de (2.10)).

- Si A n'est pas diagonalisable, les solutions du système (2.9) s'écrivent

$$\begin{cases} u = (c_1 t + d_1)e^{\lambda t} \\ v = d_1 e^{\lambda t} \end{cases} \quad (2.12)$$

où $c_1, d_1 \in \mathbb{R}$.

Supposons par exemple que $\lambda > 0$ (le cas $\lambda < 0$ se traite de la même manière). Les trajectoires du système (2.9) se comportent comme suit :

- Si $c_1 = d_1 = 0$, la trajectoire de (2.9) est réduite au point stationnaire, l'origine.

- Si $c_1 = 0$ et $d_1 \neq 0$, la trajectoire du système (2.9) est une demi-droite colinéaire à (ou) .

- Si $c_1 \neq 0$, la trajectoire du système (2.9) part de l'origine tangentiellement à (ou) pour t tendant vers $-\infty$, pour finir en une branche parabolique, de direction asymptotique parallèle à (ou) , mais opposée à la direction de départ.

L'origine est donc un nœud répulsif.

Dans le cas où $\lambda < 0$, l'origine est un nœud attractif.

Exemple 2.16. *On peut considérer le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{3}x + y \\ \dot{y} = \frac{1}{3}y \end{cases} \quad (2.13)$$

dont le portrait de phases est représenté sur la figure 2.5.

2.3.3 La matrice A admet deux valeurs propres complexes

La partie réelle des deux valeurs propres de A est non nulle

Il s'agit ici d'étudier les trajectoires du système (2.5), où la matrice associée A admet deux valeurs propres complexes conjuguées $\lambda = \alpha + i\beta$ et

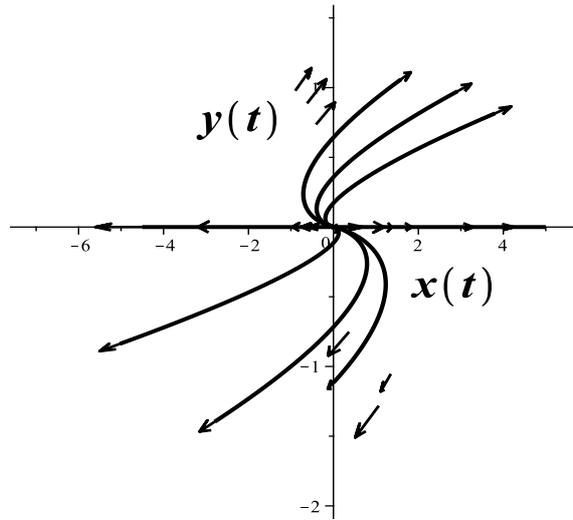


FIGURE 2.5 – Portrait de phase du système (2.13).

$\mu = \alpha - i\beta$. Alors le système (2.5) peut se mettre sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta y \\ \dot{y} = \beta x + \alpha y \end{cases} \quad (2.14)$$

La solution générale du système (2.14) s'écrit

$$\begin{cases} x(t) = e^{\alpha t}(C \cos \beta t - D \sin \beta t) \\ y(t) = e^{\alpha t}(C \sin \beta t + D \cos \beta t) \end{cases} \quad (2.15)$$

où C et D sont des constantes réelles.

- Si $\alpha > 0$, les trajectoires du système (2.14) partent de l'origine pour t tendant vers $-\infty$, puis spiralent et tendent en module vers l'infini quand t tend vers $+\infty$.

- Si $\alpha < 0$, les trajectoires tendent vers l'origine pour t tendant vers $+\infty$ en spiralant.

On en déduit que les trajectoires du système (2.14) sont des spirales.

On dit que l'origine est *un foyer répulsif* ou *un foyer instable* si $\alpha > 0$ et *un foyer attractif* ou *un foyer stable* si $\alpha < 0$ (figure 2.6).

Exemple 2.17. Les valeurs propres de la matrice associée au système

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y \\ \dot{y} = x - y \end{cases} \quad (2.16)$$

sont $(-1 + i\sqrt{2})$ et $(-1 - i\sqrt{2})$. L'origine est donc un foyer attractif pour le système (2.16) (figure 2.6).

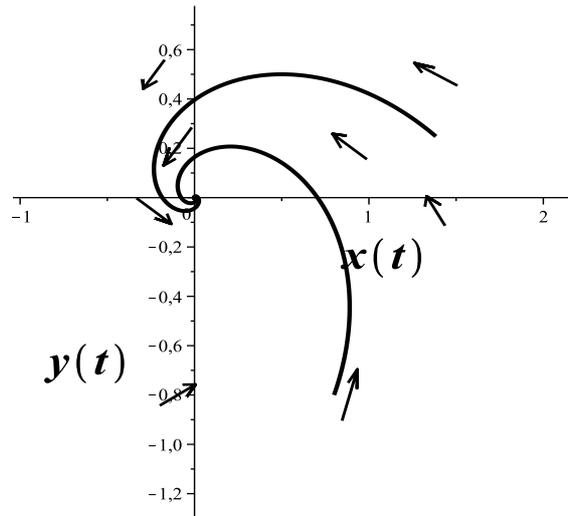


FIGURE 2.6 – Portrait de phase du système (2.16).

Les deux valeurs propres de la matrice A sont imaginaires pures

On suppose dans cette partie que la matrice A admet deux valeurs propres imaginaires pures $\pm i\beta$. Alors le système (2.5) peut se mettre sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = -\beta y \\ \dot{y} = \beta x \end{cases} \quad (2.17)$$

Les solutions du système (2.17) s'écrivent

$$\begin{cases} x(t) = c_1 \cos \beta t - c_2 \sin \beta t \\ y(t) = c_1 \sin \beta t + c_2 \cos \beta t \end{cases}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes réelles dépendantes des conditions initiales. Les solutions du système (2.17) sont des fonctions périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 de période $2\pi/\beta$. On peut remarquer aussi que $x(t)^2 + y(t)^2 = c_1^2 + c_2^2$. Les trajectoires non nulles de (2.17) sont donc des courbes fermées : ce sont les cercles centrés à l'origine, de rayons $\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$. On dit que l'origine est *un centre* pour le système (2.17) (figure 2.7).

Exemple 2.18. *L'origine est un centre pour le système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad (2.18)$$

2.4 Classification des points stationnaires selon la trace et le déterminant de la matrice A

Nous allons voir ici que la nature des points stationnaires (col, foyer, ...) d'un système linéaire homogène à coefficients constants de dimension deux ne

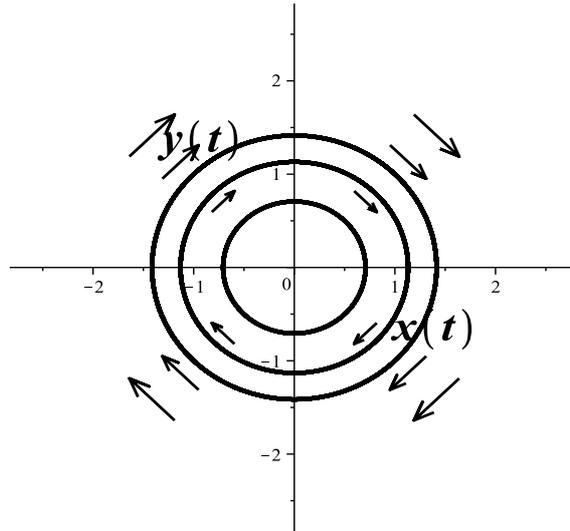


FIGURE 2.7 – Portrait de phase du système (2.18).

dépend que de la trace et du déterminant de la matrice associée à ce système.

On a étudié dans la section précédente la nature du point stationnaire du système (2.5) suivant les valeurs propres de la matrice A associée. Les conditions sur ces valeurs propres peuvent en fait s'exprimer en fonction de la trace

$$tr(A) = a + d$$

et du déterminant

$$\det(A) = ad - bc.$$

Les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont les racines du polynôme caractéristique de la matrice A

$$\lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A),$$

Notons

$$\Delta = tr(A)^2 - 4\det(A)$$

le discriminant de ce polynôme.

La classification des points stationnaires de (2.5) s'exprime alors comme suit :

1) Si $\Delta > 0$ (c'est à dire si les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont réelles), alors :

- si $\det(A) > 0$, l'origine est un noeud, attractif si $tr(A) < 0$ et répulsif si $tr(A) > 0$.

- si $\det(A) < 0$, l'origine est un col.

2) Si $\Delta < 0$ (c'est à dire que les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont complexes conjuguées), alors :

- si $tr(A) < 0$, l'origine est un foyer attractif.

- si $tr(A) = 0$ (c'est à dire que les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont imaginaires pures), l'origine est un centre.

- si $tr(A) > 0$, l'origine est un foyer répulsif.

On peut visualiser les résultats ci-dessus dans le plan $(tr(A), det(A))$, comme dans la figure 2.8, où les axes et la parabole d'équation $det(A) = tr(A)^2/4$ donnée par $\Delta = 0$ délimitent les régions correspondantes aux différentes situations.

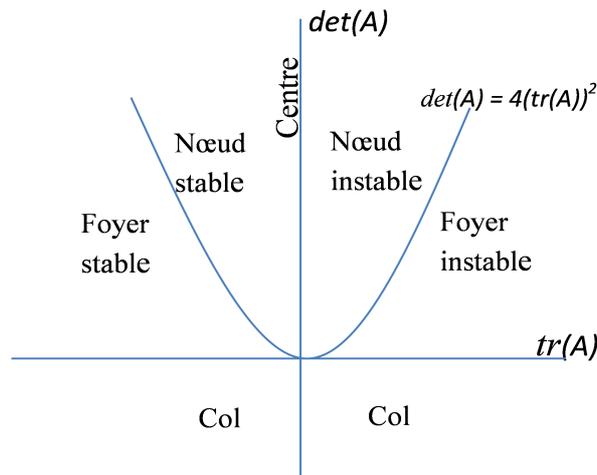


FIGURE 2.8 – Classification de Poincaré.

2.5 Linéarisation

Nous nous intéressons ici à l'allure des trajectoires d'un système autonome de dimension deux non linéaire, au voisinage de l'un de ses points stationnaires.

Nous verrons que l'on peut presque toujours approcher le système non linéaire, au voisinage d'un de ses points stationnaires, par un système linéaire, et constaterons à quel point les trajectoires de ces deux systèmes se ressemblent, lorsqu'on ne s'éloigne pas trop du point stationnaire.

