

Université A.MIRA de Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Physique

Notes de cours de Géométrie Différentielle
Destinées aux étudiants de Master 1 - Physique Théorique

Mr. FOUGHALI Taoufik

Année académique 2014/2015.

Table des matières

Introduction	4
I Première partie	5
1 Variété Différentiable	6
1.0 Rappel de topologie	6
1.1 Variété différentiable	7
1.1.1 Cartes et coordonnées locales	7
1.1.2 Atlas	8
1.1.3 Variété différentiable	9
1.1.4 Variété orientable	10
1.2 Applications différentiables dans les variétés	10
1.2.1 Arc de courbe	10
1.2.2 Fonction	12
1.2.3 Dérivée directionnelle	12
1.2.4 Vecteur	13
1.3 Espace vectoriel tangent	13
1.3.1 Champs de vecteurs	14
1.3.2 Crochet de Lie	14
1.3.3 1-Formes et espace cotangent	14
1.3.4 Tenseurs	15
1.4 Pushforward et pullback	15
1.4.1 Sous variété	17
2 Formes différentielles	18
2.1 Algèbre extérieure et formes différentielles	18
2.1.1 Produit extérieur des formes	18
2.1.2 Expression locale des r -formes	19
2.1.3 Dérivation extérieure	20

2.1.4	Pullback d'une r -forme différentielle	21
2.2	Formes différentielles à valeurs dans un espace vectoriel	22
2.3	Intégration des Formes différentielles et formule de Stokes	23
2.3.1	Formule de Stokes	24
3	Groupes et algèbres de Lie	25
3.0.2	Groupes de Lie	25
3.0.3	Représentation des groupes de Lie	26
3.0.4	Représentation linéaire	27
3.0.5	Champs de vecteurs invariants à gauche et algèbre de Lie	28
3.0.6	L'application exponentielle	29
3.0.7	Application adjointe d'un groupe de Lie	31
3.0.8	Les groupes $SO(3)$ et $SU(2)$	31
3.0.9	Représentations des groupes $SU(2)$ et $SO(3)$	33
II	Deuxième partie	35
4	Espaces fibrés	36
4.1	Fibré localement trivial	37
4.1.1	Trivialisation locale	37
4.1.2	Sous-fibrés	38
4.2	Espaces fibrés principaux	38
4.2.1	Sections locales et trivialisation locale	38
4.2.2	Fonctions de transition	38
4.3	Espace fibré associé	39
4.3.1	Exemple d'un fibré associé : le fibré adjoint $E = AdP$	39
4.4	Les espaces fibrés vectoriels	40
4.4.1	Trivialité des fibrés vectoriels, variétés parallélisables	40
4.4.2	Champs de vecteurs et champs de tenseurs	41
4.4.3	Dérivée de Lie	41
4.4.4	Champ de repères	42
4.5	Transformation de jauge	42
5	Connexion et courbure	43
5.1	Connexion dans les fibrés vectoriels	43
5.1.1	Expression locale de la forme de connexion	44
5.1.2	Dérivation covariante dans le fibré dual	45
5.1.3	Loi de transformation pour la connexion	45

5.1.4	Connexions particulières	46
5.2	Holonomie	47
5.2.1	La transformation de jauge pour l'holonomie	49
5.3	Derivation extérieure covariante dans les fibrés $\Omega^r(M, E)$	49
5.3.1	Action de d^D sur une r-forme à valeurs dans $End(E)$	50
5.4	La courbure dans les fibrés vectoriels	51
5.4.1	Identité de Bianchi pour la courbure	52
5.5	La courbure dans les fibrés principaux	53
6	Géométrie Riemannienne	55
6.1	Variété Riemannienne	55
6.1.1	Métrique et produit scalaire	55
6.1.2	Vecteurs de Killing	57
6.1.3	Forme volume	58
6.2	Hodge star	59
6.2.1	Codifférentielle et Laplacien	60
6.2.2	L'électromagnétisme dans le langage des formes différentielles	62
6.2.3	Connexion de Levi-Civita	63
6.2.4	Equation de la géodésique	64
6.2.5	La courbure Riemannienne	65
6.2.6	Tenseur de torsion	66
6.2.7	Identités de Bianchi	67
	Bibliographie	69

Avant-propos

Ces notes ont été rédigées pour un cours que j'ai enseigné à l'université de Béjaia, pour les étudiants de Master 1 - Physique Théorique, durant l'année académique 2014/2015. La première partie couvre le programme de géométrie différentielle 1, enseigné au premier semestre. On y trouve une présentation de la notion de variétés différentiables, un chapitre sur les formes différentielles et un chapitre sur les groupes de Lie. La deuxième partie contient le programme de géométrie différentielle 2, enseigné au deuxième semestre. On y trouve une introduction aux espaces fibrés, une présentation de la notion de la connexion et de la courbure sur les fibrés principaux, et le dernier chapitre sur la géométrie Riemannienne, consacré à la théorie de Hodge dans les espaces Riemanniens, ainsi qu'à la construction de la connexion linéaire de Levi-Civita et la courbure sur les espaces de Riemann. Des exemples et des exercices sont donnés le long de ces notes. Le détail de calcul, pour les différents passages, est donné dans les séances de cours et de TD. La présente version de ce cours n'est pas complète, certainement elle fera l'objet d'une future amélioration.

Ces notes sont basées essentiellement sur les livres et les notes de cours cités dans la bibliographie, mais on trouve certainement beaucoup d'autres disponibles sur internet, en anglais et même en français. Il existe une très grande quantité d'ouvrages de référence en la matière. Pour les fondements, on cite les livres de référence [1, 2]. Des ouvrages destinés aux physiciens sont donnés dans [3, 4, 5]. Pour des ouvrages en français, on cite [6, 7].

Première partie

Première partie

Chapitre 1

Variété Différentiable

1.0 Rappel de topologie

Espace topologique

Un espace topologique est un ensemble M muni d'une famille de sous ensembles, appelés ouverts, telle que :

- 1) L'ensemble vide \emptyset et M sont des ouverts.
- 2) L'intersection $\bigcap_r U_r$ d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert.
- 3) La réunion $\bigcup_r U_r$ d'ouverts est un ouvert.

La famille d'ensembles choisis comme ouverts s'appelle topologie de M .

Ensemble fermé

Une partie d'un ensemble s'appelle fermé si son complément est ouvert (\emptyset et M sont des fermés)

Voisinage

Un ensemble ouvert contenant un point $x \in M$ s'appelle voisinage de x .

Espace topologique séparé (Hausdorff)

Un espace topologique M est de Hausdorff, ou séparé, si pour tous les points distincts x et y de M , il existe des voisinages U_x et U_y qui ne s'intersectent pas, i.e $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Application continue

Une application $f : M \rightarrow N$ entre deux espaces topologiques est continue si pour tout ouvert $V \in N$ l'image réciproque $f^{-1}(V) \in M$ est un ouvert.

Homéomorphisme

Une application continue $f : M \longrightarrow N$ est un homéomorphisme si en plus elle est inversible et sa réciproque $f^{-1} : N \longrightarrow M$ est aussi continue.

Difféomorphisme

Un difféomorphisme d'ordre q , ou C^q -difféomorphisme, est une application bijective $f : M \longrightarrow N$, telle que son inverse est aussi bijective (i.e homéomorphisme), ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre q .

1.1 Variété différentiable

Une variété topologique de dimension n est un espace topologique qui est localement homéomorphe à \mathbb{R}^n , autrement dit, chacun de ses points possède un voisinage homéomorphe à \mathbb{R}^n .

1.1.1 Cartes et coordonnées locales

Il faut d'abord définir quelques notions de base.

Soit M un ensemble d'éléments appelés points et \mathbb{R}^n l'espace euclidien de dimension n .

Cartes sur une variété

Munissons M d'une topologie en considérant le recouvrement de M par l'ensemble d'ouverts $\{U_i\}$. Une carte locale sur M est le couple formé par un ouvert $U_i \subseteq M$ et un homéomorphisme $\varphi : U_i \longrightarrow \varphi(U_i) \subseteq \mathbb{R}^n$, $\varphi(U_i)$ est un ouvert de \mathbb{R}^n . On dit que U_i est le domaine de la carte (U_i, φ) . Deux cartes compatibles (U_j, φ_j) et (U_k, φ_k) sur M telles que : $U_j \cap U_k \neq \emptyset$, sont C^q -compatibles ($q > 1$) si $\varphi_{kj} = \varphi_k \circ \varphi_j^{-1} |_{U_j \cap U_k}$ est un difféomorphisme de classe C^q entre les ouverts $\varphi_j(U_j \cap U_k)$ et $\varphi_k(U_j \cap U_k)$ de \mathbb{R}^n .

Coordonnées locales

La bijection φ associe à tout point p du domaine U d'une carte (U, φ) le n-uplet de réels (x^1, \dots, x^n) qui sont les coordonnées locales x^i du point $\varphi(p)$ dans \mathbb{R}^n .

$$\begin{aligned} \varphi : U &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ p &\mapsto (x^1, \dots, x^n). \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Réciproquement, φ^{-1} associé a tout point (n-uplet de réels) de $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ un point de U . Ainsi aux lignes de coordonnées de \mathbb{R}^n , sont associés des lignes de coordonnées sur M (figure 1.1).

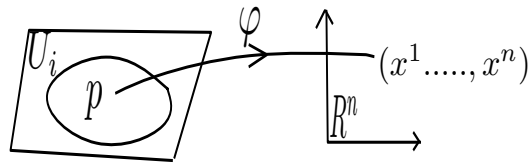


FIGURE 1.1 – coordonnées locales.

Changement de cartes

Un changement de carte (U_j, φ_j) en (U_k, φ_k) ou changement de coordonnées locales du point $p \in (U_j \cap U_k)$ est admissible s'il existe un difféomorphisme de classe C^q entre les ouverts de \mathbb{R}^n (figure 1.2) :

$$\begin{aligned} \varphi_k \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_j \cap U_k) &\rightarrow \varphi_k(U_j \cap U_k) \\ (x^1, \dots, x^n) &\mapsto (x'^1, \dots, x'^m), \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

autrement dit si les fonctions f^i définissant le changement de coordonnées :

$$x'^1 = f^1(x^1, \dots, x^n), \dots, x'^m = f^m(x^1, \dots, x^n)$$

admettent des dérivées partielles continues à l'ordre q par rapport aux variables x^k .

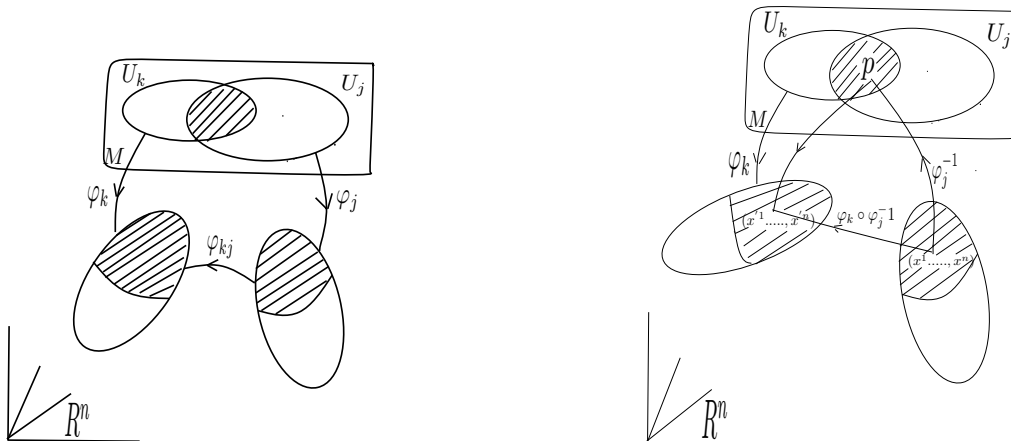


FIGURE 1.2 – changement de cartes.

1.1.2 Atlas

Un atlas de classe C^q sur M est un ensemble A de cartes (U_i, φ_i) telles que :

- les domaines U_i des cartes constituent un recouvrement de $M : M = \bigcup_{i \in I} U_i$
 - toutes cartes $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$, telles que $(U_i \cap U_j \neq \emptyset)$ de A , sont C^q -compatibles.
- i) Une carte (U, φ) sur M est compatible avec l'atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ si la réunion $\{(U, \varphi)\} \cup \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ est encore un atlas.
- ii) Deux atlas de classe C^q sont compatibles si leur réunion est encore un atlas.

Définition :

L'atlas maximal \bar{A} associé à un atlas A est l'atlas se composant de toutes les cartes compatibles avec A . Un atlas maximal sur M munit M d'une structure de variété différentiable.

1.1.3 Variété différentiable

Définition :

Une variété différentiable de classe C^q est un couple formé d'un espace topologique M et d'un atlas $A : (M, A)$ (on supposera que M est séparable), autrement dit, une variété différentiable est un couple formé d'espace topologique séparé à base dénombrable, et d'un atlas. La dimension de M est n , et on considérera que M est de classe C^∞ (*smooth manifold*).

Exemples de variétés :

- l'espace Euclidien \mathbb{R}^n , pour l'atlas $\{(\mathbb{R}^n, id)\}$ (une seule carte)
- la sphère S^n
- le tore plat $T^n = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1}_{n \text{ fois}}$ ou $T^n = \{(e^{i\varphi_1}, \dots, e^{i\varphi_n})\}$
- le cylindre de dimension $n+1 : S^n \times \mathbb{R}$

Variété produit

La variété produit de deux variétés X_n et Y_m , définies respectivement par les atlas $A_1 = \{(U_i, \varphi_i), i \in I\}$ et $A_2 = \{(V_j, \psi_j), j \in J\}$, est la variété $X_n \times Y_m$ définie par l'atlas produit $A_1 \times A_2 = \{(U_i \times V_j, \varphi_i \times \psi_j) \mid (i, j) \in I \times J\}$, où

$$U_i \times V_j = \{(x_i, y_j) \mid x_i \in U_i, y_j \in V_j\}$$

$$\varphi_i \times \psi_j : (x, y) \mapsto (\varphi_i(x), \psi_j(y)).$$

1.1.4 Variété orientable

Définition

Une variété différentiable est orientable s'il existe un atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ tel que dans le domaine commun à deux cartes quelconques les orientations soient les mêmes. Autrement dit, elle est orientable si le jacobien de la transformation $(x^i \rightarrow y^j)$ est positif ($\det(\frac{D(x^i)}{D(y^j)}) > 0$), (x^i) et (y^j) étant deux systèmes de coordonnées sur un ouvert U .

