L_2 Université A.MIRA–Bejaia

Faculté de Technologie

Départements de 2ème Année (ELT–ELM–ATE)

® 2020−2021

Résumé de Cours sur les Intégrales Simples et Multiples

0.1 Introduction

Dans ces chapitres, nous présentons dans un premier temps un bref rappel sur les intégrales simples. Dans un deuxième temps, nous généralisons la notion d'intégration simple à l'intégrale double et triple d'une fonction à deux et trois variables sur des parties bornées de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, respectivement. Particulièrement, nous focalisons sur le calcul pratique des intégrales doubles et triples, très utiles dans plusieurs domaines d'application, à savoir : la physique, la mécanique, etc.

Chapitre 1

Intégrales Simples

Dans ce Chapitre, nous donnons un bref rappel sur les intégrales simples, la technique d'intégration par parties, l'intégration par changement de variable et l'intégration de quelques fractions rationnelles.

1.1 Théorème fondamental

Soit f une fonction définie et continue sur $I = [a, b]$. L'intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$ est donnée par

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

où F est une primitive de f, i.e., $F'(x) = f(x)$ pour $x \in [a, b]$. On note $\int f(x)dx = F(x)$.

1.2 Interprétation géométrique :

L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ peut représenter une aire "algébrique". Elle est positive si $f \geq 0$ et négative si $f \leq 0$.

1.3 Primitives usuelles :

La connaissance des primitives des fonctions continues est importante dans le calcul des intégrales. Ci-dessous quelques primitives usuelles :

- $\int (x-a)^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1}(x-a)^{\alpha+1} + Cte, \alpha \neq -1$ et $a \in \mathbb{R}$.
- $\int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| + Cte$, $a \in \mathbb{R}$.
- $\int e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + Cte, \alpha \neq 0$.
- $\int \cos(\alpha x) dx = \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x) + Cte, \alpha \neq 0$.
- $\int \sin(\alpha x) dx = -\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha x) + Cte, \alpha \neq 0$.
- $\int \left(1 + \tan^2(x)\right) dx = \tan(x) + Cte$.
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + Cte$.
- $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + Cte$, $a \neq 0$.
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + Cte$, $a > 0$ et $a \neq 1$.

1.4 Techniques d'intégration

1.4.1 Technique par parties :

Soit U et V deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I = [a, b]$. Alors l'intégration par parties est donnée comme suit :

$$\int_a^b U(x)V'(x)dx = U(x)V(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b U'(x)V(x)dx.$$

Exemple 1. *Calculer* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\sin(x)dx$.

En utilisant la technique d'intégration par parties. D'abord, nous posons $U(x) = x+1$ et $V'(x) = \sin(x) \Rightarrow U'(x) = 1$ et $V(x) = -\cos(x)$. Ce qui donne par la suite :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\sin(x)dx &= -(x+1)\cos(x)\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx \\ &= -(x+1)\cos(x)\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} + \sin(x)\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = 2.\end{aligned}$$

1.4.2 Intégration par changement de variable :

Si le calcul de $\int_a^b f(x)dx$ s'avère trés difficile, on peut utiliser l'intégration par changement de variable. On pose $x = h(t)$, où h est bijective et de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a, b]$. Ce qui donne $dx = h'(t)dt$, donc

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{h^{-1}(a)}^{h^{-1}(b)} f(h(t))h'(t)dt,$$

où h^{-1} est la réciproque de h.

Exemple 2. *Calculer* $\int_1^2 \frac{1}{x\left(1+\ln^2(x)\right)}dx$.

Posons le changement de variable suivant $x = e^t \Rightarrow t = \ln(x) \Rightarrow dt = \frac{1}{x}dx$. Donc

$$\int_1^2 \frac{1}{x\left(1+\ln^2(x)\right)}dx = \int_0^{\ln(2)} \frac{1}{(1+t^2)}dt = \arctan(t)\Big|_0^{\ln(2)} = \arctan(\ln(2)).$$

1.4.3 Intégration de quelques fractions rationnelles :

1.4.3.1 Intégration de type $\int \frac{\alpha}{(x-a)^n}dx, n \in \mathbb{N}^*, \alpha, a \in \mathbb{R}$:

L'intégration de ce type de fraction rationnelle donne :

$$\int \frac{\alpha}{(x-a)^n}dx = \begin{cases} \frac{\alpha}{-n+1}(x-a)^{-n+1} + Cte, & n \neq 1\,; \\ \ln|x-a| + Cte, & n = 1. \end{cases}$$

Exemple 3. *Calculer* $\int_2^3 \frac{2}{x^2-2\sqrt{2}x+2}dx$.