Supposons que les fonctions f et g sont de classe \mathcal{C}^2 . Soit $P = (x_0, y_0)$ un point stationnaire du système (2.5).

On sait que le point P est une trajectoire en elle même. Nous nous intéressons plutôt aux trajectoires du système (2.5) qui passent près du point P .

Posons

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \quad c = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad d = \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Le développement limité des fonctions f et g à l'ordre un au voisinage de P s'écrit

$$\begin{cases} f(x_0 + h, y_0 + k) = ah + bk + R_1(h, k) \\ g(x_0 + h, y_0 + k) = ch + dk + R_2(h, k) \end{cases} \quad (2.19)$$

où les fonctions R_1 et R_2 sont de l'ordre de $o(\sqrt{h^2 + k^2})$.

Au voisinage de P , les termes $R_1(h, k)$ et $R_2(h, k)$ sont négligeables devant les parties linéaires $ah + bk$ et $ch + dk$, si ces parties linéaires ne sont pas nulles.

Ainsi, le système (2.1) est approché au voisinage du point stationnaire P par le système linéaire

$$\begin{cases} \dot{h} = ah + bk \\ \dot{k} = ch + dk \end{cases} \quad (2.20)$$

Le point stationnaire P est ramené à l'origine par le changement de variables

$$h = x - x_0 \quad \text{et} \quad k = y - y_0.$$

Le système (2.20) est de la forme $H' = JH$, où $H = (h, k)$ et

$$J = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est la matrice Jacobienne associée au système (2.1) au point P .

Le système (2.20) est dit *le linéarisé* du système (2.1) au voisinage du point stationnaire P .

2.5.1 Principe de la linéarisation

On va voir dans la partie suivante que lorsque les valeurs propres de la matrice Jacobienne d'un système différentiel en un point stationnaire P ne sont ni nulles, ni imaginaires pures, les trajectoires de ce système au voisinage de P se comportent comme les trajectoires de son linéarisé au voisinage de l'origine.

Ainsi, on va voir par exemple que si le linéarisé est un foyer attractif (valeurs propres complexes de partie réelle négative), les trajectoires du système initial au voisinage de P tendent vers A en spiralant. On dit encore que P est un foyer attractif.

On parlera de même de col ou de nœud (attractif ou répulsif), même pour un système non linéaire, si le linéarisé correspondant présente à l'origine un col ou un nœud.

En revanche, si le linéarisé présente un centre à l'origine, ce qui se produit quand les valeurs propres sont imaginaires pures, les trajectoires du système non linéaire ne se comportent pas forcément comme celles du linéarisé. Parfois, des considérations de symétrie permettent de montrer qu'au voisinage d'un tel point stationnaire, les trajectoires sont des courbes fermées qui entourent ce point.

2.5.2 Théorème de Hartman-Grobman

Considérons le système différentiel autonome de \mathbb{R}^2

$$\dot{X} = f(X) \tag{2.21}$$

où f est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 . On suppose que \bar{X} est un point stationnaire de (2.21).

Considérons aussi le système différentiel autonome

$$\dot{X} = AX \tag{2.22}$$

où $A = Df(\bar{X})$. Sans perte de généralité, on suppose que le point stationnaire \bar{X} est à l'origine. On a donc $A = Df(0)$.

Définition 2.19. ([5], [10]) *Deux systèmes différentiels autonomes sont dits topologiquement équivalents dans un voisinage de l'origine (point singulier de deux systèmes) s'il existe un homéomorphisme H d'un ouvert U contenant l'origine dans un ouvert V contenant aussi l'origine, envoyant les trajectoires du premier système issues de U dans celles du deuxième système dans V en préservant leurs orientation dans le temps (si une trajectoire est dirigée de X_1 vers X_2 dans U , alors son image par H est dirigée de $H(X_1)$ vers $H(X_2)$ dans V).*

Si de plus, l'homéomorphisme H préserve la paramétrisation des trajectoires par le temps, alors on dit que les deux systèmes différentiels sont topologiquement conjugués.

Dans la pratique, deux champs de vecteurs sont topologiquement conjugués si, lorsqu'on trace ces deux champs sur deux feuilles élastiques, alors on peut tirer une feuille et la mettre sur la deuxième, de sorte que les trajectoires des deux systèmes différentiels coïncident en respectant la paramétrisation de ces trajectoires par le temps.

Exemple 2.20. *Considérons les deux systèmes linéaires*

$$\dot{X} = AX \text{ et } \dot{Y} = BY$$

tels que

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

On a $B = PAP^{-1}$, où

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Posons $H(X) = PX$. Il est facile de vérifier que $Y = H(X)$ satisfait le système $\dot{Y} = BY$. En effet, $Y = H(X) = PX$ donne $X = P^{-1}Y$. Il s'ensuit que

$$\dot{Y} = P\dot{X} = PAX = PAP^{-1}Y = BY.$$

Ainsi, puisque $X(t) = \exp(At)X_0$ est la solution de l'équation $\dot{X} = AX$ passant par X_0 , alors

$$Y(t) = H(X(t)) = PX(t) = P \exp(At)X_0 = \exp(Bt)PX_0$$

est la solution du système $\dot{Y} = BY$ passant par PX_0 .

L'application $H(X) = PX$ est tout simplement la rotation d'un angle $\pi/4$, qui est un homéomorphisme de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 . Les portraits de phases de ces deux systèmes différentiels sont illustrés sur la figure 2.9.

L'application H envoie les trajectoires du système $\dot{X} = AX$ dans celles du système $\dot{Y} = BY$ en préservant l'orientation des trajectoires.

Avant d'énoncer le théorème important de cette partie (théorème de Hartman-Grobman), on donne la définition du *flot* :

Définition 2.21. Soit $X_0 \in E$ et soit $\varphi(t, X_0)$ la solution de l'équation différentielle (2.21) issue de la condition initiale X_0 , définie dans l'intervalle maximal $I(X_0)$. Alors, pour $t \in I(X_0)$, l'ensemble des applications φ_t définies par

$$\varphi_t(x_0) = \varphi(t, x_0)$$

est appelé *flot* de l'équation différentielle (2.21), ou le *flot* définie par l'équation différentielle (2.21).

Théorème 2.22. [10] (Théorème de Hartman-Grobman) Soit φ_t le flot du système différentiel non linéaire (2.21). Supposons que $f(0) = 0$ et que la matrice A n'a aucune valeur propre de partie réelle nulle. Alors il existe un

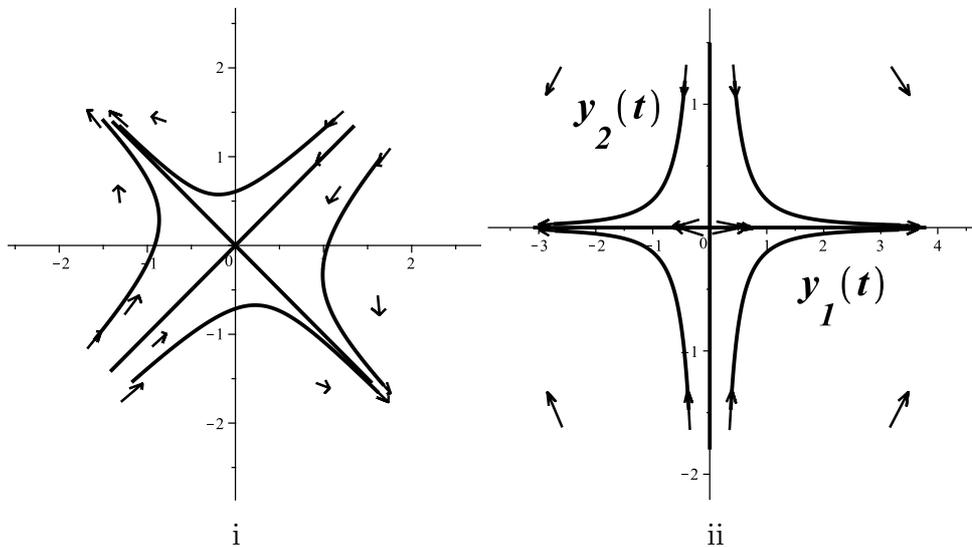


FIGURE 2.9 – Portrait de phase des systèmes : *i)* $\dot{X} = AX$, *ii)* $\dot{Y} = BY$.

homéomorphisme H d'un ouvert U dans un ouvert V , où U et V contiennent tous les deux l'origine et un intervalle ouvert I_0 de \mathbb{R} contenant zéro tel que pour tout X_0 de U et t de I_0 ,

$$H \circ \varphi_t(X_0) = \exp(At)H(X_0)$$

($\exp(At)$ est la solution du système (2.22)).

Le théorème ci-dessus assure qu'au voisinage de l'origine, lorsque celle-ci est une singularité hyperbolique de (2.21), les deux systèmes (2.21) et (2.22) sont topologiquement conjugués.

Exemple 2.23. *Considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -y - \sin x \end{cases} \quad (2.23)$$

Le système (2.23) modélise le comportement du mouvement d'un pendule. Les points stationnaires sont les points $P_n = (n\pi, 0)$, où n est un entier. La matrice Jacobienne associée au système (2.23) au point A_n est

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{n+1} & -1 \end{pmatrix}.$$

- Si n est pair, les valeurs propres de J_n sont complexes de partie réelle négative; les points stationnaires P_n sont des foyers attractifs.
- Si n est impair, les valeurs propres de J_n sont réelles de signes contraires; les points stationnaires P_n sont des cols.

Lorsque le linéarisé du système (2.21) présente un centre, le comportement des trajectoires de (2.21) au voisinage du point stationnaire ne ressemble pas toujours à celui du système linéarisé associé, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 2.24. *On considère le système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x - y(x^2 + y^2) \end{cases} \quad (2.24)$$

L'origine est un point stationnaire du système (2.24) et le système linéarisé associé présente un centre à ce point.

Le passage aux coordonnées polaires (r, θ) transforme le système (2.24) en

$$\begin{cases} \dot{r} = -r^3 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases} \quad (2.25)$$

Les solutions du système (2.24) sont des spirales convergeant vers $(0, 0)$ quand $t \rightarrow +\infty$. L'origine est donc un foyer stable pour le système non linéaire (2.24).

Chapitre 3

Cycles limites et théorème de Poincaré-Bendixson

3.1 Cycles limites

Un des comportements possibles pour une trajectoire d'un système différentiel est de tendre vers une orbite fermée : dans le cas d'un système planaire, cela signifie que les trajectoires tendent vers ce que l'on appelle un cycle limite.