De manière pratique, une variété différentiable est orientable s'il existe un atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ tel que tout changement de coordonnées $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ soit de jacobien positif en tout point.

On déduit :

-la variété produit de variétés orientables est orientable.

-toute partie ouverte d'une variété orientable est une variété orientable.

1.2 Applications différentiables dans les variétés

Définition :

Une application f d'une variété V_n dans une variété W_m est de classe C^q au point x de V_n , si pour toute carte (U, φ) de x et (V, ψ) de y telle que $y = f(x) \in V$ (figure 1.3), l'application appelée "représentation locale" de f ,

$$f_{\varphi\psi} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (1.2.3)$$

est de classe C^q , dite C^q -morphisme.

Si f est de classe C^∞ elle est appelée une application "*smooth*" ("*smooth map*"), signifie application continûment différentiable.

Si $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est inversible ($\varphi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}$ existe), et si $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ et $\varphi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}$ sont C^∞ , f est appelée "Difféomorphisme" et V_n est difféomorphe à W_m , noté $V_n \equiv W_m$.

L'ensemble des difféomorphismes $f : V_n \rightarrow V_n$ est un groupe noté $Diff(V_n)$.

1.2.1 Arc de courbe

Soit M une variété différentiable de dimension n , p_0 un point de M et I un intervalle ouvert de \mathbb{R} contenant 0. Un arc de courbe (différentiable) passant par p_0 dans M est une application différentiable $c : I \rightarrow M : t \mapsto c(t)$, telle que $c(0) = p_0$ (c est de classe C^1 au moins). La lecture de l'arc dans la carte (U, φ) est l'application (figure 1.4)

$$\varphi \circ c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : t \mapsto \varphi(c(t)) = (x^1, \dots, x^n). \quad (1.2.4)$$

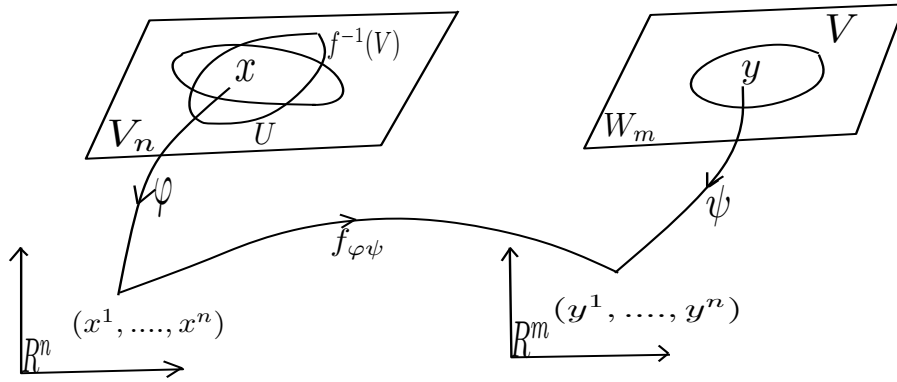


FIGURE 1.3 – Application différentiable de variétés

Les équations paramétriques de c sont notées $x^i = x^i(t)$.

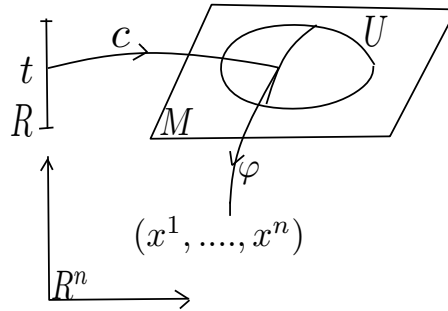


FIGURE 1.4 – Arc de courbe

Exemple

Les applications suivantes définissent un cercle dans le plan et un hélice dans l'espace

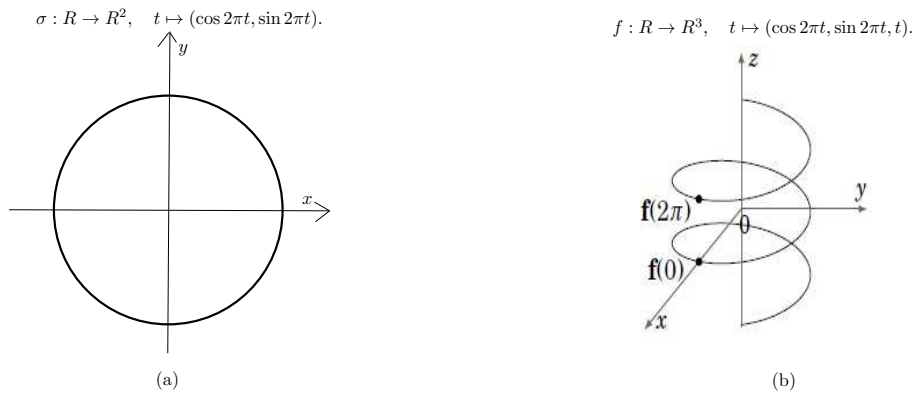


FIGURE 1.5 – a) un cercle, b) un hélice.

1.2.2 Fonction

Les coordonnées d'une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ dans la carte (U, φ) sont données par l'application (figure 1.5)

$$f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \tag{1.2.5}$$

qui est une fonction de n variables à valeurs réelles.

L'ensemble des fonctions de classe C^∞ (smooth function) sur M est noté $\mathfrak{F}(M)$.

Une fonction g le long de l'arc de la courbe c est la fonction

$$g \circ c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto (g \circ c)(t). \tag{1.2.6}$$

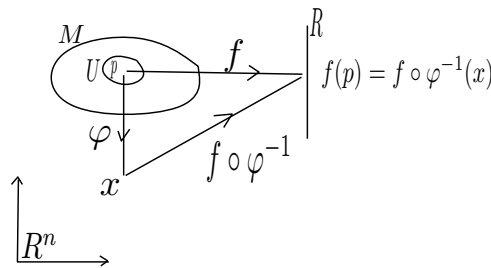


FIGURE 1.6 – fonction dans M

1.2.3 Dérivée directionnelle

Soit f une fonction de

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : f = f(x^1, \dots, x^n)$$

et \vec{U} un vecteur unitaire de composantes (U^1, U^2, \dots, U^n) . La dérivée de f dans la direction \vec{U} est définie par :

$$\nabla_{\vec{U}} f \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x^1 + hU^1, \dots, x^n + hU^n) - f(x^1, \dots, x^n)}{h}. \tag{1.2.7}$$

Nous pouvons démontrer que

$$\nabla_{\vec{U}} f = \vec{\nabla} f \cdot \vec{U}, \tag{1.2.8}$$

où $\vec{\nabla}$ est l'opérateur gradient exprimé dans une base $\{\vec{e}_i\}$ de \mathbb{R}^n par

$$\vec{\nabla} = \overrightarrow{grad} \equiv \frac{\partial}{\partial x^1} \vec{e}_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x^n} \vec{e}_n. \tag{1.2.9}$$

Ainsi, si la base $\{\vec{e}_i\}$ est orthonormée, on a

$$\nabla_{\vec{U}} f = \vec{\nabla} f \cdot \vec{U} = \frac{\partial f}{\partial x^1} U_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n} U_n. \tag{1.2.10}$$

1.2.4 Vecteur

Soit $c :]a, b[\rightarrow M$ un arc de courbe dans M , et $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction sur M . Le vecteur tangent en $c(0)$ est la dérivée directionnelle $\frac{df((c(t)))}{dt} \Big|_{t=0}$ de la fonction $f(c(t))$ le long de la courbe $c(t)$ (où $t \in (a, b)$), en $t = 0$. En termes de coordonnées locales : $\frac{df((c(t)))}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu(c(t))}{dt} \Big|_{t=0}$, autrement dit, c'est l'application de l'opérateur différentiel X sur f où $X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ et $X^\mu = \frac{dx^\mu(c(t))}{dt} \Big|_{t=0}$. Ainsi

$$\frac{df(c(t))}{dt} \Big|_{t=0} = X^\mu \left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right) \equiv X[f]. \quad (1.2.11)$$

$X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ est le vecteur tangent à M en $p_0 = c(0)$ le long de la direction donnée par $c(t)$.

Une classe d'équivalence de courbes est donnée par :

$$[c(t)] = \left\{ \tilde{c}(t) \mid \tilde{c}(0) = c(0) \text{ et } \frac{dx^\mu(\tilde{c}(t))}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{dx^\mu(c(t))}{dt} \Big|_{t=0} \right\}. \quad (1.2.12)$$

C'est ainsi que le vecteur tangent X est associé à la classe d'équivalence de courbes.

Exemple

Dans \mathbb{R}^2 cherchons le vecteur tangent à la courbe d'équation $x = x_0 \cos t - y_0 \sin t$, $y = x_0 \sin t + y_0 \cos t$ au point (x_0, y_0) .

Solution : On a $x^1 = x$ et $x^2 = y$,

$$\begin{aligned} \frac{dx^1}{dt}(0) &= \frac{dx}{dt}(0) = -y_0 \Rightarrow X^1 = -y_0 \\ \frac{dx^2}{dt}(0) &= \frac{dy}{dt}(0) = x_0 \Rightarrow X^2 = x_0 \\ &\Rightarrow X_0 = -y_0 \frac{\partial}{\partial x} + x_0 \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

1.3 Espace vectoriel tangent

Définition

L'espace vectoriel tangent à M au point p , noté $T_p M$, est l'ensemble des classes d'équivalence des courbes de M tangentes en p . D'une manière équivalente, c'est l'ensemble des vecteurs tangents à M au point p . La dimension de $T_p M$ est : $\dim T_p M = \dim M$. Les vecteurs de base de $T_p M$ sont : $e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, ($1 \leq \mu \leq n$). Pour $V \in T_p M$: $V = V^\mu e_\mu$.

La loi de transformation pour un vecteur $V \in T_p M$ est :

$$V = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \tilde{V}^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} \Rightarrow \tilde{V}^\mu = V^\nu \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} \text{ pour un changement de base } (x^\mu) \longrightarrow (y^\nu).$$

1.3.1 Champs de vecteurs

Considérons l'ensemble $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$ de tous les espaces tangents en tout point p de M . Soit π une application de projection qui associe à tout espace tangent $T_p M$ l'origine p . Par cette construction on définit un espace appelé l'espace fibré tangent sur M , noté aussi TM . Une section de TM est une application $X : M \rightarrow TM$, telle que $\pi \circ X$ soit l'identité sur M . Cette application associe à tout point $p \in M$ le vecteur $X|_p \in T_p M$. Par cette application on a défini alors un champ de vecteur sur M .

Notons $\Gamma(M)$ l'espace vectoriel des champs de vecteurs sur M .

1.3.2 Crochet de Lie

Soient $X, Y \in \Gamma(M)$. On définit le crochet de Lie par :

$$[X, Y] = XY - YX. \quad (1.3.13)$$

$[X, Y]$ définit bien une dérivation. Autrement dit, c'est un champ de vecteurs de $\Gamma(M)$. L'expression locale du crochet de Lie est

$$[X, Y] = (X^\mu \partial_\mu Y^\nu - Y^\mu \partial_\mu X^\nu) \partial_\nu. \quad \text{où } \partial_\mu \equiv e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (1.3.14)$$

1.3.3 1-Formes et espace cotangent

Les 1-formes sont les éléments de l'espace vectoriel dual de $T_p M$, qui sont les applications linéaires de $T_p M$ dans \mathbb{R} . L'espace dual est appelé l'espace cotangent en p et est noté $T_p^* M$. Un élément $\omega : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ de $T_p^* M$ est appelé vecteur dual ou vecteur cotangent, ou une forme différentielle : 1-forme.

Exemple : df est une 1-forme, et l'action de $df \in T_p^* M$ sur $V \in T_p M$ est définie par $\langle df, V \rangle \equiv V[f] = V^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \in \mathbb{R}$.

La base de $T_p^* M$ est formée par les 1-formes dx^μ , par exemple on écrit $df = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu$. C'est la base duale puisque $\langle dx^\nu, \frac{\partial}{\partial x^\mu} \rangle = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\nu$, alors ω s'écrit $\omega = \omega_\mu dx^\mu$.