Notons que $\frac{2}{x^2-2\sqrt{2}x+2} = \frac{2}{(x-\sqrt{2})^2}$. D'où

$$\int_2^3 \frac{2}{x^2-2\sqrt{2}x+2}dx = \int_2^3 \frac{2}{(x-\sqrt{2})^2} = -2(x-\sqrt{2})^{-1}\Big|_{x=2}^{x=3} = \frac{2}{2-\sqrt{2}} - \frac{2}{3-\sqrt{2}}.$$

1.4.3.2 Intégration de type $\int \frac{\alpha x+\beta}{x^2+bx+c}dx, \alpha, \beta, b, c \in \mathbb{R}$ avec $b^2 - 4c > 0$:

Supposons que l'équation $x^2 + bx + c = 0$ admet deux racines réelles différentes x_1 et x_2 (i.e., $\Delta = b^2 - 4c > 0$). Cela dit, $x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$. Par conséquent, l'équation $\frac{\alpha x+\beta}{x^2+bx+c}$ peut se décomposer en éléments simples comme suit :

$$\frac{\alpha x+\beta}{x^2+bx+c} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2},$$

où A et B sont des constantes qu'il faut bien déterminer. De ce fait, on déduit que

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{x^2+bx+c}dx = \int \frac{A}{x-x_1}dx + \int \frac{B}{x-x_2}dx = A\ln|x-x_1| + B\ln|x-x_2| + Cte.$$

Exemple 4. *Calculer* $\int_3^5 \frac{x+2}{x^2-3x+2}dx$.

Nous commençons par décomposer l'équation $\frac{x+2}{x^2-3x+2}$ en éléments simples. Pour ce faire, on peut remarquer facilement que l'équation $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. Cela donne par identification du fait que $\frac{x+2}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} \Rightarrow A = -3$ et $B = 4$. On obtient alors le résultat recherché :

$$\int_3^5 \frac{x+2}{x^2-3x+2}dx = \int_3^5 \frac{-3}{x-1}dx + \int_3^5 \frac{4}{x-2}dx = -3\ln(x-1)\Big|_{x=3}^{x=5} + 4\ln(x-2)\Big|_{x=3}^{x=5} = \ln\left(\frac{729}{64}\right).$$

1.5 Exercices supplémentaires sur les intégrales simples

1. Calculer $\int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{x^2}dx$ et $\int_1^e \cos(\pi \ln x)dx$, en utilisant l'intégration par parties.
2. En utilisant l'intégration par changement de variables, calculer les deux intégrales suivantes $\int_1^e \frac{e^x}{e^x+1}dx$ et $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{1-\cos(x)}dx$.
3. En décomposant en éléments simples, calculer $\int_2^4 \frac{x+1}{(x+2)(x-1)^2}dx$ et $\int_3^5 \frac{2}{(x+1)(x^2+2x-3)}dx$.

Chapitre 2

Intégrales Doubles

Dans cette partie, nous généralisons la notion d'intégration simple à l'intégrale double d'une fonction à deux variables $f(x, y)$ sur une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$. Nous présentons d'abord le calcul pratique des intégrales doubles sur un pavé, par la suite sur des parties déformées bornées de $\mathbb{R}^2$. En dernier, nous focalisons sur la technique de changement de variables, notamment le passage en coordonnées polaires.

2.1 Définition

Soit D une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$, et soit f une fonction à deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie et continue sur le domaine D. L'intégrale double de f sur D est donnée par :

$$\int\int_D f(x, y)dxdy.$$

Interprétation géométrique :

L'intégrale double $\int\int_D f(x, y)dxdy$ peut représenter un volume "algébrique".

2.2 Propriétés de l'intégrale double

Soit D une partie bornée de $\mathbb{R}^2$.