Définition 3.1. *un cycle limite est une trajectoire fermée isolée de toute autre orbite fermée.*

D'après la définition ci-dessus, on peut apercevoir que les centres ne sont pas des cycles limites.

Définition 3.2. *Un cycle limite est dit attractif ou stable s'il existe un voisinage de ce cycle tel que toutes les trajectoires issues de ce voisinage tendent vers ce cycle, lorsque t tend vers $+\infty$.*

Définition 3.3. *Un cycle limite est dit répulsif ou instable s'il existe un voisinage de ce cycle tel que toutes les trajectoires issues de ce voisinage s'éloignent de ce cycle, lorsque t tend vers $+\infty$.*

Définition 3.4. *Un cycle limite est dit semi-stable s'il existe un voisinage de ce cycle tel que toutes les trajectoires issues de ce voisinage tendent vers ce cycle d'un côté de ce dernier et s'en éloignent de l'autre côté, lorsque t tend vers $+\infty$.*

Remarque 3.5. *Les cycles limites sont des séparatrices : ils séparent des régions où les trajectoires ont des comportements différents.*

Une des difficultés rencontrées est de montrer l'existence de ces cycles limites dans les systèmes différentiels, car nous ne disposons pas de beaucoup d'outils. On verra ici deux de ces outils.

3.1.1 Le passage en coordonnées polaires

Considérons le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y + ax(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = -x + ay(1 - x^2 - y^2) \end{cases} \quad (3.1)$$

où $a \in \mathbb{R}$.

Le passage pour le système (3.1), des coordonnées cartésiennes (x, y) , aux coordonnées polaires (r, θ) donne :

$$\begin{cases} \dot{r} = ar(1 - r^2) \\ \dot{\theta} = -1. \end{cases}$$

L'étude du système (3.1) montre que le cercle de rayon $r = 1$ (correspondant à $\dot{r} = 0$) est un cycle du système (3.1). L'étude de la stabilité de ce cycle révélera s'il s'agit d'un cycle limite ou pas. Cette stabilité dépend du signe de a . En effet :

- Si $a > 0$, on a $\dot{r} > 0$ pour $0 < r < 1$ et $\dot{r} < 0$ pour $r > 1$. Le cercle de rayon $r = 1$ est donc dans ce cas, un cycle limite stable ; on peut le voir clairement sur le portrait de phase représenté sur la figure 3.1.

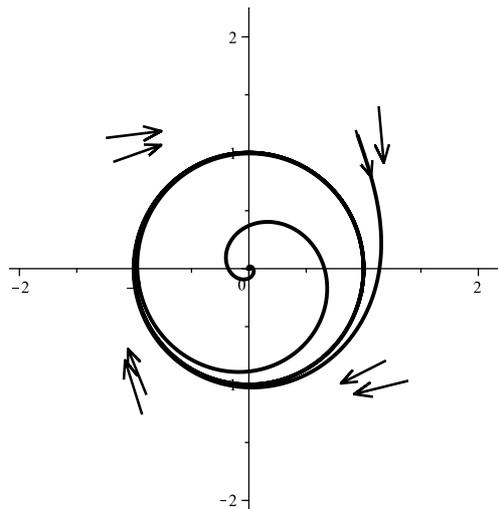


FIGURE 3.1 – Portrait de phase du système (3.1), lorsque $a > 0$.

- Si $a < 0$, on a $\dot{r} < 0$ pour $0 < r < 1$ et $\dot{r} > 0$ pour $r > 1$. Il s'agit bien, dans ce cas, d'un cycle limite instable pour le cercle de rayon $r = 1$, comme le montre la figure 3.2.

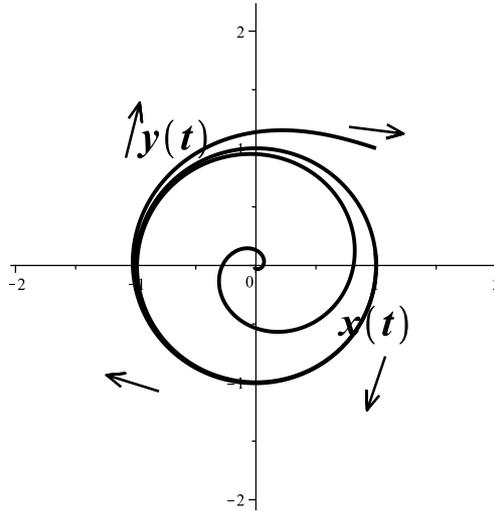


FIGURE 3.2 – Portrait de phase du système (3.1), lorsque $a < 0$.

3.1.2 Théorème de Poincaré-Bendixson

On considère un système dynamique autonome

$$\dot{x} = f(x) \tag{3.2}$$

où $x(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une fonction continue et localement lipschitzienne dans Ω .

On considère une solution x dont la demi-orbite positive $\mathcal{O}^+ = \{x(t) ; t \geq 0\}$ est contenue dans un ensemble compact K .

Pour énoncer le théorème de Poincaré-Bendixson, on a besoin des définitions suivantes :

Définition 3.6. *Un point z est dit point omega-limite de \mathcal{O}^+ s'il existe une suite $(t_n)_n$ tendant vers $+\infty$ telle que $x(t_n)$ tend vers z .*

Définition 3.7. *Soit ϕ_t le flot du système (3.2), définie pour tout t dans \mathbb{R} . Un ensemble E de Ω est dit positivement invariant par (3.2) si*

$$\phi_t(E) \subset E, \forall t \geq 0,$$

Il est dit *négativement invariant* par (3.2) si

$$\phi_t(E) \subset E, \forall t \leq 0$$

et il est dit *invariant* s'il est *positivement invariant* et *négativement invariant* par (3.2). C'est-à-dire

$$\phi_t(E) \subset E, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Comme \mathcal{O}^+ est contenue dans un compact K , celle-ci admet forcément des points omega-limites. En effet : Toute suite $(x(t_n))_n$ de K est bornée, donc admet une valeur d'adhérence z . Par définition d'une valeur d'adhérence, z est une limite d'une sous suite de $(x(t_n))_n$.

Notons ω l'ensemble de tous les points omega-limites de \mathcal{O}^+ . L'ensemble ω est un fermé contenu dans le compact K ; donc, c'est aussi un compact.

Il existe plusieurs versions du théorème de Poincaré-Bendixson, dont voici une :

Théorème 3.8. *Si l'ensemble ω ne contient aucun point stationnaire, alors ω est un cycle.*

Pour voir ce qui se passe dans le cas où ω contient un point stationnaire du système (3.2), on peut considérer le cas le plus simple où $\omega = \{x_0\}$ tel que x_0 est un point stationnaire de (3.2). Si $x(t)$ ne tend pas vers x_0 quand t tend vers $+\infty$, il existera un $\varepsilon > 0$ tel que $|x(t) - x_0| \geq \varepsilon$ pour un temps t suffisamment grand. Comme K est compact, il existera forcément un autre point omega-limite dans l'ensemble $\{z \in K : |z - x_0| \geq \varepsilon\}$, ce qui est absurde puisqu'on a supposé que ω est réduit au point x_0 .

On donne une démonstration du théorème de Poincaré-Bendixson en plusieurs étapes sous formes de plusieurs lemmes. On aura besoin d'abord de la définition suivante :

Définition 3.9. *Un segment de droite $L \subset \Omega$ est dit *transverse* si le champ de vecteurs (3.2) en tout point de L n'est pas colinéaire à L .*

Remarque 3.10. *Comme conséquence de la continuité des solutions du système (3.2) par rapport aux conditions initiales, le champ de vecteurs (3.2) sur le segment transverse L se dirige vers un seul côté de L .*

Lemme 3.11. *Si une orbite \mathcal{O} de (3.2) rencontre un segment transverse L en au moins deux points différents, alors l'orbite \mathcal{O} n'est pas fermée. De plus, si \mathcal{O} rencontre L plusieurs fois, alors les points de croisement sont ordonnés sur L dans le même ordre que sur l'orbite \mathcal{O} .*

Preuve

Si l'orbite \mathcal{O} croise le segment transverse L en deux points A et B respectivement (voir figure 3.3), elle ne pourra plus repasser par A . Ceci signifie que \mathcal{O} n'est pas fermée. La trajectoire \mathcal{O} ne peut pas non plus couper le segment L en un point situé entre A et B , pour ne pas contredire le sens du champ de vecteurs (3.2) sur L .

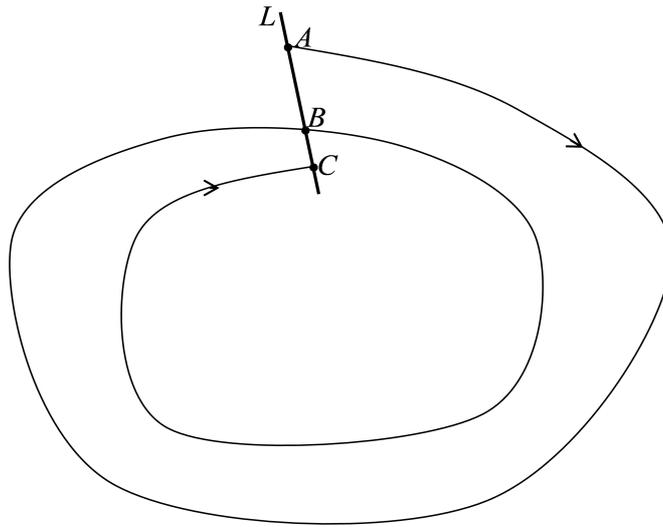


FIGURE 3.3 – Croisement d'une orbite de (3.2) avec un segment transverse L .

Lemme 3.12. *Soit z un point d'une orbite \mathcal{O} du système (3.2). Le point z est omega-limite de \mathcal{O} si et seulement si \mathcal{O} est fermée.*

Preuve

La condition nécessaire est évidente. Pour montrer que la condition est suffisante, on suppose qu'un point A de l'orbite \mathcal{O} est un point omega-limite de \mathcal{O} .

Si A est un point stationnaire de (3.2), on est dans un cas spécial d'une orbite fermée.

Dans le cas contraire, c'est à dire lorsque A n'est pas un point stationnaire de (3.2), on considère un segment transverse L passant par A . Comme A est un point omega-limite, alors après un certain temps, l'orbite \mathcal{O} recroise L en un point B suffisamment proche de A .

Si l'orbite \mathcal{O} n'est pas fermée, alors $A \neq B$. L'orbite \mathcal{O} ne pourra plus recroiser L en un point compris entre A et B (voir la figure 3.3); ainsi, l'orbite

\mathcal{O} s'éloigne de plus en plus du point A . Ceci contredit le fait que A est un point omega-limite de \mathcal{O} .