On définit l'application $\langle, \rangle : T_p^* M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, appelée produit intérieur entre les éléments de $T_p^* M$ et ceux de $T_p M$, et qui vérifie les propriétés de linéarité suivantes :

- $\langle \omega, aV + bW \rangle = a \langle \omega, V \rangle + b \langle \omega, W \rangle$, pour tout $\omega \in T_p^*M$, $V, W \in T_pM$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

- $\langle a\omega + b\eta, V \rangle = a \langle \omega, V \rangle + b \langle \eta, V \rangle$, pour tout $\omega, \eta \in T_p^*M$, $V \in T_pM$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

Ainsi, le produit intérieur \langle, \rangle entre un vecteur $V = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ et une 1-forme $\omega = \omega_\mu dx^\mu$ est donné par :

$$\begin{aligned} \langle, \rangle : T_p^*M \times T_pM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \langle \omega, V \rangle &= \omega_\mu V^\mu \langle dx^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \rangle = \omega_\mu V^\mu. \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

La loi de transformation pour une 1-forme est donnée par : $\omega = \omega_\mu dx^\mu = \tilde{\omega} = \tilde{\omega}_\nu dy^\nu$. Comme $dy^\nu = \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} dx^\mu$, on obtient

$$\tilde{\omega}_\nu = \omega_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}.$$

1.3.4 Tenseurs

En tout point $p \in M$, définissons l'espace vectoriel

$$T_p^{(s,r)} = \underbrace{T_pM \otimes \dots \otimes T_pM}_{s \text{ fois}} \otimes \underbrace{T_p^*M \otimes \dots \otimes T_p^*M}_{r \text{ fois}}. \quad (1.3.16)$$

Un élément T de cet espace est un tenseur de type (s, r) défini au point p . Dans une base associée à des coordonnées (x^μ) au voisinage de p , il s'écrit

$$T|_p = T_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_s}(p) \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}}(p) \dots \frac{\partial}{\partial x^{\mu_s}}(p) dx_{|p}^{\nu_1} \dots dx_{|p}^{\nu_r}. \quad (1.3.17)$$

1.4 Pushforward et pullback

Soit M et N deux variétés différentiables et $f : M \longrightarrow N$ une application différentiable. Notons respectivement par (x^i) et (y^j) les coordonnées locales sur M et N aux points $p \in M$ et $f(p) \in N$. L'application f engendre une application dite **application linéaire tangente** ou "*pushforward*", entre les vecteurs de T_pM et ceux de $T_{f(p)}N$, notée $T_p f : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$, telle que, si $X|_p$ est un vecteur¹ de T_pM , $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction sur N dans \mathbb{R} , on définit $T_p f$ par :

$$(T_p f X|_p)g \equiv X|_p(g \circ f), \quad T_p f X|_p \in T_{f(p)}N.$$

En terme de coordonnées, on a : $y^j = f^j(x^i) \Rightarrow f_* \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = T_p f \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)$.

Si nous ôtons la dépendance en p , l'application $Tf : TM \rightarrow TN$ est une application smooth (C^∞) entre variétés différentiables, notée aussi f_* . L'application f_* prend son extension d'une façon naturelle aux tenseurs de type $(q, 0)$: $f_* : T|_p^{(q,0)}(M) \rightarrow T|_{f(p)}^{(q,0)}(N)$.

1. les vecteurs $X|_p$ de T_pM sont des applications de derivation.

L'application f engendre aussi une autre application entre les 1-formes de T_p^*M et celles de $T_{f(p)}^*N$, appelée **application cotangente** ou "*pullback*". Notons que contrairement à l'application tangente, le pullback est défini sur T^*N dans T^*M , $f^* : T_{f(p)}^*N \rightarrow T_p^*M$. On définit f^* comme suit : soit ω une 1-forme de T^*N , $X \in TM$ et p un point de M ,

$$\langle f^*(\omega|_{f(p)}), X|_p \rangle = \langle \omega|_{f(p)}, T_p f X|_p \rangle . \tag{1.4.18}$$

En terme de coordonnées : $y^j = f^j(x^i) \Rightarrow f^*\omega = (\omega_j \circ f)df^j$. Ainsi, pour une 1-forme smooth sur M on écrit : $f^*\omega(X) = \omega(f_*X)$. Nous pouvons faire une extension d'une façon naturelle aux tenseurs de type $(0, r)$: $f_* : T_{f(p)}^{(0,r)}(N) \rightarrow T_p^{(0,r)}(M)$.

Nous avons donc les applications suivantes entre variétés :

$$\begin{aligned} f &: M \rightarrow N : p \mapsto f(p) \\ f_* &: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N \\ f^* &: T_{f(p)}^* N \rightarrow T_p^* M \end{aligned}$$

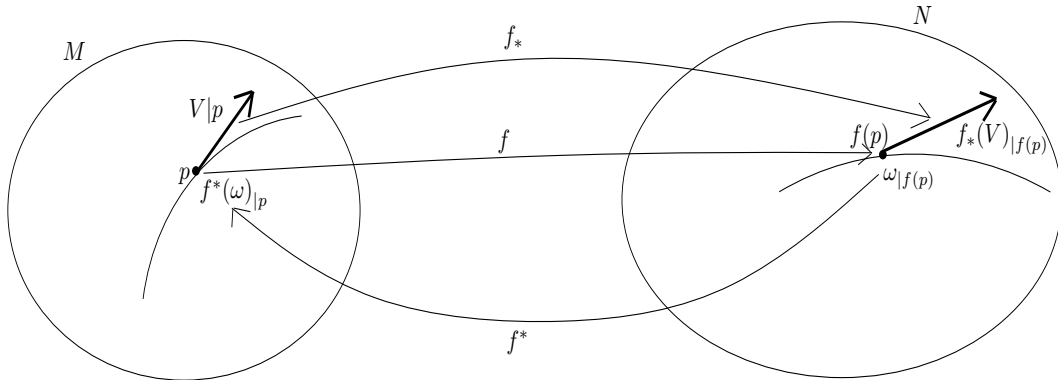


FIGURE 1.7 – Pushforward et pullback.

Propriétés

1. Soit M, N et P trois variétés et f et g deux applications telles que $f : M \rightarrow N, g : N \rightarrow P$. On peut vérifier que : $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ et que $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.
2. Soit $V \in T_p M$ et $\omega \in T_{f(p)}^* N$. On peut vérifier la relation : $\langle f^*\omega, V \rangle = \langle \omega, f_*V \rangle$.

Exemple

Soit $T = T^\mu_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} dx^\nu$ et $f : M \rightarrow N$ un difféomorphisme

$$f_*(T^\mu_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} dx^\nu) = T^\mu_\nu (\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}) (\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta}) \frac{\partial}{\partial y^\alpha} dx^\beta ,$$

où (x^μ) et (y^α) sont les coordonnées locales sur M et N respectivement. L'extension aux tenseurs d'ordre supérieur est automatique.

1.4.1 Sous variété

Définition : Soit $f : M \rightarrow N$ une application différentiable avec $\dim M \leq \dim N$.

a) L'application f est appelée immersion de M dans N si $f_* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ est une injection, soit $\text{rank} f_* = \dim M$.

b) f est un plongement si f est une injection et une immersion.

L'image $f(M)$ est appelée sous variété de N .

Si f est une immersion, f_* applique $T_p M$ isomorphiquement à un n dimensionnel sous espace vectoriel de $T_{f(p)} N$, puisque $\text{rank} f_* = \dim M$ on trouve $\text{Ker} f_* = \{0\}$.

Si f est un plongement M est difféomorphe à $f(M)$.

Chapitre 2

Formes différentielles

2.1 Algèbre extérieure et formes différentielles

Les tenseurs complètement anti-symétriques de type $(0, r)$ sur une variété M jouent un rôle très important dans tous les domaines de la physique. Ils sont appelés **formes différentielles** d'ordre r ou **r -formes** sur M . Par exemple une 3-forme (resp. 4-forme) est un tenseur de type $(0,3)$ (resp. $(0,4)$) complètement anti-symétrique. Ainsi, si F et G sont une 3-forme et une 4-forme respectivement, ils vérifient

$$\begin{aligned} F(X, Y, Z) &= -F(Y, X, Z) = F(Y, Z, X) = \dots \\ G(X, Y, Z, W) &= -G(Y, X, Z, W) = G(X, Z, W, Y) = \dots \end{aligned}$$

où X, Y, Z, W sont des champs de vecteurs sur M .

On note $\Omega_p^r(M)$ l'espace vectoriel des r -formes en $p \in M$. Pour $r = 0$, $\Omega_p^0(M) = \mathfrak{F}(M)$ l'espace des fonctions définies en $p \in M$. Pour $r > n = \dim M$, $\Omega_p^r(M) = \{0\}$.

2.1.1 Produit extérieur des formes

On définit le produit extérieur \wedge des r 1-formes dx^i par le produit tensoriel totalement anti-symétrique :

$$dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} dx^{\mu_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_{\sigma(r)}}, \quad (2.1.1)$$

où \mathfrak{S}_r est le groupe symétrique des permutations de r objets. Si $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ on a $\sigma(V_1, \dots, V_r) = (V_{\sigma(1)}, \dots, V_{\sigma(r)})$.

Exemple

$$\begin{aligned}
dx^\alpha \wedge dx^\beta &= dx^\alpha \otimes dx^\beta - dx^\beta \otimes dx^\alpha. \\
dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma &= dx^\alpha \otimes dx^\beta \otimes dx^\gamma + dx^\gamma \otimes dx^\alpha \otimes dx^\beta + dx^\beta \otimes dx^\gamma \otimes dx^\alpha \\
&\quad - dx^\beta \otimes dx^\alpha \otimes dx^\gamma - dx^\alpha \otimes dx^\gamma \otimes dx^\beta - dx^\gamma \otimes dx^\beta \otimes dx^\alpha.
\end{aligned}$$

Le produit extérieur vérifie les propriétés suivantes :

1. $dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} = 0$ si un indice μ_i apparaît deux fois.
2. $dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} = (-1)^{\text{sign}(\sigma)} dx^{\mu_{\sigma(1)}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{\sigma(r)}}$.
3. $dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$ est linéaire en chaque dx^μ .

2.1.2 Expression locale des r -formes

Soit (x^μ) les coordonnées sur une carte locale U de M . La base locale des 1-formes est $\{dx^\mu\}$. Une base pour l'espace $\Omega_p^r(M)$ est formée par l'ensemble des $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ produits indépendants des r 1-formes $\{dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}\}$ où les $\mu_k, k = 1, \dots, n = \dim M$, prennent toutes les valeurs possibles entre 1 et $n = \dim M$. Toute r -forme $\omega \in \Omega_p^r(M)$ s'écrit dans cette base, au dessus de U , comme suit :

$$\omega = \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \otimes dx^{\mu_2} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_r} \quad (2.1.2)$$

$$= \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \quad (2.1.3)$$

$$= \sum_{\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_r} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}. \quad (2.1.4)$$

La sommation est prise sur tous les $\mu = 1, \dots, n = \dim M$ dans la 1^{ere} et la 2^{eme} égalité, et dans l'ordre croissant stricte des $\mu = 1, \dots, n = \dim M$ dans la 3^{eme} égalité. Les $\omega_{\mu_1 \dots \mu_r}$ sont des fonctions définies sur U . Les éléments $\omega_{\mu_1 \dots \mu_r}$ sont totalement anti-symétriques.

A partir de la définition (2.1.1) du produit extérieur des 1-formes, on définit le produit extérieur d'une r -forme $\omega \in \Omega_p^r(M)$ et une s -forme $\eta \in \Omega_p^s(M)$

$$\begin{aligned}
\wedge : \Omega_p^r(M) \times \Omega_p^s(M) &\longrightarrow \Omega_p^{r+s}(M) \\
(\omega, \eta) &\longmapsto \omega \wedge \eta
\end{aligned}$$

par :

$$(\omega \wedge \eta)(V_1, \dots, V_{r+s}) = \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+s}} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} \omega(V_{\sigma(1)}, \dots, V_{\sigma(r)}) \eta(V_{\sigma(r+1)}, \dots, V_{\sigma(r+s)}), \quad (2.1.5)$$

où $V_i \in T_p M$. Si $r + s > n = \dim M$, $\omega \wedge \eta = 0$.

Exemple

Soit $X, Y, Z \in T_p M$, ω, η deux 1-formes et χ une 2-forme,

$$\begin{aligned} (\omega \wedge \eta)(X, Y) &= \omega(X)\eta(Y) - \omega(Y)\eta(X) \\ (\omega \wedge \chi)(X, Y, Z) &= \frac{1}{2}[\omega(X)\chi(Y, Z) - \omega(X)\chi(Z, Y) + \omega(Y)\chi(Z, X) \\ &\quad - \omega(Y)\chi(X, Z) + \omega(Z)\chi(X, Y) - \omega(Z)\chi(Y, X)] \\ &= \omega(X)\chi(Y, Z) + \omega(Y)\chi(Z, X) + \omega(Z)\chi(X, Y). \end{aligned}$$

Le produit extérieur est associatif : $(\omega \wedge \eta) \wedge \chi = \omega \wedge (\eta \wedge \chi)$. Ainsi, si ω, η et ψ sont des 1-formes, on a,

$$\begin{aligned} (\omega \wedge \eta \wedge \psi)(X, Y, Z) &= \omega(X)\eta(Y)\psi(Z) + \omega(Z)\eta(X)\psi(Y) + \omega(Y)\eta(Z)\psi(X) \\ &\quad - \omega(Y)\eta(X)\psi(Z) - \omega(X)\eta(Z)\psi(Y) - \omega(Z)\eta(Y)\psi(X). \end{aligned}$$

Soit $\omega \in \Omega_p^r(M)$ une r -forme et $\eta \in \Omega_p^s(M)$ une s -forme, on peut facilement démontrer la propriété suivante :

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{rs} \eta \wedge \omega. \quad (2.1.6)$$

Il en résulte que si r est impair : $\omega \wedge \omega = 0$.

A l'aide du produit extérieur on définit une algèbre¹ sur M , appelée algèbre extérieure sur M et noté $\Omega_p^*(M)$ ²

$$\Omega_p^*(M) \equiv \bigoplus_{r=0}^n \Omega_p^r(M) = \Omega_p^0(M) \oplus \Omega_p^1(M) \oplus \dots \oplus \Omega_p^n(M). \quad (2.1.7)$$

où $n = \dim M$. La dimension de l'espace $\Omega_p^*(M)$ est 2^n .³

Nous pouvons assigner une r -forme smooth en chaque point de la variété M . On note l'espace des r -formes smooth en M par $\Omega^r(M) \equiv \bigcup_{p \in M} \Omega_p^r M$ et l'algèbre correspondante par $\Omega^*(M) \equiv \bigoplus_{r=0}^n \Omega^r(M)$.

2.1.3 Dérivation extérieure

La dérivée extérieure est l'application qui transforme une r -forme en une $(r+1)$ -forme, $d : \Omega^r(M) \longrightarrow \Omega^{r+1}(M)$. Son action sur une r -forme

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$$

1. Une algèbre est un espace vectoriel équipé d'une application bilinéaire.

2. Un espace vectoriel V est la somme directe des sous-espace V_1, \dots, V_n si tout vecteur $v \in V$ peut être exprimer d'une façon unique comme $v = v_1 + \dots + v_n$ où $v_i \in V_i$. Autrement dit, on peut mettre $v = (v_1, \dots, v_n)$ où $v_i \in V_i$.