1. **Aire**(D) : Si $f(x,y)=1$, alors :
$$Aire(D)=\int\int_D dxdy.$$
2. **Positivité** : Si $f(x,y)\geq 0$ pour $(x,y)\in D$, alors :
$$\int\int_D f(x,y)dxdy \geq 0.$$
3. **Linéarité** : Soient deux fonctions à deux variables f et g qui sont intégrables sur D et $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, alors :
$$\int\int_D (\lambda f(x,y)+\mu g(x,y))\,dxdy=\lambda\int\int_D f(x,y)dxdy+\mu\int\int_D g(x,y)dxdy.$$
4. **Relation de Chasles** : Si $D=D_1\cup D_2$ et $D_1\cap D_2=\emptyset$ (D_1 et D_2 deux domaines qui sont disjoints, i.e., $Aire(D_1\cap D_2)=0$), alors :
$$\int\int_D f(x,y)dxdy=\int\int_{D_1} f(x,y)dxdy+\int\int_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

2.3 Calcul pratique des intégrales doubles

Nous intéressons dans cette section au calcul pratique des intégrales doubles.

2.3.1 Intégrale double sur un pavé (rectangle) :

Théorème de Fubini :

Soit $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ continue sur le pavé (rectangle) $D=[a,b]\times[c,d]$. Alors, les égalités suivantes sont vérifiées :
$$\int\int_D f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy.$$
(**Dans ce cas, l'ordre d'intégration n'est pas forcé. Par conséquence, on peut choisir l'ordre qui peut nous faciliter davantage les calculs**).

Exemple 5. *Calculer l'intégrale suivante :* $\int\int_D (2x+y)dxdy$, *sur le domaine donné par*
$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | 1\leq x\leq 2 \ \ et \ 0\leq y\leq 2\right\}.$$

Comme l'ordre d'intégration n'est pas important dans cette situation. Alors, nous commençons d'abord l'intégration par rapport à la variable y puis par rapport à x, ce qui nous permet d'obtenir le résultat suivant :

$$\begin{aligned}\int\int_D (2x+y)dxdy &= \int_1^2 \left(\int_0^2 (2x+y)dy\right) dx = \int_1^2 2xy + \frac{1}{2}y^2\Big|_{y=0}^{y=2} dx \\ &= \int_1^2 (4x+2)dx = 2x^2+2x\Big|_{x=1}^{x=2} = 8.\end{aligned}$$

Proposition 1. *Si f est une fonction à variables séparées, c'est-à-dire, la fonction $f(x,y)$ peut s'écrire sous la forme $f(x,y) = f_1(x) \times f_2(y)$. Cela nous permet d'écrire ce qui suit :*

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b f_1(x)dx \times \int_c^d f_2(y)dy.$$

Exemple 6. *Calculer l'intégrale : $\int\int_D \sin(x)\cos(y)dxdy$, où $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ et $0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}\big\}$.*

On peut remarquer facilement que la fonction f est bien à variables séparées. Ce qui donne :

$$\int\int_D \sin(x)\cos(y)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx \times \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(y)dy = -\cos(x)\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \times \sin(y)\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2.3.2 Intégrale double sur une partie bornée et déformée de $\mathbb{R}^2$

Soit D une partie déformée de $\mathbb{R}^2$ incluse dans le pavé $[a,b] \times [c,d]$. Donc, la partie D peut se présenter sous l'une des formes suivantes :

Forme 1 (Type 1) : $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq a \leq b \text{ et } g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\big\}$.

Forme 2 (Type 2) : $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | c \leq y \leq d \text{ et } g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\big\}$.

Théorème de Fubini

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur D. Alors, on a

1. Si D s'écrit sous la **Forme 1** :

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\right) dx.$$

2. Si D s'écrit sous la **Forme 2** :

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

(*Selon le domaine d'intégration D définit ci-dessus, l'ordre d'intégration est forcé*).