Lemme 3.13. *Si p est un point omega-limite d'une trajectoire \mathcal{O} de (3.2), alors tous les autres points de la trajectoire $\phi(\cdot, p)$ de (3.2) passant par le point p sont aussi des points omega-limite de \mathcal{O} .*

Preuve

Soit p un point omega-limite de l'orbite \mathcal{O} où \mathcal{O} est la trajectoire $\phi(\cdot, x_0)$ de (3.2) issue du point x_0 de Ω .

Soit q un point de la trajectoire $\phi(\cdot, p)$ de (3.2) passant par le point p . c'est-à-dire, $q = \phi(t_1, p)$ pour un certain temps $t_1 \in \mathbb{R}$ (figure 3.4).

Il existe une suite $(t_n)_n$ tendant vers $+\infty$ telle que $\phi(t_n, x_0)$ tend vers p . Ainsi, puisque

$$\phi(t_n + t_1, x_0) = \phi(t_1, \phi(t_n, x_0))$$

et comme ϕ est une fonction continue, on aura

$$\lim_{t_n+t_1 \rightarrow +\infty} \phi(t_n + t_1, x_0) = \phi(t_1, p) = q$$

Par conséquent, q est un point omega-limite de $\phi(\cdot, x_0)$.

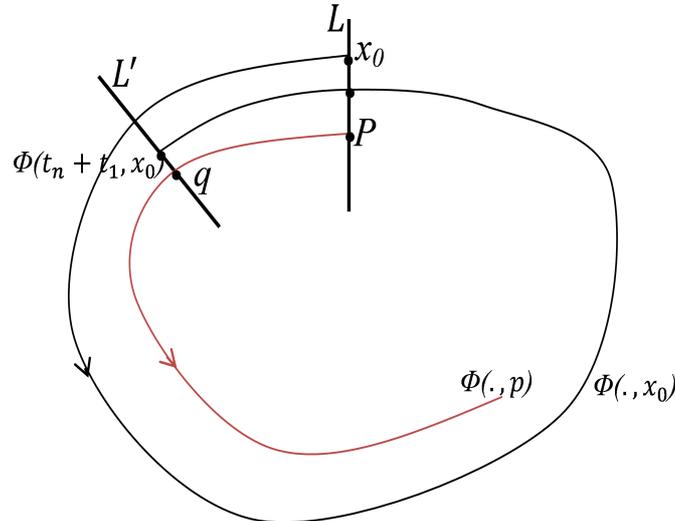


FIGURE 3.4 – Les points omega-limites de l'orbite \mathcal{O} .

Le lemme suivant est une conséquence évidente du lemme 3.13.

Lemme 3.14. *L'ensemble omega des points omega-limites de l'orbite \mathcal{O}^+ est invariant par le système (3.2).*

Preuve du théorème 3.8

Soient x_0 un point de ω qui n'est pas un point stationnaire de \mathcal{O}^+ (on rappelle que ω est l'ensemble des points omega-limites de \mathcal{O}^+).

- Si x_0 appartient à \mathcal{O}^+ , alors d'après le résultat ci-dessus, on déduit que \mathcal{O}^+ est fermée et par conséquent, \mathcal{O}^+ est égale à ω .

- Si x_0 n'appartient pas à \mathcal{O}^+ , alors \mathcal{O}^+ n'est pas fermée, d'après le lemme 3.12. Cependant, l'orbite \mathcal{O}' passant par x_0 est fermée. En effet, soit z un point omega-limite de l'orbite \mathcal{O}' et considérons le segment transverse L passant par z .

Le point z existe car d'après le lemme 3.13, comme \mathcal{O}' passe par x_0 qui est un point omega-limite de \mathcal{O}^+ , alors tous les points de \mathcal{O}' sont des points omega-limites de \mathcal{O}^+ . Donc \mathcal{O}' est une partie de l'ensemble ω . Ainsi, l'orbite \mathcal{O}' est incluse dans le compact K , puisque l'ensemble ω l'est aussi.

Si l'orbite \mathcal{O}' n'est pas fermée, elle passe forcément suffisamment proche de z et croise L une infinité de fois en des points de plus en plus proches de z . En particulier, \mathcal{O}' croise L en au moins deux points : en un point A puis en un deuxième point B .

Le point B est un point omega-limite de \mathcal{O}^+ , d'après le lemme 3.13. Ceci signifie que \mathcal{O}^+ croise L en des points suffisamment proches de B , en s'éloignant donc de A . Ceci contredit le fait que A est aussi un point omega-limite de \mathcal{O}^+ .

Comme la solution x s'approche de plus en plus de ω , en coupant le segment transverse L (passant par x_0) en une suite de points tendant vers x_0 et comme les solutions de (3.2) sont continues par rapport aux conditions initiales, il s'ensuit que l'orbite fermée \mathcal{O}' coïncide avec ω .

3.2 Exercices

Exercice 3.1. *En utilisant le théorème de Poincaré-Bendixson, montrer qu'un cycle limite d'un système différentiel autonome de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 , entoure forcément un point singulier.*

Exercice 3.2. *Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + ay + x^2y \\ \dot{y} = b - ay - x^2y \end{cases} \quad (3.3)$$

avec $b > a > 0$.

1). Considérons le trapèze dont les sommets sont $(0, 0)$, $(0, \frac{b}{a})$, $(b, \frac{b}{a})$, (α, β) et $(k, 0)$ tels que :

(α, β) est le point d'intersection de la droite de pente -1 passant par $(b, \frac{b}{a})$ avec la courbe $y = \frac{x}{a+x^2}$.

$(k, 0)$ est le point d'intersection de la droite verticale passant par le point (α, β) avec l'axe des x .

Montrer que ce trapèze délimite une région positivement invariante.

2). En déduire l'existence d'une solution périodique dans le cas où le point singulier du système (3.3) est un noeud instable.

Exercice 3.3. On considère le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \frac{1}{4}x(1 - 2r^2) \\ \dot{y} = -x + \frac{1}{2}y(1 - 2r^2) \end{cases} \quad (3.4)$$

où $r^2 = x^2 + y^2$.

1). Déterminer les points singuliers du système (3.4).

2). Réécrire le système (3.4) en coordonnées polaires.

3). Déterminer le signe de \dot{r} quand $r \notin [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$.

4). En déduire que $M = \left\{ (r, \theta) ; \frac{\sqrt{2}}{2} \leq r \leq 1 \right\}$ est positivement invariant.

5). Que peut-on dire sur l'existence d'une solution périodique pour le système (3.4) ?

Exercice 3.4. Considérons le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad (3.5)$$

où $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction impaire de classe \mathcal{C}^1 dont le graphe est illustré sur la figure 3.5.

1). Quelle est la nature des points singuliers de (3.5) ?

2). Soit $R(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Calculer \dot{R} et déterminer son signe quand $|x| \leq \alpha$.

Que signifie ce résultat ?

3). Montrer que si $(x(t), y(t))$ est une solution de (3.5), alors $(-x(t), -y(t))$ est aussi une solution de (3.5).

4). Supposons qu'une orbite de (3.5) issue d'un point $A = (0, y_1)$ avec $y_1 > 0$, coupe la droite $(y = 0)$ en un point $B = (\bar{x}, 0)$ tel que $\bar{x} > \beta$, puis recoupe la droite $(x = 0)$ en un point $C = (0, y_2)$ tel que $y_2 < 0$ et $|y_2| < y_1$. Montrer que le système (3.5) admet une orbite fermée.

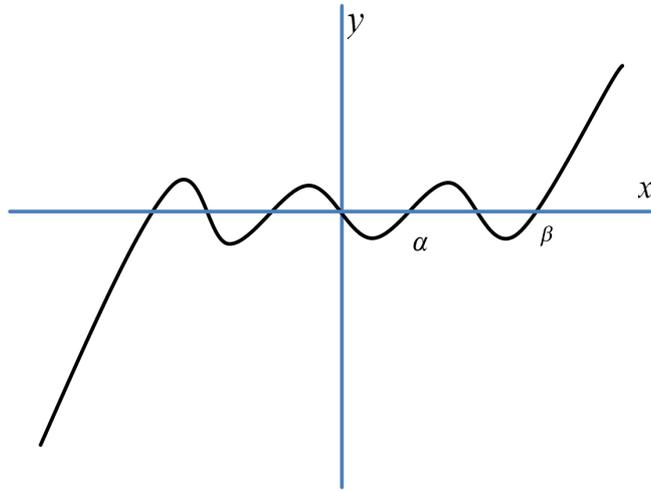


FIGURE 3.5 – Graphe de F .

Exercice 3.5. Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^3 + x \\ \dot{y} = -x - y^3 + y \end{cases} \quad (3.6)$$

1). Montrer que la région délimitée par les deux cercles $C_1((0,0), r_1)$ et $C_2((0,0), r_2)$ où $r_1 < 1$ et $r_2 > 2$ est positivement invariante pour le système (3.6).

2). Peut-on en déduire l'existence de solutions périodiques dans le système (3.6) ?

Exercice 3.6. Soit le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - 2y^2) \end{cases}$$

1). Notons $r^2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Qu'en est-il de la monotonie de r à l'extérieur de la région $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \frac{1}{4} < x^2 + y^2 < 1 \right\}$?

2). Que peut-on en déduire ?

Exercice 3.7. *Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y - 1 \\ \dot{y} = y(x - 2) \end{cases} \quad (3.7)$$

- 1). *Tracer l'allure du portrait de phase du système (3.7).*
 - 2). *Les droites joignant les points singuliers du système (3.7) sont-elles des solutions de (3.7) ?*
- En déduire si (3.7) possède une orbite fermée.*

Chapitre 4

Bifurcations dans \mathbb{R}^2

4.1 Introduction

Les systèmes différentiels de \mathbb{R}^2 dépendants de paramètres peuvent avoir différents comportements asymptotiques (tendre vers un point stationnaire, tendre vers un cycle limite, ...) en fonction des valeurs de leurs paramètres. Il existe un outil puissant permettant d'analyser qualitativement le comportement du système différentiel en fonction des valeurs de ses paramètres ; il s'agit de l'analyse de bifurcation. Il peut exister certaines valeurs des paramètres pour lesquelles le comportement du système différentiel passe d'un état qualitatif à un autre (par exemple tendre vers un point stationnaire pour une valeur du paramètre puis tendre vers un cycle limite pour une autre valeur). L'analyse de bifurcation a pour objectif de localiser ces éventuelles valeurs particulières des paramètres.