3. $\dim \Omega_p^r(M) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$, parce qu'il y a $\binom{n}{r}$ choix de sélectionner r éléments (i_1, \dots, i_r) parmi $(1, \dots, n)$. Ainsi, $\dim \Omega_p^*(M) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$.

est définie par

$$d\omega = \frac{1}{r!} \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} \right) dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \quad (2.1.8)$$

La dérivée extérieure possède les propriétés suivantes :

- $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$, et $d(c\omega) = cd\omega$ pour toutes $\omega, \eta \in \Omega^*(M)$ et $c \in \mathbb{R}$.
- $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge d\eta$, pour toute $\omega \in \Omega^r(M)$ et $\eta \in \Omega^*(M)$.
- $d(d\omega) = 0$ pour toute $\omega \in \Omega^*(M)$.

En adoptant la définition (2.1.1) du produit extérieur des formes différentielles, nous pouvons aisément démontrer la relation suivante pour l'action de la dérivée extérieure d'une 1-forme $\omega \in \Omega_p^1(M)$ au couple de vecteurs $(X, Y) \in T_p M \otimes T_p M$,

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) \quad (2.1.9)$$

Démonstration : Soit $\omega = \omega_\mu dx^\mu \in \Omega_p^1(M)$ et $X, Y \in T_p M$. On a

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y) &= \partial_\mu \omega_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu (X^\lambda \partial_\lambda, Y^\rho \partial_\rho) \\ &= \partial_\mu \omega_\nu [dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu] (X^\lambda \partial_\lambda, Y^\rho \partial_\rho) \\ &= (\partial_\mu \omega_\nu) X^\mu Y^\nu - (\partial_\mu \omega_\nu) X^\nu Y^\mu \\ &= X^\mu (\partial_\mu \omega_\nu) Y^\nu - Y^\mu (\partial_\mu \omega_\nu) X^\nu \\ &= X(\omega_\nu) Y^\nu - Y(\omega_\nu) X^\nu \\ &= X(\omega_\nu Y^\nu) - \omega_\nu X(Y^\nu) - Y(\omega_\nu X^\nu) + \omega_\nu Y(X^\nu) \\ &= X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega_\nu X^\sigma \partial_\sigma (Y^\nu) + \omega_\nu Y^\sigma \partial_\sigma (X^\nu) \\ &= X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]). \end{aligned}$$

Une généralisation de cette relation pour une r -forme $\psi \in \Omega_p^r(M)$ est immédiate

$$\begin{aligned} d\psi(X_1, \dots, X_{r+1}) &= \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} X_i(\psi(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{r+1})) \\ &\quad - \sum_{1 \leq i < j \leq r+1} (-1)^{i+j+1} \psi([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{r+1}) \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

où le chapeau au dessus d'un vecteur X_i signifie qu'il est omis.

2.1.4 Pullback d'une r -forme différentielle

L'application f^* , définie dans le chapitre précédent, peut être généralisée aux formes différentielles de degré supérieur à 1. On définit f^* comme suit, soit $\omega \in \Omega^r(N)$ une r -forme smooth sur N .

$$\begin{aligned} f^* : T_{f(p)}^* N &\rightarrow T_p^* M \\ \omega &\longmapsto f^* \omega, \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

telle que, si $X_1, X_2, \dots, X_r \in T_p M$,

$$f^* \omega(X_1, X_2, \dots, X_r) = \omega(f_* X_1, f_* X_2, \dots, f_* X_r). \quad (2.1.12)$$

1. Soit $\omega, \psi \in \Omega_{f(p)}^*(N)$ et f l'application définie précédemment. On a :
 - $f^*(d\omega) = df^* \omega$, où d est la dérivée extérieure définie sur M .
 - $f^*(\omega \wedge \psi) = f^* \omega \wedge f^* \psi$.⁴

2.2 Formes différentielles à valeurs dans un espace vectoriel

Une k -forme différentielle ω en M à valeurs dans un espace vectoriel V , "*V-valued k-forme*" ω , ou un vecteur k -forme ω , associe aux k champs de vecteurs différentiables X_1, \dots, X_k en M , une fonction différentiable $\omega(X_1, \dots, X_k) : M \rightarrow V$ telle que,

1. ω est multilinéaire est alternée.
2. ω a la propriété tensorielle, $\omega(X_1, \dots, fX_i, \dots, X_k) = f\omega(X_1, \dots, X_k)$ pour tous champs de vecteurs X_1, \dots, X_k en M , $f \in \mathfrak{F}(M)$.

Autrement dit, ω est définie comme une famille des k -formes ω_x , $x \in M$, telles que pour chaque k -uplets des champs de vecteurs (X_1, \dots, X_k) , l'application

$$\begin{aligned} \omega_x : T_x(M) \times \dots \times T_x(M) &\longrightarrow V \\ (X_1, \dots, X_k) &\longmapsto \omega_x(X_1, \dots, X_k) \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

est différentiable.

Si on choisit la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ dans V , on peut écrire ω d'une façon unique comme

$$\omega = \omega^\alpha \otimes e_\alpha = \omega_1 e_1 + \dots + \omega_n e_n, \quad (2.2.14)$$

où les ω^α sont des k -formes usuelles définies dans M et $n = \dim V$.

L'ensemble des k -formes différentielles à valeurs dans V est noté $\Omega^k(M) \otimes V$ ou $\Omega^k(M, V)$. Si $V = \mathbb{R}$, $\Omega^k(M, \mathbb{R}) = \Omega^k(M)$.

D'une façon similaire au cas ordinaire, on définit la dérivée extérieure d'une k -forme vectorielle, $d : \Omega^k(M, V) \rightarrow \Omega^{k+1}(M, V)$, par

$$d\omega = (d\omega^\alpha) \otimes e_\alpha = (d\omega_1)e_1 + \dots + (d\omega_k)e_k, \quad (2.2.15)$$

où les $d\omega_i$ sont les dérivées extérieures usuelles des k -formes ω_i données par (1.1.23).

4. On peut vérifier facilement cette équation en appliquant la propriété (2.1.12) et la définition (2.1.5) du produit extérieure de deux formes différentielles.

Nous pouvons également définir une r -forme à valeurs dans $End(V)$ ⁵. L'espace des r -formes à valeurs dans $End(V)$ est noté $\Omega^r(M, End(V))$ ou $End(V) \otimes \Omega^r(M)$. Par exemple, un élément de l'espace des 1-formes à valeurs dans $End(V)$, $\omega \in End(V) \otimes \Omega^1(M) \equiv End(V) \otimes T^*M$ s'écrit : $\omega = \omega_{\mu i}^j e_j \otimes e^i \otimes dx^\mu$.

2.3 Intégration des Formes différentielles et formule de Stokes

Soit ω une r -forme différentielle qui s'écrit dans le système des coordonnées locales $\{x^i\}$ dans \mathbb{R}^n comme

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \\ &= \sum_{\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_r} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}.\end{aligned}$$

Nous pouvons intégrer ω sur une variété différentiable M de dimension r , paramétré par $\mathbf{X}(\mathbf{u})$, où $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^r) \in D \subset \mathbb{R}^n$, comme suit :

$$\int_M \omega = \sum_{\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_r} \int_D \omega_{\mu_1 \dots \mu_r}(\mathbf{X}(\mathbf{u})) dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^r} \right) du^1 \dots du^r. \quad (2.3.16)$$

Ici $dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^r} \right)$ n'est autre que le Jacobien $J = \det \left(\frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(u^1, \dots, u^r)} \right)$.

Exemple

Soit M la variété dans \mathbb{R}^4 , paramétrée par : $\mathbf{X}(u_1, u_2, u_3) = (u_2 u_3, u_1^2, 1 - 3u_2 + u_3, u_1 u_2)$, pour $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 < 1$. Prenons $\omega = x_3 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^4$. On trouve facilement

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u_1} &= (0, 2u_1, 0, u_2) \\ \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u_2} &= (u_3, 0, -3, u_1) \\ \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u_3} &= (u_2, 0, 1, 0).\end{aligned}$$

et

$$\omega \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u_1}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u_2}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u_3} \right) = 2u_1^2 u_2 - 6u_1^2 u_2^2 + 2u_1^2 u_2 u_3.$$

Finalement

$$\int_M \omega = \int \int \int_D (2u_1^2 u_2 - 6u_1^2 u_2^2 + 2u_1^2 u_2 u_3) du^1 du^2 du^3 = -\frac{8}{35} \pi.$$

5. $End(V)$ est l'espace vectoriel des fonctions linéaires de V dans lui-même, ou l'espace des endomorphismes de V . $End(V)$ est isomorphe à $V \otimes V^*$, $End(V) \cong V \otimes V^*$. Une base de $End(V)$ est donnée par l'ensemble $\{e_i \otimes e^j\}$, où e_i est la base de V et e^j est celle de V^* . Par exemple, $End(\mathbb{R}^n)$ est simplement l'algèbre des matrices réelles $n \times n$. Si $M \in End(\mathbb{R}^n)$ et $v \in \mathbb{R}^n$ on a $Mv = v' \in \mathbb{R}^n$.

2.3.1 Formule de Stokes

Soit ω une forme différentielle de degré $r - 1$ définie sur la variété orientée M de dimension r . Alors

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega,$$

où ∂M est l'hypersurface délimitant M (frontière de M).

Chapitre 3

Groupes et algèbres de Lie

3.0.2 Groupes de Lie

Définition

Un groupe de Lie G est une variété différentiable de classe C^∞ munie d'une structure de groupe dont les opérations produit et inversion sont de classe C^∞

$$\begin{aligned} i) : \quad G \times G &\longrightarrow G, & (g_1, g_2) &\longmapsto g_1 \cdot g_2 \\ ii) : \quad G &\longrightarrow G, & g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned} \tag{3.0.1}$$

Dans les applications physiques, on s'intéresse particulièrement aux groupes linéaires générales $GL(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{C})$ et leurs sous groupes qui sont des groupes de matrices où le produit de deux éléments et l'inverse sont simplement donnés par la multiplication habituelle des matrices et la matrice inverse.

$GL(n, \mathbb{R})$ est une variété non-compacte de dimension n^2 et les coordonnées sont données par les n^2 entrées de $M = \{x_{ij}\}$. Les sous groupes les plus intéressants de $GL(n, \mathbb{R})$ sont :

Le groupe orthogonal $O(n) : O(n) = \{M \in GL(n, \mathbb{R}) | MM^t = M^t M = I_n\}$.

Le groupe spéciale linéaire $SL(n, \mathbb{R}) : SL(n, \mathbb{R}) = \{M \in GL(n, \mathbb{R}) | \det M = 1\}$.

Le groupe spéciale orthogonale : $SO(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$.

Le groupe $GL(n, \mathbb{C})$ est l'ensemble des transformations linéaires non-singulières dans \mathbb{C}^n , qui est représenté par des matrices $n \times n$ non-singulières avec des entrées complexes. Les sous-groupes intéressants de $GL(n, \mathbb{C})$ sont :

Le groupe unitaire : $U(n) = \{M \in GL(n, \mathbb{C}) | MM^+ = M^+ M = I_n\}$.

Le groupe linéaire spéciale : $SL(n, \mathbb{C}) = \{M \in GL(n, \mathbb{C}) | \det M = 1\}$.

Le groupe spéciale unitaire : $SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$.

Théorème

Tout sous-groupe fermé H d'un groupe de Lie G est un groupe de Lie.

3.0.3 Représentation des groupes de Lie

Soit G un groupe de Lie et M une variété. Une représentation de G dans M est une application différentiable

$$\begin{aligned} G \times M &\longrightarrow M \\ (g, x) &\longmapsto \rho_g x = \rho(g)x \end{aligned} \quad (3.0.2)$$

telle que pour tout élément g du groupe G , l'application :

$$\rho_g : M \longrightarrow M \quad (3.0.3)$$

est un difféomorphisme de M satisfaisant :

$$\rho_e = id_M \quad (3.0.4)$$

$$\rho_g \circ \rho_{g'} = \rho_{gg'} \quad (3.0.5)$$

où e est l'élément neutre de G . Autrement dit, une représentation est un homéomorphisme du groupe G dans $Diff(M)$.

En général, une représentation est appelée action à gauche. Nous pouvons également définir par la même construction une action à droite, mais en remplaçant (3.0.5) par :

$$\rho_g \circ \rho_{g'} = \rho_{g'g}. \quad (3.0.6)$$

Notons que l'action à droite n'est pas une représentation.

Parfois on écrit :

$$\rho_g x =: gx \quad \text{action à gauche} \quad (3.0.7)$$

$$\rho_g x =: xg \quad \text{action à droite} \quad (3.0.8)$$

Nous pouvons discuter maintenant un exemple important de représentation du groupe de Lie sur lui-même : $M = G$.

Définition

Soit a et g deux éléments d'un groupe de Lie G . La translation à droite : $R_a : G \longrightarrow G$ et la translation à gauche $L_a : G \longrightarrow G$ de g par a sont définies par :

$$R_a g = ga \quad (3.0.9)$$

$$L_a g = ag \quad (3.0.10)$$

R_a et L_a sont des difféomorphismes de G dans G , et ils commutent entre eux :

$$L_g \circ R_{g^{-1}} = R_{g^{-1}} \circ L_g. \quad (3.0.11)$$

Une autre représentation de G sur lui-même est donnée par l'automorphisme interne :

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto \text{aut}_g h =: ghg^{-1} \end{aligned} \quad (3.0.12)$$

Ainsi :

$$\text{aut}_g = L_g \circ R_{g^{-1}} = R_{g^{-1}} \circ L_g \quad (3.0.13)$$

3.0.4 Représentation linéaire

Une représentation ρ est dite linéaire si elle opère sur une variété qui est un espace vectoriel V et si tout difféomorphisme ρ_g est linéaire. Autrement dit, une représentation linéaire est un homéomorphisme de groupe :

$$G \longrightarrow GL(V) \subset \text{Diff}(V). \quad (3.0.14)$$

Comme un cas special on va noter la représentation $\rho(g)$ par $D(g)$.