Exemple 7. *Calculer l'intégrale suivante :* $\int\int_D xydxdy$*, où le domaine est donné :*

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \le x \le 1 \ et \ x^2 \le y \le \sqrt{x} \right\}.$$

On peut remarquer facilement que le domaine D s'écrit sous la **Forme 1**. Dans cette situation, notre intégrale se calcule de la manière suivante :

$$\int\int_D xydxdy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xydy \right) dx = \int_0^1 \frac{x}{2} y^2 \Big|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{2} \right) dx = \frac{x^3}{6} - \frac{x^6}{12} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{12}.$$

2.3.3 Changement de variables :

Dans plusieurs situations le calcul de $\int\int_D f(x,y)dxdy$ s'avère très difficile. Pour remédier à cette situation, on peut faire appel à la technique de changement de variables pour pouvoir calculer facilement $\int\int_D f(x,y)dxdy$. Dans ce cas, le changement de variables est donné comme suit : $(x,y) = h(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$, où h est une bijection et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Delta = h^{-1}(D)$. Alors, on a

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_\Delta f\left(x(u,v), y(u,v)\right) |J_h| dudv,$$

où J est la matrice Jacobienne donnée par

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix},$$

et $|J_h| = \det(J_h) = |\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}|$ est la valeur absolue de déterminant du la matrice Jacobienne qui ne doit pas s'annuler sur Δ.

Par la suite, nous présentons deux exemples différents qui montrent que le changement de variables est très important dans les deux situations suivantes : (1) lorsque la partie D est délimitée par quatre droites et (2) lorsque le domaine D est délimitée par des formes circulaires.

2.3.3.1 Cas 1 : La partie D est délimitée par quatre droites :

Exemple 8. *Calculer l'intégrale double suivante :* $\int\int_D (x+2)^2 dxdy$, *où*

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -2 \leq y+x \leq 2 \ \ et \ \ -1 \leq x-y \leq 1\Big\}.$$

En utilisant le changement de variables suivant :

On pose $y+x = u$ *et* $x-y = v \Rightarrow (x,y) = (\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})$.

Dans ce cas, la matrice Jacobienne est donnée par :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow |J| = \frac{1}{2}.$$

Avec ce changement de variable, le nouveau domaine Δ *s'écrit alors :*

$$\Delta = \Big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | -2 \leq u \leq 2 \ \ et \ \ -1 \leq v \leq 1\Big\}.$$

La démarche du calcul de notre intégrale est :

$$\begin{aligned}
\int\int_D (x+2)^2 dxdy &= \int\int_\Delta \left(\frac{u+v}{2} + 2\right)^2 \frac{1}{2} dudv \\
&= \frac{1}{8}\int\int_\Delta (u^2 + 2uv + v^2 + 8u + 8v + 16) dudv \\
&= \frac{1}{8}\int_{-2}^{2} \left(\int_{-1}^{1} (u^2 + 2uv + v^2 + 8u + 8v + 16) dv\right) du \\
&= \frac{1}{8}\int_{-2}^{2} \left(u^2 v + uv^2 + \frac{1}{3}v^3 + 8uv + 4v^2 + 16v\right)\Bigg|_{y=-1}^{y=1} du \\
&= \frac{1}{8}\int_{-2}^{2} \left(2u^2 + 16u + \frac{98}{3}\right) du = \frac{1}{8}\left(\frac{2}{3}u^3 + 8u^2 + \frac{98}{3}u\right)\Bigg|_{x=-2}^{x=2} = \frac{53}{3}.
\end{aligned}$$

2.3.3.2 Cas 2 : Coordonnées polaires :

Lorsque le domaine D est délimitée par des formes circulaires, cela nous permet d'utiliser les coordonnées polaires comme changement de variable. Pour cela, on considère les variables suivantes : $x = x(r,\theta) = r\cos(\theta)$ et $y = y(r,\theta) = r\sin(\theta)$. Comme rappel, notons qu'un point $M = (x,y)$ est caractérisé par sa distance à l'origine $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $(r \geq 0)$ et son angle $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$ avec $r \neq 0$ (d'une manière générale $0 \leq \theta < 2\pi$).