Définition 4.1. *Le changement qualitatif du comportement des solutions d'un système différentiel est dit bifurcation. La valeur du paramètre associée est appelée valeur de bifurcation.*

Remarque 4.2. *Sur un intervalle de valeurs d'un paramètre qui contient une valeur de bifurcation, le système différentiel est donc structurellement instable.*

Définition 4.3. *Une bifurcation est dite locale si elle ne concerne que le comportement des trajectoires au voisinage des singularités. Elle est dite globale si elle concerne le comportement globale des trajectoires.*

4.2 Bifurcations dans \mathbb{R}^2 à un paramètre

Nous allons étudier dans ce chapitre des systèmes différentiels de \mathbb{R}^2 dépendant d'un paramètre réel c ,

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, c) \\ \dot{y} = g(x, y, c) \end{cases} \quad (4.1)$$

où f et g sont des fonctions de \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R} dépendant du paramètre c , de classe \mathcal{C}^1 .

Plusieurs types de bifurcations peuvent se produire dans le système (4.1). On étudie ici certaines d'entre elles.

4.2.1 Bifurcation nœud-col

Soit le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + c \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (4.2)$$

On distingue trois cas :

1) *Cas où $c < 0$* : le système (4.2) admet deux points stationnaires $(-\sqrt{-c}, 0)$ et $(\sqrt{-c}, 0)$ qui sont respectivement, un nœud stable et un col.

Les isoclines verticales sont les deux droites $x = \pm\sqrt{-c}$ et l'isocline horizontale est la droite $y = 0$. Voir la figure 4.1 pour le portrait de phase du système (4.2).

2) *Cas où $c = 0$* : le système (4.2) admet l'origine comme unique point stationnaire. Il s'agit d'un point non-hyperbolique (une des deux valeurs propres de la matrice Jacobienne en $(0, 0)$ associée à (4.2) est nulle). Le système (4.2) est résoluble et le portrait de phase correspondant est illustré sur la figure 4.1.

Le portrait de phase du système (4.2) apparaît pour $c = 0$, comme étant un nœud stable dans le demi-plan des $x < 0$ et d'un point selle dans l'autre demi-plan.

3) *Cas où $c > 0$* : le système (4.2) n'admet aucun point stationnaire. La variable x est toujours croissante. La variable y est croissante dans le demi-plan inférieur et décroissante dans le demi-plan supérieur. La figure 4.1 illustre le portrait de phase du système (4.2) correspondant.

Sur la figure 4.1, la stabilité est représentée en trait continu et l'instabilité en pointillés.

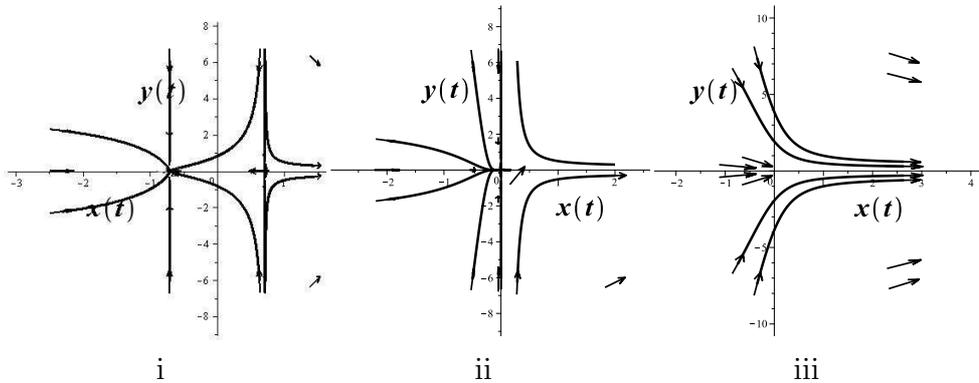


FIGURE 4.1 – Portrait de phase du système (4.2) pour *i*). $c < 0$, *ii*). $c = 0$, *iii*). $c > 0$.

Une bifurcation se produit donc dans le système (4.2) en $c = 0$. Cette bifurcation est dite *bifurcation nœud-col* et correspond à l'apparition simultanée de deux points stationnaires : l'un instable (un col) et l'autre stable (un nœud). D'une manière générale, cette bifurcation se produit lorsqu'une isocline verticale et une autre horizontale initialement disjointes, deviennent tangentes à la bifurcation et se croisent ensuite en deux points stationnaires (figure 4.2).

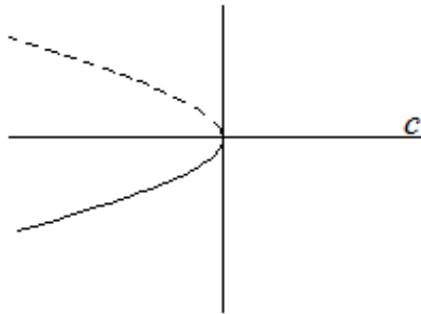


FIGURE 4.2 – Diagramme de la bifurcation nœud-col.

4.2.2 Bifurcation fourche

Considérons le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(-c - x^2) \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (4.3)$$

On distingue trois cas selon le signe du paramètre c :

1) *Cas où $c < 0$* : dans ce cas, le système (4.3) admet trois points stationnaires qui sont l'origine, le point $(-\sqrt{-c}, 0)$ et le point $(\sqrt{-c}, 0)$. L'origine est un col. Les deux autres points stationnaires sont des nœuds stables. Les isoclines verticales correspondent aux trois droites $x = 0$ et $x = \pm c$. L'isocline horizontale est la droite $y = 0$. Le portrait de phase est représenté sur la figure 4.3. Celui-ci montre un col à l'origine entouré de deux nœuds stables et symétriques autour de l'origine et qui s'en éloignent lorsque c augmente.

2) *Cas où $c = 0$* : dans ce cas, le système (4.3) admet l'origine comme unique point stationnaire qui est non-hyperbolique car une des deux valeurs propres de la matrice Jacobienne associée au linéarisé du système (4.3) en ce point est nulle. La résolution du système (4.3) quand $c = 0$ aboutit au portrait de phase tracé sur la figure 4.3.

On peut aussi considérer la fonction

$$V(x, y) = x^2 + y^2. \quad (4.4)$$

On a

$$\dot{V} = -2(x^4 + y^2), \quad (4.5)$$

est strictement négative sur la partie du plan

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0, y \neq 0\}. \quad (4.6)$$

La fonction V est de Lyapounov. On déduit grâce aux propriétés de cette fonction que l'origine est asymptotiquement stable.

3) *Cas où $c > 0$* : dans ce cas, le système (4.3) admet l'origine comme unique point stationnaire et qui est un nœud stable (figure 4.3).

Le système (4.3) passe de trois points stationnaires à un seul. Pour $c < 0$, le système (4.3) possède un col entouré de deux nœuds stables. Pour $c > 0$, le système (4.3) n'admet qu'un seul point stationnaire à l'origine. Le diagramme de bifurcation est présenté sur la figure 4.4.

On parle d'une *bifurcation fourche super-critique* en la valeur de bifurcation $c = 0$.

Pour la *bifurcation fourche sous-critique*, on peut considérer le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x(-c + x^2) \\ \dot{y} = -y, \end{cases} \quad (4.7)$$

dont le diagramme de bifurcation est représenté sur la figure 4.5.

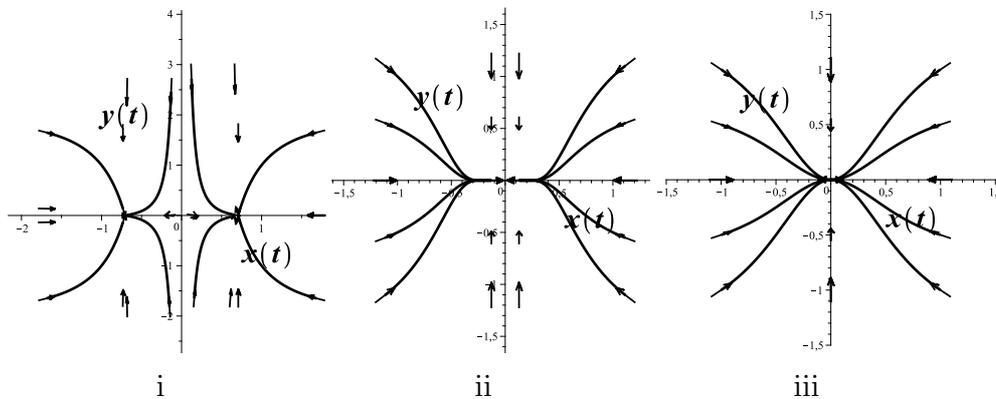


FIGURE 4.3 – Portrait de phase du système (4.3) pour *i*). $c < 0$, *ii*). $c = 0$,

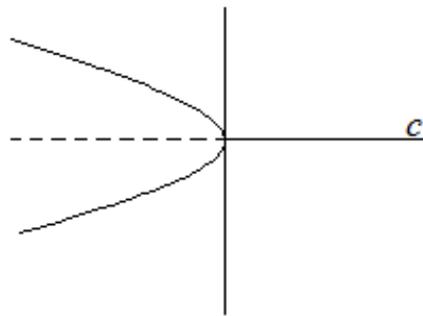


FIGURE 4.4 – Diagramme de la bifurcation fourche super-critique.

4.2.3 Bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf

Cas linéaire

Considérons le système différentiel linéaire de \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} \dot{x} = cx + y \\ \dot{y} = -x + cy. \end{cases} \quad (4.8)$$

On distingue les trois cas suivants :

- 1) $c < 0$: l'origine, unique point stationnaire du système (4.8), est un foyer stable.
- 2) $c = 0$: l'origine est un centre pour le système (4.8).
- 3) $c > 0$: l'origine est un foyer instable (figure 4.6).

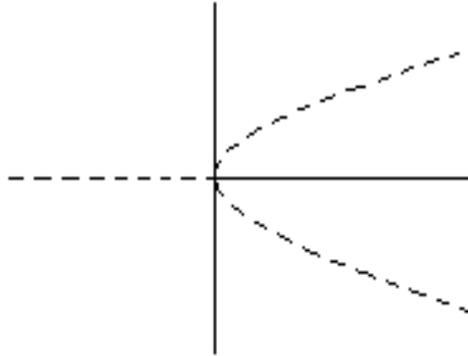


FIGURE 4.5 – Diagramme de la bifurcation fourche sous-critique.