Si V est de dimension fini n , on peut choisir une base $\{e_i, i = 1, \dots, n\}$ telle qu'un vecteur $v \in V$ se décompose en $v = v^i e_i$. On peut ainsi associer à tout $g \in G$ une matrice représentative (qui soit inversible) de l'homéomorphisme $D(g) \in GL(V)$,

$$D(g)e_j = \mathcal{D}_j^i(g)e_i$$

et l'action de $D(g)$ sur un vecteur $v \in V$ est un vecteur de V donné par :

$$D(g)v = \mathcal{D}_j^i(g)v^j e_i. \quad (3.0.15)$$

On dit qu'une représentation linéaire est irréductible si V ne contient aucun sous-espace invariant¹ W qui est non trivial : $W \neq V$, $W \neq \emptyset$:

$$\rho_g W \subset W \quad \text{pour tout} \quad g \in G. \quad (3.0.16)$$

Ceci se traduit sur les matrices de la représentation qu'on ne peut pas rendre diagonales par bloc (quelle que soit la base adaptée à la décomposition), c'est à dire qu'elles ne peuvent pas prendre la forme suivante :

1. W est un sous-espace invariant par rapport à une représentation ρ d'un groupe G , si pour tout $g \in G$ et tout $w \in W$, $\rho(g)w \in W$.

$$D(g) = \begin{pmatrix} D^1(g) & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & D^k(g) \end{pmatrix}$$

où $\dim D^1(g) + \dots + \dim D^k(g) = \dim D(g)$.

Les applications : $L_a : G \rightarrow G$ et $R_a : G \rightarrow G$ induisent les applications :

$$L_{a^*} : T_g G \rightarrow T_{ag} G \quad \text{et} \quad R_{a^*} : T_g G \rightarrow T_{ga} G. \quad (3.0.17)$$

Puisque ces translations donnent des théories équivalentes, dans tout ce qui suit on va considérer seulement les translations à gauche.

3.0.5 Champs de vecteurs invariants à gauche et algèbre de Lie

Définition : Soit X un champ de vecteurs dans un groupe de Lie G . X est un champ de vecteurs invariants à gauche si :

$$L_{a^*} X|_g = X|_{ag}. \quad (3.0.18)$$

Un vecteur $V \in T_e G$ (l'espace tangent à G en l'identité) définit un champ de vecteur unique X_V partout dans G par :

$$X_V|_g = L_{g^*} V, \quad g \in G. \quad (3.0.19)$$

Inversement, un champ de vecteurs invariant à gauche X définit un vecteur unique dans $T_e G$:

$$V = X|_e \in T_e G. \quad (3.0.20)$$

On note l'ensemble des champs de vecteurs invariants à gauche sur G par \mathfrak{g} .

L'application : $T_e G \rightarrow \mathfrak{g}$ définie par $V \rightarrow X_V$ est un isomorphisme et il s'ensuit que l'ensemble des champs de vecteurs invariants à gauche est un espace vectoriel isomorphe à $T_e G$ et $\dim \mathfrak{g} = \dim G$.

\mathfrak{g} est un sous-ensemble de $\mathcal{X}(G)$ (l'ensemble des vecteurs sur G), alors le crochet de Lie est défini aussi sur \mathfrak{g} , et \mathfrak{g} est fermé par le crochet de Lie car si g et $ag \in G$:

$$L_{a^*} [X, Y]|_g = [L_{a^*} X|_g, L_{a^*} Y|_g] = [X, Y]|_{ag} \in \mathfrak{g}. \quad (3.0.21)$$

Définition : L'ensemble \mathfrak{g} des champs de vecteurs invariants à gauche avec le crochet de Lie $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ est appelé l'algèbre de Lie du groupe de Lie G .

3.0.6 L'application exponentielle

Dans la section précédente, on a défini l'algèbre de Lie \mathfrak{g} comme étant l'espace tangent du groupe de Lie G à l'identité 1_G . Dans un voisinage suffisamment petit de l'élément neutre $0 \in \mathfrak{g}$, nous pouvons alors définir une application qui peut produire le groupe de Lie G , appelée application exponentielle (smooth) satisfaisant les propriétés :

1. $\exp(0) = 1_G \equiv$ l'élément identité de G
2. $\exp(x) \exp(y) = \exp(x + y) \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}$
3. $\frac{d}{dt} \exp(tx)|_{t=0} = x \quad \forall x \in \mathfrak{g}$.

Par cette application, il est possible de retrouver à nouveau un groupe de Lie G par exponentiation de son algèbre de Lie \mathfrak{g} . Nous pouvons également obtenir les opérations dans l'algèbre de Lie à partir de celles dans le groupe associé par différentiation. Par exemple l'élément inverse de $e^{+tx} \in G$ est l'élément $e^{-tx} \in G$ tel que :

$$\begin{aligned} e^{+tx} e^{-tx} &= e^{t(x-x)} = e^{tO_{\mathfrak{g}}} = 1_G \\ \frac{d}{dt} e^{t(x-x)}|_{t=0} &= O_{\mathfrak{g}} \Rightarrow x - x = O_{\mathfrak{g}}. \end{aligned} \tag{3.0.22}$$

L'élément inverse de $x \in \mathfrak{g}$ est l'élément $-x \in \mathfrak{g}$. De la même manière, la multiplication dans G correspond à l'addition dans \mathfrak{g} .

Le plus intéressant est qu'on peut trouver la structure d'une algèbre de Lie associée à un groupe de Lie par l'application \exp .

Exemples

1) $SL(n, \mathbb{R})$ est le groupe linéaire des matrices $n \times n$, d'entrées réelles et de déterminant égal à 1. Si $T \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ est un élément de l'algèbre de Lie de $SL(n, \mathbb{R})$, l'élément qui lui est associé dans $SL(n, \mathbb{R})$ peut être écrit comme : $H = e^T$ tel que $\det H = \det e^T = e^{\text{tr}T} = 1$, soit $\text{tr}T = 0$. Il en résulte que l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ de $SL(n, \mathbb{R})$ consiste en les matrices $n \times n$ d'entrées réelles et de trace nulle. De même, $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ consiste en les matrices $n \times n$ d'entrées complexes et de trace nulle.

2) $U(n)$ est le groupe formé des matrices $n \times n$, d'entrées complexes satisfaisant $MM^\dagger = M^\dagger M = \mathbb{I}_n$. Si $T \in \mathfrak{u}(n)$ (l'algèbre de Lie de $U(n)$), l'élément $M = e^T$ appartient à $U(n)$. En introduisant l'élément adjoint $M^\dagger = e^{T^\dagger}$ tel que $MM^\dagger = e^{T+T^\dagger} = \mathbb{I}_n$, on déduit $T + T^\dagger = 0_n$. Ainsi en terme de coordonnées on a : $T_{ij} + \overline{T}_{ji} = 0$, soit $T_{ij} = -\overline{T}_{ji}$. Il en résulte que $\mathfrak{u}(n)$ consiste en les matrices $n \times n$, d'entrées complexes et anti-hermitiennes.

3) On conclut que l'algèbre de Lie du groupe $SU(n)$ consiste en les matrices $n \times n$, d'entrées complexes et anti-hermitiennes de trace nulle, $\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{u}(n) \cap \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$.

Nous pouvons suivre cette procédure et construire les algèbres de Lie des groupes de Lie spéciaux cités dans la première section.

Notons que ce n'est pas seulement les groupes matriciels qui possèdent une application exp , mais tout groupe de Lie possède cette application, alors, pour tout groupe de Lie, il convient de définir une opération appelée crochet de Lie par :

$$[v, w] = \frac{d^2}{dsdt} (exp(sv)exp(tw) - exp(tw)exp(sv))|_{s,t=0} \quad (3.0.23)$$

où $exp(sv), exp(tw) \in G$ et $v, w \in \mathfrak{g}$.

En s'inspirant de cette opération, nous pouvons donner une définition plus abstraite aux algèbres de Lie :

Définition

Soit \mathfrak{g} un espace vectoriel équipé de l'application :

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \quad (3.0.24)$$

telle que :

1. $[v, w] = -[w, v]$ pour tout $v, w \in \mathfrak{g}$,
2. $[u, \alpha v + \beta w] = \alpha[u, v] + \beta[u, w]$ pour tout $u, v, w \in \mathfrak{g}$ et α, β des scalaires,
3. L'identité de Jacobi : $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$ pour tout $u, v, w \in \mathfrak{g}$.

L'ensemble \mathfrak{g} ainsi construit est appelé une algèbre de Lie.

Nous pouvons généraliser la notion du crochet de Lie de deux vecteurs de \mathfrak{g} , au commutateur de deux formes différentielles à valeurs dans \mathfrak{g} comme suit : soit $\omega = \omega^\alpha \otimes T_\alpha$, $\eta = \eta^\beta \otimes T_\beta$ une r -forme et une s -forme respectivement, à valeurs dans \mathfrak{g} , où $\omega^\alpha \in \Omega_p^r(M)$, $\eta^\beta \in \Omega_p^s(M)$ et $\{T_\alpha\}$ est la base de \mathfrak{g} . On définit le commutateur de ω et η par :

$$\begin{aligned} [\omega, \eta] &= \omega \wedge \eta - (-1)^{rs} \eta \wedge \omega \\ &= T_\alpha T_\beta \omega^\alpha \wedge \eta^\beta - (-1)^{rs} T_\beta T_\alpha \eta^\beta \wedge \omega^\alpha \\ &= [T_\alpha, T_\beta] \otimes \omega^\alpha \wedge \eta^\beta, \end{aligned} \quad (3.0.25)$$

où on a utilisé la propriété du produit extérieur des formes différentielles $\omega^\alpha \wedge \eta^\beta = (-1)^{rs} \eta^\beta \wedge \omega^\alpha$ (voir section 1.1.6).

Si on met $\omega = \eta$ dans (1.2.25), quand r et s sont impairs, on a

$$[\omega, \omega] = 2\omega \wedge \omega = [T_\alpha, T_\beta] \otimes \omega^\alpha \wedge \omega^\beta. \quad (3.0.26)$$

Ainsi, on peut dériver la relation importante suivante : si ω est une 1-forme à valeurs dans \mathfrak{g} , $\omega = \omega^\alpha \otimes T_\alpha$ où $\omega^\alpha \in \Omega_p^1(M)$ et $X, Y \in T_pM$ on a

$$\begin{aligned}
[\omega, \omega](X, Y) &= [T_\alpha, T_\beta] \otimes \omega^\alpha \wedge \omega^\beta(X, Y) \\
&= [T_\alpha, T_\beta][\omega^\alpha(X)\omega^\beta(Y) - \omega^\alpha(Y)\omega^\beta(X)] \\
&= [\omega(X)\omega(Y) - \omega(Y)\omega(X)] - [\omega(Y)\omega(X) - \omega(X)\omega(Y)] \\
&= 2[\omega(X)\omega(Y) - \omega(Y)\omega(X)] \\
&= 2[\omega(X), \omega(Y)]
\end{aligned} \tag{3.0.27}$$

où on a utilisé la définition du produit extérieur (2.1.5).

3.0.7 Application adjointe d'un groupe de Lie

Considérons l'automorphisme interne aut_g défini par la relation (3.0.12). Nous pouvons définir une représentation de G dans son algèbre de Lie \mathfrak{g} . Cette représentation est appelée la représentation adjointe de G et est noté Ad_g . On peut la définir comme suit :

Soit $X \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned}
Ad_g : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g} \\
X &\mapsto Ad_g X = \left(\frac{d}{dt} aut_g(e^{tX}) \right)_{|t=0} \\
&= \left(\frac{d}{dt} g(e^{tX})g^{-1} \right)_{|t=0}.
\end{aligned} \tag{3.0.28}$$

La représentation Ad_g ainsi construite est linéaire et vérifie les propriétés d'une représentation : $Ad_e = Id_{\mathfrak{g}}$ et $Ad_g \circ Ad_h = Ad_{gh}$.

3.0.8 Les groupes $SO(3)$ et $SU(2)$

Vu leur grand intérêt, on va étudier dans cette section les groupes $SO(3)$ et $SU(2)$ en détail, notamment le groupe $SU(2)$ qui joue un rôle primordial dans la théorie de la gravité quantique à boucles, et dans d'autres théories de jauge.

$SO(3)$ est le groupe des rotations dans l'espace Euclidien à 3-dimensions ou sur la 2-sphère. C'est le sous-groupe invariant de $O(3)$ (le groupe de toutes les rotations et les inversions dans l'espace Euclidien à 3-dimensions). En effet, pour tout $H \in SO(3)$ et $O \in O(3)$ on a :

$$det(OHO^{-1}) = detH = 1 \Rightarrow OHO^{-1} \in SO(3). \tag{3.0.29}$$

Précisément, $SO(3)$ est la composante identité de $O(3)$ car il contient l'élément identité de $O(3)$.

Les générateurs du groupe $SO(3)$ sont données par les matrices :

$$I_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.0.30)$$

où toute rotation dans \mathbb{R}^3 par un angle θ autour du vecteur unitaire $\vec{n} = (n^x, n^y, n^z) \in \mathbb{R}^3$ est donnée par : $\exp[\theta(n^x I_x + n^y I_y + n^z I_z)]$.

I_x, I_y, I_z forment une base pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$ de $SO(3)$ et satisfont les relations de commutation :

$$[I_a, I_b] = \varepsilon_{abc} I_c \quad (3.0.31)$$

où ε_{abc} sont les constantes de structures du groupe $SO(3)$. Ce sont les symboles de Levi-Civita.