En utilisant les coordonnées polaires, la matrice Jacobienne s'écrit souvent :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix} \Rightarrow det(J) = r.$$

Par conséquent, on a :

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_\Delta f\left(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\right) r dr d\theta,$$

Exemple 9. *Le calcul de* $\int\int_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$*, en utilisant les coordonnées polaires, avec*

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\right\}.$$

Le passage en coordonnées polaires donne immédiatement

$$\int\int_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = \int\int_\Delta dr d\theta,$$

avec le domaine $\Delta = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq r \leq \sqrt{2} \text{ et } 0 \leq \theta < 2\pi\right\}$*. Finalement, on obtient*

$$\int\int_\Delta dr d\theta = \int_1^{\sqrt{2}} dr \times \int_0^{2\pi} d\theta = r\Big|_{r=1}^{r=\sqrt{2}} \times \theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 2\pi(\sqrt{2}-1).$$

2.4 Exercices sur les intégrales doubles

1. Calculer les intégrales doubles suivantes : $\int\int_{D_1} \frac{dxdy}{(x+y)^2}$ et $\int\int_{D_2} \left(e^y \cos(x) + 2\right) dxdy$. Avec $D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 3 \leq x \leq 4 \ \text{ et } \ 1 \leq y \leq 2\right\}$ et $D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \ \text{ et } \ 0 \leq y \leq 1\right\}$.
2. Calculer les intégrales doubles suivantes : $\int\limits_{D_1}\int (x+y)^2 dxdy$ et $\int\limits_{D_2}\int \left(8xy + \frac{xy^2+1}{\sqrt{x}}\right) dxdy$. où $D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, y \geq 0 \ \text{ et } \ 2x + y \leq 2\right\}$ et $D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq x \leq 4 \ \text{ et } \ y^2 \leq x\right\}$.
3. En utilisant l'intégration par changement de variables, calculer les intégrales suivantes :
$$\int\limits_{D_1}\int (x+2)^2 dxdy; \quad \int\limits_{D_2}\int (4 - x^2 - y^2) dxdy.$$
Où $D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -2 \leq x+y \leq 2; -1 \leq x-y \leq 1\right\}$ et $D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ x \geq 0, y \geq 0; 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\right\}$.
4. En utilisant l'intégrale double, calculer l'aire de D décrit comme suit :
$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \ x \geq 0; \ y \geq 0; \ x \geq y \ \text{ et } \ x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

Chapitre 3

Intégrales Triples

Dans cette section, nous définissons l'intégrale triple d'une fonction à trois variables $f(x, y, z)$ sur une partie bornée de $\mathbb{R}^3$. Par la suite, nous présentons le calcul pratique des intégrales triples. Enfin, nous expliquons les deux changements de variables essentiels, à savoir : les coordonnées cylindriques et les coordonnées sphériques.

3.1 Définition

Soit V une partie bornée de $\mathbb{R}^3$, et soit f une fonction à trois variables à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie et continue sur V. L'intégrale triple de f sur la partie V est donnée par l'expression suivante :

$$\int\int\int_V f(x, y, z) dxdydz.$$

3.2 Propriétés de l'intégrale triple

Soit V une partie bornée de $\mathbb{R}^3$.

1. **Volume**(V) : Si $f(x, y, z) = 1$, alors
$$Volume(V) = \int\int\int_V dxdydz.$$
2. **Positivité** : Si $f(x, y, z) \geq 0$ pour $(x, y, z) \in V$, alors
$$\int\int\int_V f(x, y, z) dxdydz \geq 0.$$

3. **Linéarité** : Soient f et g deux fonctions à trois variables intégrables sur V et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}\int\int\int_V (\lambda f(x,y,z) + \mu g(x,y,z))\, dxdydz &= \lambda \int\int\int_V f(x,y,z)dxdydz \\ &\quad +\mu \int\int\int_V g(x,y,z)dxdydz\end{aligned}$$

4. **Relation de Chasles** : Si $V = V_1 \cup V_2$ et $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ (V_1 et V_2 sont disjoints, i.e., $\textsc{Volume}(V_1 \cap V_2) = 0$), alors

$$\int\int\int_V f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int_{V_1} f(x,y,z)dxdydz + \int\int\int_{V_2} f(x,y,z)dxdydz.$$

3.3 Calcul pratique des intégrales triples

Nous présentons ici le calcul pratique des intégrales triples sur plusieurs parties de différentes formes.