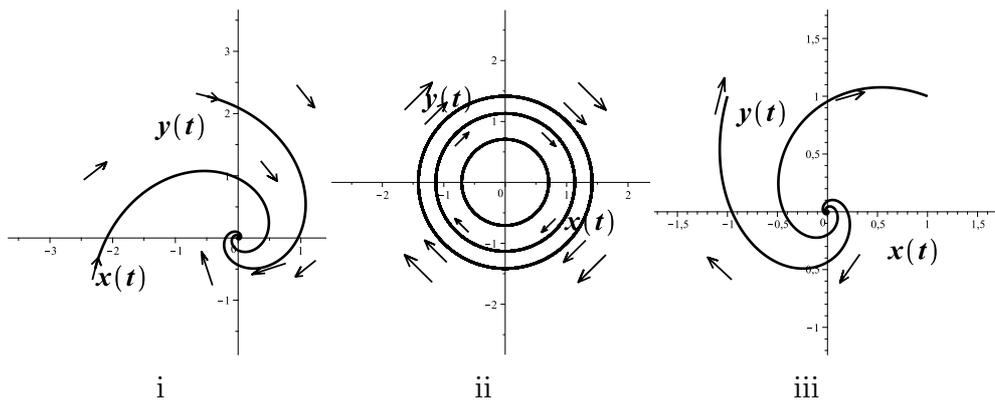


FIGURE 4.6 – Portrait de phase du système (4.8) pour *i*). $c < 0$, *ii*). $c = 0$, *iii*). $c > 0$.

L'unique point stationnaire de (4.8) change de nature; le système (4.8) admet un foyer stable pour $c < 0$ qui devient un foyer instable pour $c > 0$. A la bifurcation en $c = 0$, l'origine correspond à un centre. Cette bifurcation est dite *verticale*. Le diagramme de cette bifurcation est représenté sur la figure 4.7.

Cas non linéaire

I. Bifurcation super-critique

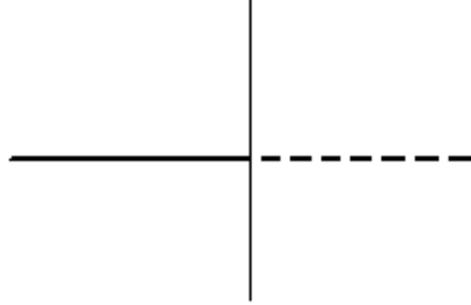


FIGURE 4.7 – Diagramme de la bifurcation verticale.

Considérons le système dynamique non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = cx + y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = -x + cy - y(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (4.9)$$

Le système (4.9) admet un unique point stationnaire à l'origine. Il est écrit sous forme d'une somme de deux termes : une partie linéaire qui est identique au système linéaire de la bifurcation verticale précédent, et une partie non linéaire.

Les valeurs propres de la matrice associée au linéarisé du système (4.9) au point $(0, 0)$ sont complexes. La partie réelle des valeurs propres est égale à c . Lorsque le paramètre c change de signe, l'origine passe d'un foyer stable à un foyer instable. Le système linéarisé de (4.9) prévoit un centre en $c = 0$, mais on va voir que ce n'est pas le cas pour le système (4.9). Pour cela, on passe dans le système (4.9) aux coordonnées polaires (r, θ) : le système (4.9) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = r(c - r^2) \\ \dot{\theta} = -1. \end{cases} \quad (4.10)$$

La seconde équation du système (4.10) admet la solution

$$\theta(t) = -t + \theta_0, \quad (4.11)$$

où θ_0 est la valeur de l'angle θ à l'instant $t = 0$. Les trajectoires tournent autour de l'origine.

La première équation du système (4.10) gouverne la variation de la distance à l'origine.

Le nombre de points stationnaires de la première équation de (4.10) varie selon le signe du paramètre c . On distingue alors les cas suivants :

1) $c \leq 0$: la première équation du système (4.10) admet un seul point stationnaire $r = 0$ correspondant à l'origine dans le plan cartésien (figure 4.8).

2) $c > 0$: la première équation du système (4.10) admet deux points stationnaires $r = 0$ et $r = \sqrt{c}$. Le premier point est instable et le second est stable (déjà expliqué au chapitre précédent).

Le cercle de centre l'origine et de rayon c est une trajectoire fermée isolée parcourue à la vitesse angulaire $\dot{\theta} = -1$. Il s'agit d'un cycle limite asymptotiquement stable (figure 4.8).

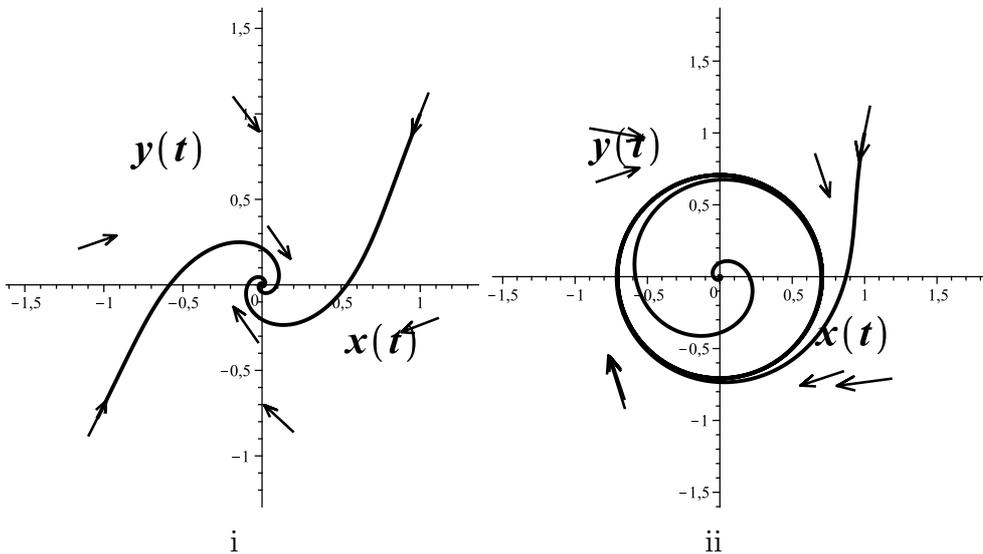


FIGURE 4.8 – Portrait de phase du système (4.10) pour *i*). $c \leq 0$, *ii*). $c > 0$.

Lorsque $c \leq 0$, l'origine est un foyer stable. Elle devient pour $c > 0$ un foyer instable entouré d'un cycle limite stable dont l'amplitude augmente avec la racine carrée du paramètre de bifurcation c . Il s'agit d'une *bifurcation de Hopf*, dite *super-critique* dans ce cas (naissance d'un cycle limite à la valeur de la bifurcation).

Pour tracer le diagramme de bifurcation, on utilise la même notation pour les cycles limites que pour les points stationnaires : la stabilité en trait plein et l'instabilité en pointillés (figure 4.9).

II. Bifurcation sous-critique

Pour la bifurcation de Hopf sous-critique (disparition d'un cycle limite à la valeur de la bifurcation), on peut considérer le système différentiel non

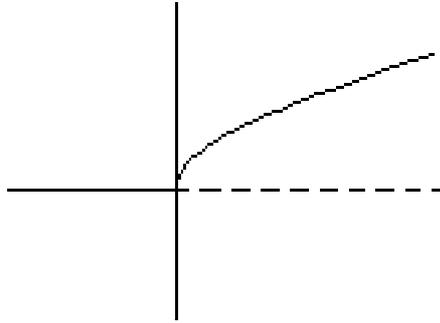


FIGURE 4.9 – Diagramme de la bifurcation de Hopf super-critique.

linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = cx + y + x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = -x + cy + y(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (4.12)$$

La partie linéaire du système (4.12) est la même que celle du système (4.9). Donc on est dans le même cas de figure que pour le point stationnaires de (4.9). Après changement en coordonnées polaires, le système (4.12) s'écrit

$$\begin{cases} \dot{r} = r(c + r^2) \\ \dot{\theta} = -1. \end{cases} \quad (4.13)$$

De même que précédemment, on vérifie que lorsque $c < 0$, l'origine est un foyer stable entouré d'un cycle limite instable de rayon $r = \sqrt{-c}$. Pour $c = 0$, l'origine est un foyer instable devenant un foyer stable pour $c > 0$. On peut voir le diagramme de la bifurcation sur la figure figure 4.10.

4.2.4 Bifurcation homocline

Soit le système différentiel de \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (4.14)$$

où f et g sont des fonctions de \mathbb{R}^2 suffisamment régulières. Supposons que l'origine est un point singulier isolé de (4.14).

Définition 4.4. [2, 7] Une orbite $(x(t), y(t))$ du système (4.14) est dite homocline à l'origine si $(x(t), y(t))$ est définie sur \mathbb{R} tout entier et tend vers $(0, 0)$ quand t tend vers $+\infty$ et quand t tend vers $-\infty$.

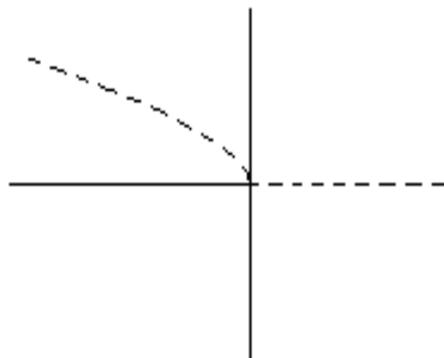


FIGURE 4.10 – Diagramme de la bifurcation de Hopf sous-critique.

Considérons le système différentiel de \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x + cy - x^2. \end{cases} \quad (4.15)$$

Les deux points $(0, 0)$ et $(1, 0)$ sont les points stationnaires du système (4.15). L'origine est un col, par contre le point stationnaire $(1, 0)$ est un foyer stable si $-2 < c < 0$ et instable si $0 < c < 2$. On a bien une valeur de bifurcation en $c = 0$. En cette valeur de bifurcation, le point $(1, 0)$ est un centre pour le système linéarisé de (4.15) en ce point. La résolution du système (4.15) donne :

$$y^2 - x^2 + \frac{2}{3}x^3 = C \quad (4.16)$$

où C est une constante de \mathbb{R} . Une étude de l'équation (4.16) aboutit au fait que le point stationnaire $(1, 0)$ est un centre pour (4.15), entouré d'une orbite homocline à l'origine (figure 4.11).

4.3 Exercices

Exercice 4.1. *On considère le système différentiel suivant :*

$$\begin{cases} \dot{u} = u(u(2 - u) - v) \\ \dot{v} = v(a - v - u) \end{cases} \quad (4.17)$$

où $a > 0$.