$SU(2)$ est le groupe des rotations dans l'espace \mathbb{C}^2 préservant la norme hermitienne $|x|^2 + |y|^2$ d'un vecteur $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. Elle est formée des matrices complexes 2×2 unitaires $U^\dagger U = \mathbb{I}_2$ et de déterminant 1.

$SU(2)$ est topologiquement identifié à la 3-sphère S^3 . Un élément de $SU(2)$ s'écrit :

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C} \quad (3.0.32)$$

L'unitarité signifie que les vecteurs colonnes de U sont orthonormaux :

$$\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{a}a + \bar{c}c = 1 \\ \bar{b}b + \bar{d}d = 1 \\ \bar{a}b + \bar{c}d = 0 \end{cases} \quad (3.0.33)$$

La condition $\det U = 1 \Leftrightarrow ad - cb = 1$.

Ces quatre conditions sont équivalentes à :

$$\begin{aligned} \bar{a}a + \bar{c}c &= 1 \\ b &= -\bar{c} \\ d &= \bar{a}. \end{aligned} \quad (3.0.34)$$

On trouve que la forme la plus générale d'une matrice de $SU(2)$ est donnée par :

$$U = \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & -x_3 + ix_4 \\ x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix}, \quad x_i \in \mathbb{R} \quad (3.0.35)$$

avec

$$\sum_{i=1}^4 x_i^2 = 1. \quad (3.0.36)$$

Alors, on a construit un difféomorphisme de $SU(2)$ dans S^3 . Il s'ensuit que $SU(2)$ est connexe et simplement connexe, ce qui est le cas de S^3 .

Algèbre de Lie de $SU(2)$

Une algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ de $SU(2)$ consiste en les matrices 2×2 de trace nulle et anti-hermitiennes. Une base de cette algèbre est donnée par les matrices $\tau_a = -\frac{1}{2}i\sigma_a$, $a = 1, 2, 3$ où σ_a sont les matrices de Pauli :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.0.37)$$

satisfaisant les relations de commutation suivantes :

$$[\tau_a, \tau_b] = \varepsilon_{abc}\tau_c. \quad (3.0.38)$$

Ainsi $\mathfrak{so}(3)$ et $\mathfrak{su}(2)$ sont isomorphes. Un théorème pour les algèbres de Lie annonce que pour toute algèbre de Lie \mathfrak{g} , il y a un groupe de Lie G ayant \mathfrak{g} comme algèbre de Lie. Le groupe G n'est pas unique, mais il y a un groupe de Lie unique G qui soit connexe et simplement connexe. Tout autre groupe qui soit connexe et admet \mathfrak{g} comme son algèbre de Lie admet G comme une couverture. Dans notre cas, $SU(2)$ est connexe et simplement connexe alors que $SO(3)$ est connexe seulement. Alors $SU(2)$ est une couverture dite universelle de $SO(3)$, précisément elle présente une couverture double de $SO(3)$, puisque pour deux éléments g et $(-g)$ dans $SU(2)$ correspond un seul élément $h \in SO(3)$. Ainsi, nous avons l'homéomorphisme :

$$\begin{aligned} \varphi : SU(2) &\longrightarrow SO(3) \\ \varphi(g) &= \varphi(-g) \end{aligned} \quad (3.0.39)$$

3.0.9 Représentations des groupes $SU(2)$ et $SO(3)$

La théorie des représentations des groupes joue un rôle très important dans la théorie de la gravité quantique à boucles, notamment dans la quantification par réseau de spin.

Le groupe $SU(2)$ possède une représentation irréductible pour chaque dimension. Ces représentations sont étiquetées par un nombre entier ou demi-entier $0, 1/2, 1, \dots$ appelé spin, et on appelle chaque représentation : "la représentation de spin- j ". La dimension de cette représentation est $2j + 1$.

La méthode de construction de ces représentations est la suivante :

Soit \mathcal{P}^{2j+1} l'espace de dimension $2j + 1$ des fonctions polynômiales de degrés $2j$ dans \mathbb{C}^2 et $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ un vecteur dans \mathbb{C}^2 . Un élément de \mathcal{P}^{2j+1} est une fonction polynômiale en ξ_1 et ξ_2 qui s'écrit :

$$P_j(\xi_1, \xi_2) = C_j \xi_1^{2j} + C_{j-1} \xi_1^{2j-1} \xi_2 + \dots + C_{-j+1} \xi_1 \xi_2^{2j-1} + C_{-j} \xi_2^{2j}. \quad (3.0.40)$$

Ce polynôme est caractérisé par $2j + 1$ coefficients.

L'action de $SU(2)$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{C}^2)$ est définie par :

$$[U(g)f](\xi) = f(g^{-1}\xi) \quad \text{où} \quad f(\xi) = f(\xi_1, \xi_2) \in \mathcal{F}(\mathbb{C}^2) \quad (3.0.41)$$

L'espace \mathcal{P}^{2j+1} est invariant sous l'action du groupe $SU(2)$, c'est à dire :

$$P_j \in \mathcal{P}^{2j+1}(\mathbb{C}^2) \Rightarrow U_j(g)P_j \in \mathcal{P}^{2j+1}(\mathbb{C}^2) \quad (3.0.42)$$

Exemple

La représentation de spin $\frac{1}{2}$:

$$j = \frac{1}{2}, \quad P_{1/2} = C_{1/2}\xi_1 + C_{-1/2}\xi_2 \quad (3.0.43)$$

On a $U_{1/2}(g)P_{1/2} \in P^2(\mathbb{C}^2) \Rightarrow U_{1/2}(g)(C_{1/2}\xi_1 + C_{-1/2}\xi_2) = \alpha\xi_1 + \beta\xi_2$

ou sous forme matricielle :

$$U_{1/2}(g) \begin{pmatrix} C_{1/2} \\ C_{-1/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (3.0.44)$$

indiquant que $U_{1/2}(g)$ doit être une matrice 2×2 . Alors la représentation $U_{1/2}$ n'est autre que l'ensemble des éléments (matrices) de $SU(2)$, et l'action de $SU(2)$ par la représentation $U_{1/2}$ est la multiplication usuelle de ces éléments

$$U_{1/2}(g) \equiv g.$$

$U_{1/2}$ s'appelle la représentation **fondamentale** de $SU(2)$.

Les représentations du groupe $SO(3)$ correspondent aux représentations de spin entier du groupe $SU(2)$.

Deuxième partie

Deuxième partie

Chapitre 4

Espaces fibrés

Définition

Un espace fibré ou une fibration est la donnée d'un triplet (P, M, π) , où P est une variété différentiable appelée l'espace total, M est une variété différentiable appelée espace de base, et π est une surjection $\pi : P \rightarrow M$ appelée l'application de projection.

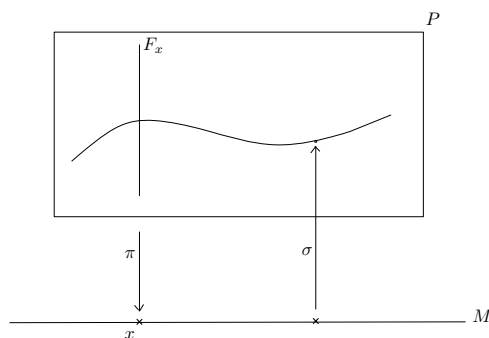


FIGURE 4.1 – un espace fibré

L'ensemble $\pi^{-1}(x) = F_x$ des antécédents de $x \in M$ par l'application de projection est appelé la fibre au dessus de x (figure 1.6).

Nous pouvons également définir une application $\sigma : M \rightarrow P$ qui associe à tout $x \in M$ un antécédent $\sigma(x) \in F_x \subset P$ telle que $\pi \circ \sigma = 1_M$. Une telle application est par définition une section de l'application $\pi : P \rightarrow M$.

Fibration

Une application $\pi : P \rightarrow M$ est une fibration si toutes les fibres $\pi^{-1}(x)$, $x \in M$ sont difféomorphes. Ainsi, nous pouvons choisir une fibre type F lorsque toutes les fibres sont de "type F ", autrement dit, difféomorphes à F .

4.1 Fibré localement trivial

Soit $\pi : P \rightarrow M$ une fibration et $U \subset M$ un ouvert de M appartenant à l'atlas définissant la structure différentiable de M .

On appelle espace fibré localement trivial la donnée d'une fibration (P, M, π) telle que pour tout ouvert U de M , l'ensemble $\pi^{-1}(U)$ soit diffeomorphe à $U \times F$ où F est la fibre type de la fibration (figure 1.7).

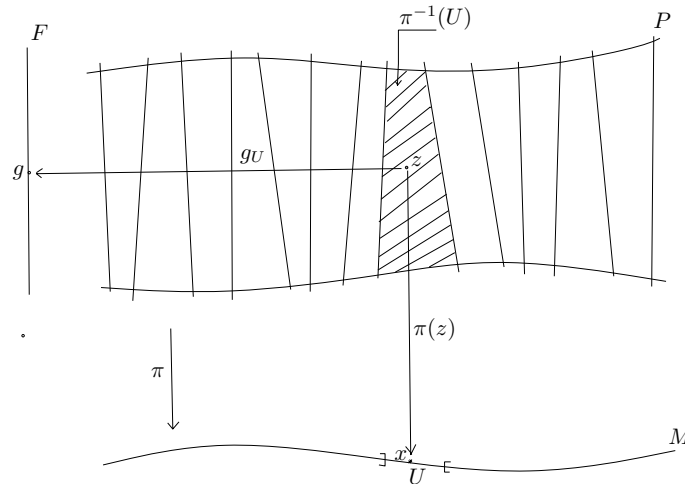


FIGURE 4.2 – Un fibré localement trivial et trivialisations locales

La propriété $\pi^{-1}(U) \simeq U \times F$ est définie localement. Si l'espace total satisfait à $P \simeq M \times F$, on dit que P est un fibré trivial.

4.1.1 Trivialisations locales

Soit $U \subset M$, dire que $\pi^{-1}(U)$ est diffeomorphe à $U \times F$ revient à dire qu'il existe un diffeomorphisme ψ_U entre deux ensembles :

$$z \in \pi^{-1}(U) \subset P \longrightarrow \psi_U(z) = (x, g) \in U \times F \quad \text{avec} \quad x = \pi(z), \quad (4.1.1)$$

ψ_U : la trivialisations locale relative à U

$\psi_U(z) = (x = \pi(z), g)$ est caractérisé par l'application :

$$\begin{aligned} g_U : \pi^{-1}(U) &\longrightarrow F \\ g_U(z) &= g \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

$z \in P$ est caractérisé par le point $x = \pi(z)$ sur M et $g = g_U(z)$ sur F (x est canoniquement défini, alors que $g \in F$ résulte du choix d'une trivialisations locale).

4.1.2 Sous-fibrés

Soit (P, M, π) et (P', M', π') deux espaces fibrés. On dira que le premier est un sous-fibré du second si P (resp. M) est une sous-variété de P' (resp. M') et π coïncide avec π' sur la restriction correspondante.

4.2 Espaces fibrés principaux

Une fibration (P, M, π) est un espace fibré principal lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :

1. (P, M, π) est un espace fibré localement trivial.
2. Un groupe de Lie G agit (à droite) sur P et ce de façon transitive¹ dans chaque fibre.
3. Toutes les fibres sont homéomorphes à G .

Le groupe G (fibre type) s'appelle le groupe structural du fibré.

4.2.1 Sections locales et trivialisations locales

Soit un fibré principal (P, M, π) de groupe structural G . Le choix d'une section locale $x \in U \subset M \rightarrow \sigma(x) \in P$ permet de "marquer une origine" sur chacune des fibres G_x avec le groupe G lui-même.

Algébriquement, on dit qu'à la section σ on peut associer une trivialisations locale ψ_U définie comme suit :

Soit $z \in P$. Alors $\psi_U(z) = (x, g_\sigma)$ où $x = \pi(z)$ et g_σ est l'unique élément de G défini par $z = \sigma(x).g_\sigma$, z et $\sigma(x)$ étant dans la même fibre, (x est canoniquement défini, alors que g_σ dépend du choix de σ).

4.2.2 Fonctions de transition

Soit U et V deux ouverts de M , σ et τ deux choix de sections locales ; $\sigma : U \rightarrow P$, $\tau : V \rightarrow P$ et $z \in P$ tel que $\pi(z) \in U \cap V$. On peut écrire $z = \sigma(x).g_\sigma$ et $z = \tau(x).g_\tau$. Il existe donc un élément $g_{\sigma\tau} \in G$ (en fait, une fonction $g_{\sigma\tau}(x)$ défini sur $U \cap V$) tel que $g_\sigma = g_{\sigma\tau}.g_\tau$. Cette fonction porte le nom de fonction de transition. Ces fonctions de transition permettent de reconstruire le fibré principal lui-même.

1. L'action de G sur un ensemble E est dite transitive s'il est possible de passer de n'importe quel point de E à n'importe quel autre point à l'aide d'un élément de G .

Un exemple de fibré principal

Fibré des repères linéaires

Considérons P comme l'ensemble des repères généralisés sur M , et G le groupe des transformations des repères. Un élément z de P est un repère généralisé situé au point x de M (avec $x = \pi(z)$). Une section locale $\sigma(x)$ est un repère mobile (généralisé) dans l'ouvert U . Les transitions $g_{\sigma\tau}$ décrivent des changements de repères mobiles. Soit n la dimension de M . En chaque point $x \in M$, nous avons un espace tangent $T(M, x)$ et nous pouvons considérer l'ensemble de tous les repères en x noté G_x . Un point $z \in G_x$ est donc un repère en x (c'est à dire la donnée de n vecteurs indépendants de $T(M, x)$), $P = \bigcup_{x \in M} G_x$ est l'ensemble de tous les repères de M . π désigne l'application qui associe à un repère centré à l'origine x le point x lui-même. Alors : (P, M, π) est un espace fibré principal de groupe structural $GL(n)$. Ce fibré ainsi construit, noté FM "Frame Bundle of M ", s'appelle le fibré des repères linéaires sur M .