3.3.1 Intégrale triple sur un parallélépipède : Théorème de Fubini

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur le parallélépipède $V = [a,b] \times [c,d] \times [e,s]$, avec $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ s \in \mathbb{R}$. Alors, on a

$$\begin{aligned}\int\int\int_V f(x,y,z)dxdydz &= \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^s f(x,y,z)dz\right) dy\right) dx \\ &= \int_a^b \left(\int_e^s \left(\int_c^d f(x,y,z)dy\right) dz\right) dx \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b \left(\int_e^s f(x,y,z)dz\right) dx\right) dy \\ &= \int_c^d \left(\int_e^s \left(\int_a^b f(x,y,z)dx\right) dz\right) dy \\ &= \int_e^s \left(\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y,z)dy\right) dx\right) dz \\ &= \int_e^s \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y,z)dx\right) dy\right) dz.\end{aligned}$$

(*Important : Ici l'ordre d'intégration n'est pas forcé. Cependant, on peut choisir l'ordre qui peut nous faciliter d'avantage les calculs mathématiques*).

Exemple 10. *Calculer l'intégrale suivante* $\int\int\int_V (3x+y+2z)dxdydz$*, en supposant que*

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \ et \ 0 \leq z \leq 1\}.$$

Rappelons que l'ordre d'intégration ici n'est pas important. Par exemple, nous commençons d'abord l'intégration par rapport à la variable z*, nous obtenons*

$$\begin{aligned}
\int\int\int_V (3x+y+2z)dxdydz &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 (3x+y+2z)dz\right) dy\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left((3xz+yz+z^2)\Big|_{z=0}^{z=1}\right) dy\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 (3x+y+1)\, dy\right) dx \\
&= \int_0^1 \left((3xy+\frac{1}{2}y^2+y)\Big|_{y=0}^{y=1}\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(3x+\frac{3}{2}\right) dx = \frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x\Big|_{x=0}^{x=1} = 3.
\end{aligned}$$

Proposition 2. *Si* f *est une fonction à variables séparées, i.e.,* $f(x,y,z) = f_1(x) \times f_2(y) \times f_3(z)$*. Alors, on peut écrire*

$$\int\int_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b f_1(x)dx \times \int_c^d f_2(y)dy \times \int_e^s f_3(z)dz.$$

Exemple 11. *Calculer l'intégrale* $I = \int\int\int_V xe^{x^2}\sin(y)\cos(z)dxdydz$*, où le domaine*

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{4} \ et \ 0 \leq z \leq \frac{\pi}{4}\}.$$

Il est claire que la fonction f *à variables séparées. Cela nous permet d'écrire*

$$\begin{aligned}
\int\int\int_V xe^{x^2}\sin(y)\cos(z)dxdydz &= \left(\int_0^1 xe^{x^2}dx\right) \times \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(y)dy\right) \times \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(z)dz\right) \\
&= \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_{x=0}^{x=1} \times -\cos(y)\Big|_{y=0}^{y=\frac{\pi}{4}} \times \sin(z)\Big|_{y=0}^{y=\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{1}{2}(e-1)\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(e-1)(2\sqrt{2}-2)}{8}.
\end{aligned}$$

3.3.2 Intégrale triple sur une partie bornée et déformée de $\mathbb{R}^3$ – Théorème de Fubini

Soit V une partie déformée de $\mathbb{R}^3$ incluse dans le parallélépipède $[a,b]\times[c,d]\times[e,s]$. Donc, la partie V peut se présenter sous l'une des formes suivantes :

Forme 1 – (Type 1) : $V = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | (x,y)\in D \text{ et } g_1(x,y)\le z\le g_2(x,y)\}$, avec D est la projection orthogonale de V sur le plan (xOy).

Forme 2 – (Type 2) : $D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | e\le z\le s \text{ et } (x,y)\in D_z\}$, avec D_z est l'intersection de V avec le plan $z = Cte$.

Théorème de Fubini

Soit $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ continue sur V. Alors, on a

1. Si V est de Type 1 (Forme 1),
$$\int\int\int_V f(x,y,z)dxdy = \int\int_D\left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dxdy.$$
2. Si V est de Type 2 (Forme 2),
$$\int\int\int_V f(x,y,z)dxdy = \int_e^s\left(\int\int_{D_z} f(x,y,z)dxdy\right)dz.$$

(*Important : Ici l'ordre d'intégration est forcé, selon le domaine d'intégration* V *donné*).

Exemple 12. *Calculer l'intégrale triple suivante :* $\int\int\int_V dxdydz$, *où*

$$V = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 |\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\ \ et\ \ x+y+z\le 1\}.$$

Dans cette situation, le calcul peut se faire de deux manières différentes : Soit en utilisant la **Forme 1** ou bien en utilisant la **Forme 2**.