1). *Représenter dans le quadrant $\{u \geq 0, v \geq 0\}$, les isoclines, les points*

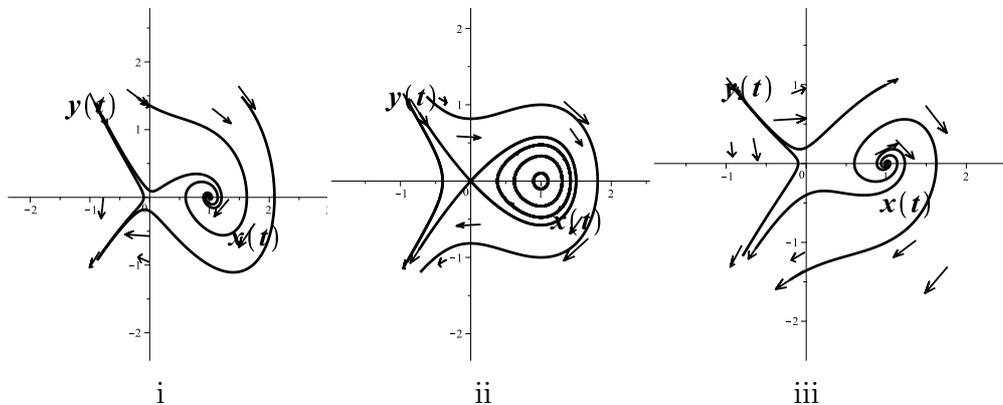


FIGURE 4.11 – Portraits de phase du système (4.15), *i*) $-2 < c < 0$, *ii*) $c = 0$, *iii*) $0 < c < 2$.

singuliers et le champ de vecteurs sur ces isoclines et dans les zones délimitées par ces isoclines.

2). Dans le domaine $\{u > 0, v > 0\}$, lorsque $a \notin \{2, \frac{9}{4}\}$, les points singuliers du système (4.17) sont non-dégénérés. Dans ce cas, sans aucun calcul, que peut-on dire (justifier) de la nature de ces points singuliers ?

3). Toujours quand $a \notin \{2, \frac{9}{4}\}$, quels sont les comportements asymptotiques possibles (justifier) des solutions issues du quadrant $\{u > 0, v > 0\}$, lorsque t tend vers $+\infty$?

4). Dans le quadrant $\{u > 0, v > 0\}$, quelles sont les bifurcations possibles pour le système (4.17) ? Donner la valeur de chaque bifurcation.

Exercice 4.2. On considère le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x(\mu - x) - (x + 1)y^2 \\ \dot{y} = y(x - 1) \end{cases} \quad (4.18)$$

où μ est un paramètre réel.

1). Tracer les isoclines du système (4.18) lorsque $\mu = 1$.

2). Montrer que si $(x(t), y(t))$ est une solution de (4.18), alors $(x(t), -y(t))$ est aussi une solution de (4.18). Que peut-on en déduire ?

3). Trouver les points singuliers du système (4.18).

4). Etudier la nature de ces points singuliers dans le cas où ils sont hyperboliques.

5). Quelles sont les bifurcations possibles dans le système (4.18) ? Donner la valeur de chaque bifurcation.

Chapitre 5

Les éclatements et le polygone de Newton

5.1 Polygone de Newton

Considérons le système différentiel polynomial

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (5.1)$$

où $P(x, y) = \sum_{i+j \geq 1} a_{ij} x^i y^j$ et $Q(x, y) = \sum_{i+j \geq 1} b_{ij} x^i y^j$.

Supposons que l'origine est un point singulier isolé non élémentaire du système (5.1). Pour étudier le comportement des solutions de (5.1) au voisinage de ce point, on effectue une série d'*éclatements directionnels quasi-homogènes*. On rappelle qu'un éclatement quasi-homogène *de degrés* (α, β) est un changement de variables ayant une des formes suivantes :

– Suivant la direction des x :

$$(x, y) \mapsto (x^\alpha, x^\beta y)$$

et

$$(x, y) \mapsto (-x^\alpha, x^\beta y).$$

– Suivant la direction des y :

$$(x, y) \mapsto (xy^\alpha, y^\beta)$$

et

$$(x, y) \mapsto (xy^\alpha, -y^\beta).$$

On choisit les poids dans ces éclatements à l'aide du *polygone de Newton*. M. Pelletier [9] a présenté un algorithme à base d'éclatements quasi-homogènes permettant la désingularisation des champs de vecteurs au voisinage des singularités non élémentaires. On peut voir aussi [1, 4, 6]. Rappelons d'abord ce qu'est un polygone de Newton. Posons

$$S = \{(i-1, j), a_{ij} \neq 0\} \cup \{(i, j-1), b_{ij} \neq 0\} \subset \mathbb{Z}^2.$$

Le polygone de Newton associé à (5.1) est l'enveloppe convexe de l'ensemble

$$N = \bigcup_{(r,s) \in S} \{(r', s') \in \mathbb{Z}^2 : r' \geq r, s' \geq s\}.$$

Notons γ_i les côtés du polygone de Newton associé à (5.1), énumérés de la gauche vers la droite : s'il existe un côté γ_k qui est situé complètement dans le demi-plan $\{r \leq 0\}$, alors on commence la numérotation des côtés du polygone par γ_0 , sinon on commencera par γ_1 .

Supposons que γ_1 a pour équation $\alpha r + \beta s = d$, avec α et β premiers entre eux.

5.2 Algorithme de l'éclatement

On décrit ici l'algorithme de désingularisation de (5.1), en utilisant le polygone de Newton :

Notons

$$P(x, y) = \sum_{j \geq d} P_j(x, y)$$

et

$$Q(x, y) = \sum_{j \geq d} Q_j(x, y),$$

où

$$P_j(r^\alpha x, r^\beta y) = r^{j+\alpha} P_j(x, y)$$

et

$$Q_j(r^\alpha x, r^\beta y) = r^{j+\beta} Q_j(x, y).$$

Ici on décrit seulement l'éclatement suivant la direction des x . L'éclatement suivant la direction des y est similaire.

Après division par x^d/α , le système (5.1) devient

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \sum_{\delta \geq d} \bar{x}^{\delta+1-d} P_\delta(1, \bar{y}) \\ \dot{\hat{y}} = \sum_{\delta \geq d} \bar{x}^{\delta-d} (\alpha Q_\delta(1, \bar{y}) - \beta \bar{y} P_\delta(1, \bar{y})) \end{cases} \quad (5.2)$$

où $\bar{x} = x^\alpha$ et $\bar{y} = x^\beta y$. On détermine les singularités sur l'axe (oy) :

1) Si

$$\alpha Q_d(1, \bar{y}) - \beta \bar{y} P_d(1, \bar{y}) \neq 0$$

les points $(0, \bar{y}_0)$ vérifiant l'équation

$$\alpha Q_d(1, \bar{y}) - \beta \bar{y} P_d(1, \bar{y}) = 0$$

sont des singularités de (5.2). Soit

$$N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

la matrice associée au linéarisé de (5.2) en $(0, \bar{y}_0)$. On a

$$A = P_d(1, \bar{y}_0)$$

$$D = \alpha \frac{\partial Q_d}{\partial \bar{y}}(1, \bar{y}_0) - \beta \left(P_d(1, \bar{y}_0) - \bar{y}_0 \frac{\partial P_d}{\partial \bar{y}}(1, \bar{y}_0) \right)$$

et

$$B = 0.$$

La matrice N possède ainsi deux valeurs propres $\lambda_1 = A$ et $\lambda_2 = D$.

Si la singularité $(0, \bar{y}_0)$ est hyperbolique ou semi-hyperbolique (une seule valeur propre nulle), le comportement au voisinage de ce point singulier est connu.

Si la singularité $(0, \bar{y}_0)$ est non élémentaire (les deux valeurs propres sont nulles), on translate le point singulier $(0, \bar{y}_0)$ à l'origine et on refait sur (5.2) le même procédé que ci-dessus, suivant les directions de \bar{x} et de \bar{y} .

2) Si

$$\alpha Q_d(1, \bar{y}) - \beta \bar{y} P_d(1, \bar{y}) = 0,$$

le système (5.2) possède une ligne de singularités et dans ce cas $\lambda_1 = P_d(1, \bar{y}_0)$ et $\lambda_2 = 0$.

Si $\lambda_1 \neq 0$, alors la singularité est semi-hyperbolique.

Si $\lambda_1 = 0$, alors la singularité est non élémentaire. Dans ce cas, un autre éclatement est nécessaire.

Remarque 5.1. *Cet algorithme aboutit toujours à une désingularisation [9].*

5.2.1 Exemple d'application

Considérons le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x^3(1 + k(x)) + bxy(1 + g(x)) + y^2 f(x, y) \end{cases} \quad (5.3)$$

L'origine est un point singulier dégénéré dans le système (5.3). Pour étudier le comportement des solutions de (5.3) au voisinage de ce point, on effectue une série d'éclatements directionnels quasi-homogènes de degré (α, β) qu'on déterminera : l'éclatement dans la direction des x

$$(x, y) \mapsto (\pm x^\alpha, x^\beta y)$$

et l'éclatement dans la direction des y

$$(x, y) \mapsto (xy^\alpha, \pm y^\beta)$$

On choisit les poids dans ces éclatements à l'aide du polygone de Newton.

On montre que le système (5.3) possède un secteur elliptique.

On procède par une série d'éclatements :

Les indices minimaux correspondants aux monômes $x^{i+1}y^j$ de \dot{x} et $x^i y^{j+1}$ de \dot{y} sont : $(-1, 1)$, $(1, 0)$ et $(3, -1)$.

Le polygone de Newton \mathcal{P} associé au système (5.3) est l'enveloppe convexe

$$\{(r, s) \in \mathbb{R}^2; r + 2s \geq 1 \text{ et } r \geq -1\}$$

illustrée sur la figure 5.1.

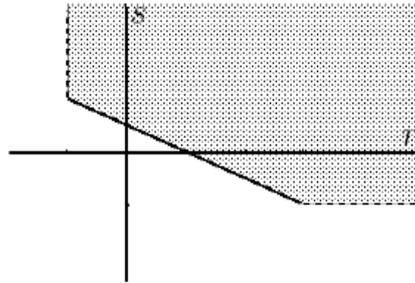


FIGURE 5.1 – Polygone de Newton associé au système (5.3).

Le premier côté γ_1 du polygone de Newton \mathcal{P} a pour équation $x + 2y = 1$. Ainsi, on choisit $(1, 2)$ comme étant la puissance des éclatements qu'on effectuera sur (5.3).