Une section locale dans FM n'est autre qu'un repère mobile choisi dans le domaine d'un ouvert et qu'une fonction de transition n'est autre qu'un changement de repère mobile.

Fibré principal trivial

Un fibré principal (P, M, π) de groupe structural G est trivial si P est homéomorphe au produit cartésien $M \times G$. Dans ce cas, il existe une infinité de sections globales. Autrement dit, P est trivial si et seulement s'il possède une section globale.

4.3 Espace fibré associé

Soit (P, M, π) un espace fibré principal de groupe structural G , et soit ρ une action (à gauche) de G sur une variété F .

On construit une relation d'équivalence sur la variété produit $P \times F$, en disant que $(z, f) \in P \times F$ est équivalent à $(z', f') \in P \times F$ s'il existe un élément $g \in G$ qui soit tel que $z' = zg$ et $f' = \rho(g^{-1})f$. L'ensemble quotient $E = P \times_G F$ est appelé fibré associé à P via l'action de G sur F .

G est aussi le groupe structural du fibré E et $\dim E = \dim M + \dim F$

4.3.1 Exemple d'un fibré associé : le fibré adjoint $E = AdP$

Soit (P, M, π) un fibré principal de groupe structural G . On considère l'action de G sur lui-même dite action adjointe et définie par : $Ad(g)k = gkg^{-1}$, $\forall g, k \in G$. On choisit alors $F = G$, $\rho = Ad$ et on construit $E = P \times_{Ad} G$ fibré noté AdP .

A tout fibré principal P , on peut associer un fibré en groupe AdP dont les sections de AdP sont les transformations de jauge.

Nous pouvons aussi considérer l'action de G sur $Lie(G)$ (l'algèbre de Lie de G), définie par : $ad(g)X = gXg^{-1}$, où $g \in G$ et $X \in Lie(G)$. Alors, nous pouvons construire un fibré en algèbres de Lie de base M noté $adP = P \times_G Lie(G)$.

4.4 Les espaces fibrés vectoriels

Nous arrivons maintenant au type de fibré le plus intéressant dans l'étude des théories de jauge, c'est le fibré vectoriel "vector bundle".

Définition : Un fibré vectoriel est un espace fibré associé où la variété F choisie est un espace vectoriel (\mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n), et que l'action ρ de G sur F est une représentation de G sur cet espace vectoriel. Si $F = \mathbb{R}^n$, on parle d'un fibré vectoriel réel, et si $F = \mathbb{C}^n$ on parle d'un fibré vectoriel complexe.

Soit $E = P \times_G F$ le fibré vectoriel associé au fibré principal $P = P(M, G)$ via la représentation ρ de G sur l'espace vectoriel F . Un élément \vec{v} de E est un vrai vecteur qui peut s'écrire $\vec{v} = (e)(v) = (eg)(\rho(g^{-1})v)$, avec $e \in P$ et $v \in F$. Autrement dit, \vec{v} possède les composantes (v) dans le repère (e) et possède les composantes $(\rho(g^{-1})v)$ dans le repère (eg) .

Si on introduit les indices, on écrit : $\vec{v} = e_i v^i$ où $v^i \in \mathbb{R}^n$ (ou \mathbb{C}^n), et $\{e_i\}$ un élément de P , c'est à dire un repère généralisé au point x .

Un exemple des fibrés vectoriels qui joue un rôle essentiel dans l'étude de la relativité générale est le fibré tangent noté TM . Le fibré tangent est par définition le fibré associé au fibré FM (le fibré principal des repères linéaires sur M), où le groupe structural est $GL(n, \mathbb{R})$, avec $n = \dim M$. On considère la représentation fondamentale de G sur \mathbb{R}^n et on construit le fibré tangent $TM = FM \times_{GL(n, \mathbb{R})} \mathbb{R}^n$. Un élément de TM est un vecteur tangent qu'on note $v = e_\mu v^\mu$ où $\{e_\mu\} \in FM$, c'est à dire une base de $T(M, x)$. Nous pouvons vérifier l'invariance de v sous une transformation $\Lambda = (\Lambda_\mu^\nu) \in GL(n, \mathbb{R})$,

$$v = e_\mu v^\mu = (e_\nu \Lambda_\mu^\nu) (\Lambda^{-1\mu}{}_\rho v^\rho) \quad (4.4.3)$$

4.4.1 Trivialité des fibrés vectoriels, variétés parallélisables

Une variété est parallélisable si son fibré tangent est trivial (les groupes de Lie sont des variétés parallélisables). Une condition nécessaire et suffisante pour assurer la trivialité d'un fibré principal P est l'existence d'une section globale. Nous pouvons considérer un élément du fibré principal P comme une base dans une certaine fibre du fibré associé E . L'existence pour P d'une section globale équivaut pour E à l'existence de n sections indépendantes en tout point de M ($n = \dim F$).

4.4.2 Champs de vecteurs et champs de tenseurs

On note l'ensemble des sections globales sur un espace fibré vectoriel E par $\Gamma(E)$. Dans le cas où E est le fibré tangent TM d'une variété M , une section n'est autre qu'un champ de vecteurs. De la même façon, les champs de tenseurs d'ordres supérieurs sont également des sections de fibrés vectoriels appropriés.

Par exemple, un champs de tenseurs de type (s, r) est une section du fibré des tenseurs de type (s, r) construite par la réunion de tous les espaces vectoriels $T_p^{(s,r)}$ sur la variété M (voir section (1.1.5)) :

$$T^{(s,r)}M = \bigcup_{p \in M} T_p^{(s,r)}M. \quad (4.4.4)$$

Un tel champ s'écrit localement, au dessus d'une carte locale de M ,

$$T = T_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_s} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{\mu_s}} dx^{\nu_1} \dots dx^{\nu_r} \quad (4.4.5)$$

Cas particuliers :

- i) un champ de tenseurs de type $(0, 0)$ n'est autre qu'une fonction f sur M ,
- ii) un champ de tenseur de type $(1, 0)$ est un champ de vecteurs qui s'écrit $X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$,
- iii) un champ de tenseur de type $(0, 1)$ est une 1-forme différentielle qui s'écrit $\omega = \omega_\mu dx^\mu$.

En particulier, nous pouvons assigner une r-forme smooth en chaque point de la variété M . Ainsi, on définit un champ des r-formes sur M . On note l'espace des r-formes smooth en M par $\Omega^r(M) \equiv \bigcup_{p \in M} \Omega_p^r M$. Donc, $\Omega^0(M)$ correspond à l'algèbre des fonctions smooth sur M , $\mathfrak{F}(M)$.

De la même manière que dans la section (1.1.7) sur les vecteurs r-formes et les tenseurs r-formes, nous définissons le fibré des r-formes à valeurs dans un fibré E noté $\Omega^r(M) \otimes E \equiv \Omega^r(M, E)$ comme étant l'ensemble des espaces vectoriels des r-formes en chaque point $p \in M$. Autrement dit, si $\psi \in \Omega^r(M, E)$ et si $X_1, \dots, X_r \in \Gamma(M)$, alors $\psi(X_1, \dots, X_r)$ est une section de E définie par $x \mapsto \psi|_x(X_1|_x, \dots, X_r|_x) \in E_x$. On peut également définir le fibré des r-formes à valeurs dans le fibré des endomorphismes de E , $End(E)$. On le note $End(E) \otimes \Omega^r(M) \equiv \Omega^r(M, End(E))$. Tout élément de $\Omega^r(M, E)$ (resp. de $\Omega^r(M, End(E))$) peut être écrit comme la somme des éléments de la forme $s \otimes \omega$ où s est une section de E (resp. de $End(E)$) et ω est une r-forme différentielle sur M .

4.4.3 Dérivée de Lie

On définit la dérivée de Lie du champ de tenseur $T \in T^{(s,r)}M$ dans la direction $X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ au dessus d'une carte locale de M , de coordonnées (x^μ) , par :

$$\begin{aligned} (\mathfrak{L}_X T)_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_s} &= X^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} T_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_s} - T_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\lambda \mu_2 \dots \mu_s} \frac{\partial X^{\mu_1}}{\partial x^\lambda} - T_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\mu_1 \lambda \mu_3 \dots \mu_s} \frac{\partial X^{\mu_2}}{\partial x^\lambda} - \dots - T_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_{s-1} \lambda} \frac{\partial X^{\mu_s}}{\partial x^\lambda} \\ &+ T_{\lambda \nu_2 \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_s} \frac{\partial X^\lambda}{\partial x^{\nu_1}} + T_{\nu_1 \lambda \nu_3 \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_s} \frac{\partial X^\lambda}{\partial x^{\nu_2}} + \dots + T_{\nu_1 \dots \nu_{r-1} \lambda}^{\mu_1 \dots \mu_s} \frac{\partial X^\lambda}{\partial x^{\nu_r}}. \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

Ainsi, on déduit que la dérivée de Lie d'un champ de vecteur $Y \in \Gamma(E)$ dans la direction de X , est simplement donnée par le crochet de Lie (ou le commutateur) $[X, Y]$,

$$\mathfrak{L}_X Y = (X^\mu \partial_\mu Y^\nu - Y^\mu \partial_\mu X^\nu) \partial_\nu = [X, Y]. \quad (4.4.7)$$

4.4.4 Champ de repères

Nous définissons un champ de repère comme une section du fibré des repères FM associée au fibré tangent TM de la variété M . Si on introduit les coordonnées locales x^μ dans une carte U_i de M , la fibre $T_p M$ (l'espace tangent de M au point p) possède une base naturelle $\{\partial/\partial x^\mu\}$ sur U_i .

Un élément e_I du repère $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ en p s'écrit :

$$e_I = e_I^\mu \partial_\mu|_p, \quad 1 \leq I \leq n \quad (4.4.8)$$

où (e_I^μ) est un élément de $GL(n, \mathbb{R})$ tel que les $\{e_I\}$ soient linéairement indépendants.

Si $\{e_I\}$ est normalisé par l'introduction d'une métrique, la matrice (e_I^μ) est appelé vierbein. Dans le cas $n = 3$ le champ de repère est appelé champ de triades, et dans le cas $n = 4$ champ de tétrades. Nous pouvons également définir un champ de cotriades e_μ^I (resp. champ de cotétrades) comme étant l'application inverse d'un champ de triades (resp. un champ de tétrades).

4.5 Transformation de jauge

Soit E un fibré vectoriel associé au fibré principal $P(M, G)$ de groupe structural G (ou G -Bundle). Une transformation de jauge T est une application linéaire de E dans E (un endomorphisme) telle que les fibres de E soient stables sous l'action de T . Autrement dit, il existe une fonction qui soit généralement smooth $g(x) \in G$ telle que pour chaque $v \in F_p$, on a $\rho(g(p))v \in F_p$.

$$\begin{aligned} T : E &\longrightarrow E \\ (p, v) &\longmapsto (p, \rho(g(p))v) \end{aligned} \quad (4.5.9)$$

L'ensemble des transformations de jauge (pour un groupe G donné) forme un groupe noté \mathcal{G} .

Le principe des théories de jauge est que les champs doivent être des sections dans les fibrés principaux (ou G -Bundles), et que les lois de la physique doivent être des équations différentielles telles que si la section s est une solution, gs est aussi une solution pour tout $g \in \mathcal{G}$. On dit que ces équations différentielles sont invariantes sous la transformation de jauge.

Chapitre 5

Connexion et courbure

5.1 Connexion dans les fibrés vectoriels

La notion de connexion joue un rôle crucial dans les théories de jauge. Elle permet de comparer des vecteurs appartenant à des fibres différentes dans un fibré donné. Autrement dit, elle permet de différencier les sections de ce fibré. Elle peut aussi permettre de transporter les vecteurs parallèlement le long d'une courbe située dans une variété donnée M . Ceci permet de définir la notion importante d'holonomie qui mène à la construction des boucles de Wilson comme étant la trace de l'holonomie le long d'une boucle dans M . Les boucles de Wilson "Wilson loops" sont les observables de la théorie de la gravité quantique à boucles « Quantum Loop Gravity QLG ».

Définition

Une connexion, ou la différentiation covariante dans un fibré vectoriel E , est un opérateur différentiel linéaire D de l'espace des sections de E dans les sections du fibré $T^*M \otimes E$, où $T^*M \equiv \Omega^1(M)$ est le fibré cotangent de M (le fibré formé par les espaces des 1-formes en chaque point de M).

$$D : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes E) \quad (5.1.1)$$

On dit que D transforme les sections de E en sections 1-formes, tel que D satisfait les règles de Leibniz :

— Pour toute section s smooth de E et toute fonction smooth f on a :

$$D(fs) = df \otimes s + fDs \quad (5.1.2)$$

— La linéarité de D signifie :

$$D(\alpha s_1 + \beta s_2) = \alpha Ds_1 + \beta Ds_2; \quad s_1, s_2 \in \Gamma(E) \quad \text{et} \quad \alpha, \beta \quad \text{des constantes} \quad (5.1.3)$$

5.1.1 Expression locale de la forme de connexion

Soit $\{x^\mu\}$ les coordonnées dans une carte locale U de M . Une base naturelle dans TM est $\{\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}\}$, et une base naturelle dans T^*M est $\{dx^\mu\}$.

En terme de coordonnées : $Ds = (D_\mu s)dx^\mu$, où $(D_\mu \equiv D_{\partial_\mu})$.