– Utilisons la **Forme 1**. L'idée est d'écrire V sous cette forme :

$$\begin{aligned} V &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 |\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0 \text{ et } x+y+z\le 1\} \\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 |\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x \text{ et } 0\le z\le 1-x-y\}. \end{aligned}$$

Dans ce cas, notre intégrale s'écrit

$$\int\int\int_V dxdydz = \int\int_D\left(\int_0^{1-x-y} dz\right)dxdy,$$

avec,

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x\right\}.$$

Le calcul final donne le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
\int\int_D \left(\int_0^{1-x-y} dz\right) dxdy &= \int\int_D z\Big|_{z=0}^{z=1-x-y} dxdy \\
&= \int\int_D (1-x-y)dxdy \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1-x-y)dy\right) dx \\
&= \int_0^1 (y - xy - \frac{1}{2}y^2)\Big|_{y=0}^{y=1-x} dx \\
&= \int_0^1 ((1-x) - x(1-x) - \frac{1}{2}(1-x)^2)dx \\
&= \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

– Utilisons la **Forme 2**. On procède de la même manière que l'exemple précédent, à savoir d'écrire V sous la forme 2. Cela donne

$$\begin{aligned}
V &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \ \text{ et } \ x + y + z \leq 1\right\} \\
&= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ 0 \leq z \leq 1 \ \text{ et } \ (x, y) \in D_z\right\},
\end{aligned}$$

avec

$$D_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x + y \leq 1 - z\}.$$

Finalement, on obtient le résultat suivant

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\int\int_{D_z} dxdy\right) dz &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} \left(\int_0^{1-z-x} dy\right) dx\right) dz \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} y\Big|_{y=0}^{y=1-z-x} dx\right) dz \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} (1-z-x)dx\right) dz \\
&= \int_0^1 x - zx - \frac{1}{2}x^2\Big|_{x=0}^{x=1-z} dz \\
&= \int_0^1 \frac{(1-z)^2}{2} dz \\
&= -\frac{(1-z)^3}{6}\Big|_{z=0}^{z=1} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

3.4 Technique de changement de variables

Dans plusieurs situations le calcul de $\int\int\int_V f(x,y,z)dxdydz$ s'avère très difficile. Afin de bien faciliter les calculs, on peut utiliser un changement de variables adéquat pour calculer cette intégrale $\int\int\int_V f(x,y,z)dxdydz$. Dans le cas, le changement de variables est donné comme suit : $(x,y,z) = h(u,v,z) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$, où h est une bijection et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Delta = h^{-1}(V)$. Alors, on a

$$\int\int\int_V f(x,y)dxdydz = \int\int\int_\Delta f\left(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\right)|J|dudvdw,$$

où J est la matrice Jacobienne donnée par

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix},$$

et $|J|$ est la valeur absolue du Jacobien (déterminant de J) qui ne doit pas s'annuler sur Δ.

Maintenant, nous présentons deux variantes de changement de variables qui sont très importantes, à savoir, les coordonnées cylindriques et les coordonnées sphériques.

3.4.1 Coordonnées cylindriques :

On considère le changement de variables (coordonnées cylindriques) : $x = x(r,\theta) = r\cos(\theta)$, $y = y(r,\theta) = r\sin(\theta)$ et $z = z$. Notons qu'un point $M = (x,y,z)$ est caractérisé par la $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $(r \geq 0)$, l'angle $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$ avec $r \neq 0$ (en général $0 \leq \theta < 2\pi$), en projetant M sur le plan xOy, et par la hauteur $z = z$ ($z \in \mathbb{R}$). En utilisant les coordonnées cylindriques, la matrice Jacobienne associée est donnée par

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |J| = det(J) = r.$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}\int\int\int_V f(x,y,z)dxdydz &= \int\int\int_\Delta f\left(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z\right)|J|drd\theta dz\\ &= \int\int\int_\Delta f\left(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z\right) rdrd\theta dz,\end{aligned}$$

où $\Delta = h^{-1}(V)$.