On aura besoin d'un éclatement suivant la direction des x et deux suivant celle des y .

Éclatement quasi-homogène suivant la direction des x :

En appliquant l'éclatement quasi homogène dans la direction des x suivant :

$$\begin{cases} x = u \\ y = u^2 v \\ d\tau = u dt, \end{cases} \quad (5.4)$$

on aboutit au système

$$\begin{cases} u' = uv \\ v' = -1 + bv - (p+1)v^2 - h(u) + bvg(u) + uv^2 f(u, u^2v). \end{cases} \quad (5.5)$$

Le système (5.5) possède deux points singuliers : un nœud répulsif $A_1 = (0, \alpha_1)$ et un col $A_2 = (0, \alpha_2)$ (Fig. 5.2), où

$$\alpha_1 = \frac{b - \sqrt{\lambda}}{4}$$

et

$$\alpha_2 = \frac{b + \sqrt{\lambda}}{4}.$$

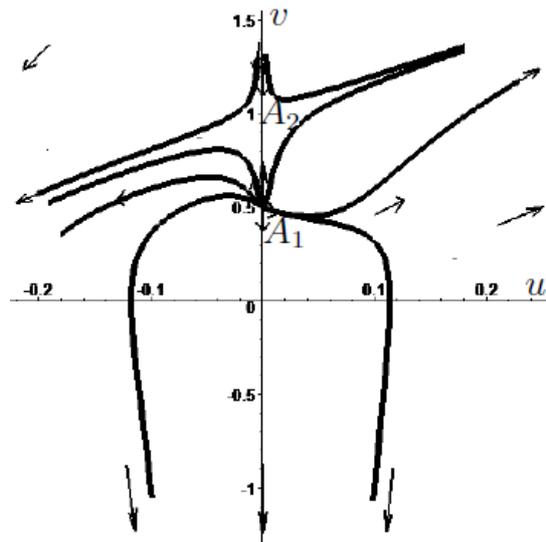


FIGURE 5.2 – Portrait de phases du système (5.5) au voisinage de A_1 et A_2 , avec $f(x, y) = g(x) = k(x) = x$ et $b = 3$.

L'axe (ov) est invariant sous le système (5.5). La continuité des solutions par rapport aux conditions initiales donne l'existence d'un $\delta > 0$ tel que pour tout u_0 dans l'intervalle $]-\delta, \delta[$, la solution $\gamma(u(t), v(t))$ issue de $(u_0, 0)$ tend vers A_1 quand τ tend vers $-\infty$ et passe dans le demi-plan inférieur quand τ tend vers $+\infty$.

Dans le plan (x, y) , la solution $\gamma(x(t), y(t))$ correspondante coupe l'axe (ox) . Elle passe, lorsque le temps est décroissant, du quadrant du plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0, y > 0\}$ au quadrant $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0, y < 0\}$.

De même, lorsque le temps est croissant, cette solution passe du quadrant du

plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0\}$ au quadrant $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y < 0\}$. Elle tend vers $(0, 0)$ dans la partie du plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0\}$ quand $t \rightarrow +\infty$ et dans la partie $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$ quand $t \rightarrow -\infty$.

Les autres solutions de (5.5) ne coupent pas forcément l'axe (ou) .

On peut remarquer que l'axe (oy) excepté l'origine, n'est pas représenté par le changement de variables (5.4). D'où la nécessité d'un éclatement quasi-homogène suivant la direction des y .

Éclatement quasi-homogène suivant la direction des y positifs :

L'éclatement $(x, y) \mapsto (u, v)$

$$\begin{cases} x = uv \\ y = v^2 \\ d\tau = v dt \end{cases} \quad (5.6)$$

transforme le système (5.3) en

$$\begin{cases} u' = 1 + \frac{u^4}{2}(1 + h(uv)) - \frac{bu^2}{2}(1 + g(uv)) - \frac{uv}{2}f(uv, v^2) \\ v' = -\frac{u^3v}{2}(1 + h(uv)) + \frac{buv}{2}(1 + g(uv)) + \frac{v^2}{2}f(uv, v^2) \end{cases} \quad (5.7)$$

Le système (5.7) possède quatre points singuliers (Fig. 5.3) : deux nœuds $B_1 = (u_1, 0)$ stable et $B_2 = (u_2, 0)$ instable et deux cols $B_3 = (u_3, 0)$ et $B_4 = (u_4, 0)$, où

$$u_1 = \left(\frac{b - \sqrt{\lambda}}{2}\right)^{1/2}, \quad u_2 = -\left(\frac{b - \sqrt{\lambda}}{2}\right)^{1/2},$$

$$u_3 = \left(\frac{b + \sqrt{\lambda}}{2}\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad u_4 = -\left(\frac{b + \sqrt{\lambda}}{2}\right)^{1/2}.$$

Certaines solutions de (5.7) tendent vers B_1, B_2, B_3 et B_4 quand τ tend vers ∞ . Les solutions de (5.3) correspondantes tendent lorsque $y > 0$, vers $(0, 0)$, dans le sens croissant du temps quand $x < 0$, et dans le sens décroissant du temps quand $x > 0$.

Les séparatrices ayant aux voisinages de B_1, B_2, B_3 et B_4 pour tangentes $u = u_1, u = u_2, u = u_3$ ou $u = u_4$, correspondent, dans le plan (x, y) , aux solutions du système (5.3) dont les tangentes au voisinage de $(0, 0)$ sont données par

$$y = \frac{1}{u_2^2} x^2 \quad (5.8)$$

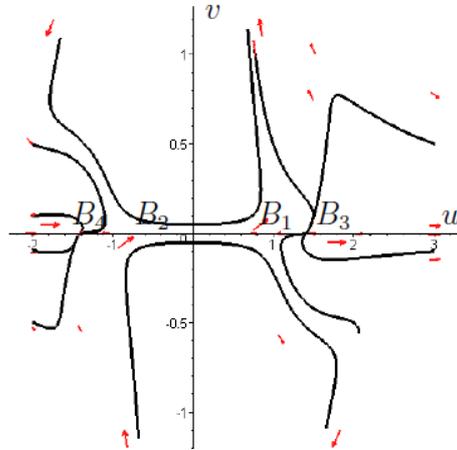


FIGURE 5.3 – Portrait de phases du système (5.7) au voisinage de B_1 , B_2 , B_3 et B_4 , avec $f(x, y) = g(x) = k(x) = x$ et $b = 3$.

et

$$y = \frac{1}{u_4^2} x^2 \quad (5.9)$$

On peut remarquer que $\frac{1}{u_2^2} = \alpha_2$ et $\frac{1}{u_4^2} = \alpha_1$.

L'axe (ou) est invariant sous le système (5.7). Par continuité des solutions par rapport aux conditions initiales, des solutions de (5.7) qui passent au voisinage de B_1 et de B_2 suffisamment proches des droites $u = u_1$ et $u = u_2$, avec des conditions initiales (u_0, v_0) telles que $u_2 < u_0 < u_1$ longent l'axe (ou), puis coupent l'axe (ov) en des points d'ordonnées proches de zéro.

Dans le plan (x, y) , ceci signifie que les solutions correspondantes passent au voisinage de l'origine près des courbes (5.8) et (5.9), puis coupent l'axe (oy) au voisinage de l'origine.

Une solution de (5.7) dont la composante v tend vers l'infini correspond dans le plan (x, y) , à une solution dont la composante y tend vers $+\infty$.

Les solutions tendant vers B_3 et B_4 ont une des deux composantes u ou v qui tend vers l'infini. Si v tend vers l'infini, ces solutions ne sont pas homoclines.

L'éclatement (5.6) est restreint au demi-plan $y \geq 0$. Pour $y < 0$, on effectue sur le système (5.3) l'éclatement suivant la direction des y négatifs.

Éclatement quasi-homogène suivant la direction des y négatifs :

L'éclatement suivant

$$\begin{cases} x = uv \\ y = -v^2 \\ d\tau = v dt \end{cases} \quad (5.10)$$

transforme le système (5.3) en

$$\begin{cases} u' = -1 - \frac{u^4}{2}(1 + h(uv)) - \frac{bu^2}{2}(1 + g(uv)) + \frac{uv}{2}f(uv, -v^2) \\ v' = \frac{u^3v}{2}(1 + h(uv)) + \frac{buv}{2}(1 + g(uv)) - \frac{v^2}{2}f(uv, -v^2) \end{cases} \quad (5.11)$$

Le système (5.11) ne possède aucun point singulier et l'axe (ou) est invariant sous ce système.

Le champ sur l'axe (ou) est horizontal.

Par continuité des solutions de (5.11) par rapport aux conditions initiales, il existe des solutions issues de points suffisamment proches de l'axe (ou) , qui coupent l'axe (ov) en des points d'ordonnées suffisamment proches de zéro. On en déduit que, dans le demi-plan inférieur, aucune solution du système (5.3) ne tend vers $(0, 0)$.

En assemblant les trois éclatements (5.4), (5.6) et (5.10) appliqués au système (5.3), on déduit que ce dernier possède un secteur elliptique.

Bibliographie

- [1] M. Brunella, M. Miari, Topological equivalence of a plane vector field with its principal part defined through Newton polyhedra, *JDE* 85, pp 338-366, 1990.
- [2] H. Dang-Vu, C. Delcarte, *Bifurcations et chaos, Une introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica*, Ellipse, 2000.
- [3] J. P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, Grenoble sciences, 2006.
- [4] F. Dumortier, J. Llibre, J. C. Artés, *Qualitative theory of planar differential systems*, Springer, 2006.
Wiley-Intersciences, 1969.
- [5] J. Hubbard, B. West, *Differential equations : A dynamical systems approach*. Higher dimensional systems, Springer-Verlag, 1995.
- [6] E. Jankowska Sahraoui, Diagrammes de Newton et leur application dans la désingularisation des champs vectoriels, *Universitatis iagellonicae acta mathematica*, Fasciculus XXXIII, 1996.
- [7] Y. A. Kuznetsov, *Elements of applied bifurcation theory*, third edition, Spriger Verlag, 2004.
- [8] N. Rouche, J. Mawhin, *Equations différentielles ordinaires*, Tome 1 : *Théorie générale*, Masson, Paris, 1973.
- [9] M. Pelletier, Éclatements quasi homogènes, *Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e série*, tome 4, N°4, pp 879-937, 1995.
- [10] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems*, Springer-Verlag, 2000.
- [11] S. Wiggins, *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, Springer Verlag, 2003.