Exemple 13. *Calculer l'intégrale triple suivante :* $\int\int\int_V zdxdydz$*, en utilisant les coordonnées cylindriques, où*

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2 \leq 1 \quad et \quad 0 \leq z \leq 1-(x^2+y^2)\right\}.$$

Le passage en coordonnées cylindriques donne immédiatement

$$\int\int\int_V zdxdydz = \int\int\int_\Delta zrdrd\theta dz,$$

avec

$$\Delta = \left\{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad et \quad 0 \leq z \leq 1-r^2\right\}.$$

Cela donne le résultat suivant

$$\begin{aligned}\int\int\int_\Delta zrdrd\theta dz &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-r^2} dz\right) dr \times \int_0^{2\pi} d\theta = \int_0^1 \frac{r}{2}z^2\Big|_{z=0}^{z=1-r^2} dr \times \theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\\ &= \pi\int_0^1 r(1-r^2)^2 dr\\ &= -\frac{\pi}{6}(1-r^2)^3\Big|_{r=0}^{r=1} = \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

3.4.2 Coordonnées sphériques :

On considère le changement de variables en coordonnées sphériques suivant :
$x = x(r,\theta) = r\cos(\theta)\cos(\varphi)$, $y = y(r,\theta) = r\sin(\theta)\cos(\varphi)$ et $z = r\sin(\varphi)$.
Notons qu'un point $M = (x,y,z)$ est caractérisé par sa distance à l'origine $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $(r \geq 0)$, sa longitude $0 \leq \theta < 2\pi$ et sa latitude $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Dans ce cas, la matrice Jacobienne, en utilisant les coordonnées sphériques, est donnée par

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi}\\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\cos(\varphi) & -r\cos(\theta)\sin(\varphi)\\ \sin(\theta)\cos(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi)\\ \sin(\varphi) & 0 & r\cos(\varphi)\end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice est donné par

$$det(J) = |J| = r^2\cos(\varphi).$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned}\int\int\int_V f(x,y,z)dxdydz &= \int\int\int_\Delta f\left(r\cos(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\right)|J|drd\theta d\varphi \\ &= \int\int\int_\Delta f\left(r\cos(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\right)r^2\cos(\varphi)drd\theta d\varphi,\end{aligned}$$

où $\Delta = h^{-1}(V)$.

Exemple 14. *Comme application au passage en coordonnées sphériques, calculer l'intégrale triple suivante :*

$$\int\int\int_V dxdydz,$$

avec

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\right\}.$$

En passant aux coordonnées sphériques, on obtient

$$\int\int\int_V zdxdydz = \int\int\int_\Delta r^2\cos(\varphi)drd\theta d\varphi,$$

avec

$$\Delta = \left\{(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 | 1 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad et \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\int\int\int_\Delta r^2\cos(\varphi)drd\theta d\varphi &= \int_1^2 r^2 dr \times \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\varphi)d\varphi \\ &= \frac{1}{3}r^3\Big|_{r=1}^{r=2} \times \theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \times \sin(\varphi)\Big|_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{7}{3} \times 2\pi \times 2 = \frac{28\pi}{3}.\end{aligned}$$

3.5 Exercices supplémentaires sur les intégrales triples

1. Calculer les intégrales triples suivantes :

$$I_1 = \int\int\int_{V_1} xe^{x^2}\cos^2(y)\sin(2z)dxdydz; \; I_2 = \int\int\int_{V_2} z^2 dxdydz.$$

où

$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ 0 \leq x \leq 1;\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}; 0 \leq z \leq \frac{\pi}{4}\};$$

$$V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ 0 \leq x \leq 1;\ 0 \leq y \leq x; 0 \leq z \leq y\}.$$

2. En utilisant l'intégration par changement de variables, calculer les intégrales triples suivantes :

$$I_1 = \int\int\int_{V_1} (x^2+y^2+z^2) dxdydz; \quad I_2 = \int\int\int_{V_2} 2xe^{(x^2+y^2+z^2)^2} dxdydz.$$

où

$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2+y^2 \leq 1; z^2 \leq 4(x^2+y^2)\};$$

$$V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4\}.$$

3. En utilisant l'intégrale triple, calculer le volume de V décrit comme suit :

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2+y^2 \leq 1; \sqrt{1-(x^2+y^2)} \leq z \leq 1\}.$$

Bonne Lecture

© ZOUGAB \& BOUALEM