Soit $\{e_i\}$ un repère local dans U , ou une base de sections de E sur U . Autrement dit, la donnée de m sections linéairement indépendantes dans un voisinage U de M , où m est la dimension des fibres de E , permet d'écrire : $s = s^i e_i$, et on a :

$$D_\mu s = D_\mu(s^i e_i) = (\partial_\mu s^i) e_i + s^i D_\mu e_i \quad (5.1.4)$$

$D_\mu e_i$ étant par définition une section de E . On peut alors l'exprimer d'une façon unique comme une combinaison linéaire des sections de base e_j , avec des fonctions en U comme coefficients. Ainsi, nous pouvons définir les fonctions $A_{\mu j}^i$ dans U par :

$$D_\mu e_j = A_{\mu j}^i e_i \quad (5.1.5)$$

Ces fonctions sont appelées les composantes du potentiel vecteur et

$$\begin{aligned} D_\mu s &= D_\mu(s^i e_i) = (\partial_\mu s^i) e_i + s^i A_{\mu i}^j e_j \\ &= (\partial_\mu s^i + A_{\mu j}^i s^j) e_i. \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

Nous pouvons également calculer la dérivée covariante de s dans la direction d'un champ de vecteurs v quelconque, notée $D_v s$:

$$\begin{aligned} D_v s &\equiv \langle Ds, v \rangle = \langle (D_\mu s) dx^\mu, v^\nu \partial_\nu \rangle \\ &= v^\mu D_\mu s \\ &= v^\mu (\partial_\mu s^i + A_{\mu j}^i s^j) e_i \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

D_v satisfait les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} D_v(\alpha s) &= \alpha D_v s \\ D_v(s + t) &= D_v s + D_v t \\ D_v(fs) &= v(f)s + f D_v s \\ D_{v+w}s &= D_v s + D_w s \\ D_{fv}s &= f D_v s \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

pour tout $v, w \in TM$, $s, t \in \Gamma(E)$, $f \in \mathfrak{F}(M)$ et tout scalaire α .

Notons que dans notre définition, les $A_{\mu i}^j$ sont les composantes d'un potentiel vecteur A , μ est l'indice de base (M) et (i, j) sont des indices qui réfèrent à une certaine base $\{e_i\}$ de l'espace interne. Alors A est donnée par :

$$A = A_{\mu i}^j e_j \otimes e^i \otimes dx^\mu. \quad (5.1.9)$$

Souvent, on supprime les indices internes, et on écrit A simplement comme :

$$A = A_\mu dx^\mu \quad \text{où} \quad A_\mu = A_{\mu i}^j e_j \otimes e^i. \quad (5.1.10)$$

5.1.2 Dérivation covariante dans le fibré dual

Soit E un fibré et $\{e_i(x)\}$ une base de la fibre au point x . Notons E^* le fibré dual de E et $\{e^i(x)\}$ la base duale au point x . D transforme les sections de E^* en sections 1-formes, c'est à dire que son action sur un vecteur de base de E^* s'écrit $De^i = (D_\mu e^i)dx^\mu$, tel que $D_\mu e^i$ est une section de E^* qu'on peut l'exprimer par $D_\mu e^i = B_{\mu j}^i e^j$, où les fonctions $B_{\mu j}^i$ sont les coefficients de l'expansion. Grace à la définition (5.1.5) de la dérivée covariante des sections de E , on déduit celle des sections du fibré dual E^* . Les sections de base vérifient les relations $e^i.e_j = \delta_j^i$. En appliquant l'opérateur D on trouve,

$$D_\mu(e^i.e_j) = (D_\mu e^i).e_j + e^i.(D_\mu e_j) = 0 \Rightarrow (D_\mu e^i).e_j = B_{\mu k}^i e^k.e_j = -A_{\mu j}^i.$$

Il en résulte que $B_{\mu j}^i = -A_{\mu j}^i$. Ainsi,

$$D_\mu e^i = -A_{\mu j}^i e^j. \quad (5.1.11)$$

Nous pouvons également étendre la notion de connexion pour un fibré tensoriel de type (s, r) , et on définit l'action de D sur une section de ce fibré (c'est à dire un champ de tenseurs de type (s, r)) par :

$$\begin{aligned} (D_\mu T)_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} &= \partial_\mu T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} + A_{\mu k}^{i_1} T_{j_1 \dots j_r}^{i_2 \dots i_s} + A_{\mu k}^{i_2} T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 k i_3 \dots i_s} + \dots + A_{\mu k}^{i_s} T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_{s-1} k} \\ &\quad - A_{\mu j_1}^k T_{k j_2 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} - A_{\mu j_2}^k T_{j_1 k j_3 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} - \dots - A_{\mu j_r}^k T_{j_1 \dots j_{r-1} k}^{i_1 \dots i_s}. \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

Ce dernier résultat est une conséquence directe de la définition suivante :

Définition : La dérivée covariante DT d'un champ de tenseurs de type (r, s) dans la direction de X est un tenseur de type $(r, s + 1)$ définie par

$$\begin{aligned} DT(\omega_1, \dots, \omega_r, X, Y_1, \dots, Y_s) &\equiv (D_X T)(\omega_1, \dots, \omega_r, Y_1, \dots, Y_s) \\ &= D_X(T(\omega_1, \dots, \omega_r, Y_1, \dots, Y_s)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^r T(\omega_1, \dots, D_X \omega_i, \dots, \omega_r, Y_1, \dots, Y_s) \\ &\quad - \sum_{j=1}^s T(\omega_1, \dots, \omega_r, Y_1, \dots, D_X Y_j, \dots, Y_s). \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

Ici $D_X(T(\omega_1, \dots, \omega_r, Y_1, \dots, Y_s))$ n'est autre que la dérivation $X(T(\omega_1, \dots, \omega_r, Y_1, \dots, Y_s))$ de la fonction $(T(\omega_1, \dots, \omega_r, Y_1, \dots, Y_s))$ dans la direction de X .

5.1.3 Loi de transformation pour la connexion

L'aspect covariant de la dérivée D se manifeste dans une transformation de jauge qui transforme la section s en $s' = g s$, où $g \in \mathcal{G}$, par

$$D's' = D'(gs) \equiv gDs$$

$$\Rightarrow D's = gD(g^{-1}s).$$

Soit $\{e_i\}$ une base d'une fibre du fibré vectoriel considéré,

$$\begin{aligned} D'e_i &= gD(g^{-1}e_i) \Rightarrow A'e_i = [gdg^{-1} + gAg^{-1}]e_i, \\ \Rightarrow A' &= gAg^{-1} + gdg^{-1}. \end{aligned}$$

En terme de composantes ($A = A_\mu dx^\mu$ et $dg^{-1} = \partial_\mu g^{-1} dx^\mu$), on a

$$A'_\mu = gA_\mu g^{-1} + g\partial_\mu g^{-1}, \quad (5.1.14)$$

c'est la loi de transformation des composantes du potentiel vecteur A sous l'action d'une transformation de jauge $g \in \mathcal{G}$.

Si la connexion D' est obtenue à partir de D par une transformation de jauge, on dit que D' et D sont "*gauge-équivalent*". Dans les théories de jauge, deux connexions décrivent le même champ physique si elles sont "*gauge-équivalent*". On note \mathcal{A} l'espace de toutes les G -connexions dans un G -bundle donné, et \mathcal{A}/\mathcal{G} l'espace des classes d'équivalence de jauge, nommé l'espace des "*connexions modulo une transformation de jauge*". La géométrie de l'espace \mathcal{A}/\mathcal{G} joue un rôle crucial dans les théories de jauge.

5.1.4 Connexions particulières

La connexion linéaire : une connexion est dite linéaire si elle est définie dans le fibré principal des repères linéaires FM , ou dans un sous fibré de ce dernier. Dans ce cas, le groupe structural est $GL(n, \mathbb{R})$ ou l'un de ses sous-groupes. Pour des raisons historiques, elle est noté ∇ . Comme cas particulier de (1.4.5), on définit les symboles de Christoffel pour la connexion linéaire par :

$$\nabla_\mu \partial_\nu = \Gamma_{\mu\nu}^\rho \partial_\rho. \quad (5.1.15)$$

Définition :

On dit qu'une connexion D

- D est sans torsion, si pour tout $u, v \in Vect(M) : D_u v - D_v u = [u, v]$.
- préserve la métrique g si pour tout $u, v, w \in TM : u g(v, w) = g(D_u v, w) + g(v, D_u w)$

Si on définit sur M (l'espace de base) une métrique semi-Riemannienne g , il existe une et une seule connexion qui soit sans torsion et compatible avec la métrique g (autrement dit, qui préserve la métrique). On l'appelle la connexion de Levi-Civita. La dérivée covariante d'un champ de vecteurs w dans la direction de v s'écrit :

$$\nabla_v w = v^\mu (\partial_\mu w^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\rho w^\nu) \partial_\rho. \quad (5.1.16)$$

La condition pour que ∇ soit sans torsion se traduit pour les symboles de Christoffel par

$$\begin{aligned}\nabla_\mu \partial_\nu - \nabla_\nu \partial_\mu &= [\partial_\mu, \partial_\nu] = 0 \\ \Rightarrow \quad \nabla_\mu \partial_\nu &= \nabla_\nu \partial_\mu \\ \text{soit} \quad \Gamma_{\mu\nu}^\rho &= \Gamma_{\nu\mu}^\rho.\end{aligned}\tag{5.1.17}$$

Les symboles de Christoffel sont symétriques pour les deux indices inférieurs. La condition de compatibilité de ∇ avec la métrique se traduit par la relation $\nabla g = 0$, soit pour les composantes $\nabla_\mu g_{\rho\sigma} = 0$.

Démonstration : Si on choisit les vecteurs de base $\partial_\mu, \partial_\rho, \partial_\sigma$,

$$\begin{aligned}\partial_\mu g(\partial_\rho, \partial_\sigma) &= g(\nabla_\mu \partial_\rho, \partial_\sigma) + g(\partial_\rho, \nabla_\mu \partial_\sigma) \\ \partial_\mu g(\partial_\rho, \partial_\sigma) &= g(\Gamma_{\mu\rho}^\eta \partial_\eta, \partial_\sigma) + g(\partial_\rho, \Gamma_{\mu\sigma}^\eta \partial_\eta) \\ \partial_\mu g_{\rho\sigma} &= \Gamma_{\mu\rho}^\eta g_{\eta\sigma} + \Gamma_{\mu\sigma}^\eta g_{\rho\eta} \\ \text{soit} \quad \nabla_\mu g_{\rho\sigma} &= \partial_\mu g_{\rho\sigma} - \Gamma_{\mu\rho}^\eta g_{\eta\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^\eta g_{\rho\eta} = 0.\end{aligned}$$

Par une permutation cyclique des indices $\{\mu, \rho, \sigma\}$, nous pouvons facilement vérifier la relation suivante :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})\tag{5.1.18}$$

La connexion de Levi-Civita est un cas spécial des connexions linéaires du fait que les symboles de Christoffel donnés par (5.1.18) sont symétriques pour les indices inférieures.

La connexion de spin : nous pouvons également définir une connexion qui soit compatible avec le champ de tétrades e_I^μ et vérifie la relation $D_\mu e_I^\mu = 0$, où μ est un indice de l'espace tangent et I est un indice de l'espace interne. Cette connexion porte le nom de connexion de spin. Son expression est donnée par :

$$D_\mu e_I^\mu = \partial_\mu e_I^\mu + \Gamma_{\mu I}^J e_J^\mu\tag{5.1.19}$$

La connexion de spin joue un rôle fondamental dans la nouvelle formulation de la relativité générale.

5.2 Holonomie

Soit E un fibré vectoriel sur M , équipé d'une connexion D . Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ une courbe *smooth* sur M et $u(t)$ un vecteur de E défini sur γ .

Définition : on dit que le vecteur $u(t)$ est transporté parallèlement le long de γ si

$$D_{\gamma'(t)} u(t) = 0 ; \text{ pour tout } t \in [0, 1].$$

où $\gamma'(t) = \frac{d\gamma}{dt}$. On définit la dérivée covariante le long de la courbe γ par :

$$D_{\gamma'(t)}u(t) = \frac{d}{dt}u(t) + A(\gamma'(t))u(t). \quad (5.2.20)$$

Si $u(t)$ est transporté parallèlement le long de γ , on a alors

$$\frac{d}{dt}u(t) + A(\gamma'(t))u(t) = 0. \quad (5.2.21)$$

Une solution formelle de cette équation est [3] :

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} P\left(\int_0^t A(\gamma'(s))ds\right)^n u(0) = P e^{-\int_0^t A(\gamma'(s))ds} u(0) \quad (5.2.22)$$

où P est un opérateur qui sert à ordonner les paramètres des courbes dans l'ordre croissant (pour plus de détail, se référer à [4]).

Nous pouvons alors définir l'opérateur linéaire qui sert à transporter parallèlement les vecteurs de E le long d'une courbe γ dans M par :

$$H(\gamma, A) : E_{\gamma(0)} \rightarrow E_{\gamma(1)} : u(0) \rightsquigarrow u(1) = P e^{-\int_0^1 A(\gamma'(s))ds} u(0). \quad (5.2.23)$$

$H(\gamma, A)$ est appelé l'holonomie de la connexion A le long de γ .

Si γ est smooth par morceaux, nous pouvons trouver les points dans lesquels γ n'est pas continu. Décomposons γ en des morceaux smooth, $\gamma_i : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow M$ où $1 \leq i \leq n$, puis considérons la composition des holonomies de chacun des morceaux de γ :

$$H(\gamma, A) = H(\gamma_n, A) \dots H(\gamma_1, A)$$

La notion de courbe smooth par morceaux nous amène à la notion importante de "produit des chemins" qui permet de calculer l'holonomie pour des chemins composés dans M .

Définition : Soit $\alpha : [0, S] \rightarrow M$ et $\beta : [0, T] \rightarrow M$ avec $\beta(0) = \alpha(S)$. On définit le produit

$$\beta\alpha : [0, S+T] \rightarrow M$$

par

$$(\beta\alpha)(t) = \begin{cases} \alpha(t) & \text{si } 0 \leq t \leq S \\ \beta(t-S) & \text{si } S \leq t \leq S+T \end{cases}$$

A partir de cette définition, il est facile de vérifier les propriétés suivantes de l'holonomie :

- 1) Si α et β sont des chemins composables, on a : $H(\beta\alpha, A) = H(\beta, A)H(\alpha, A)$.
- 2) Pour tout chemin $\alpha : [0, T] \rightarrow M$ entre les points $p = \alpha(0)$ à $q = \alpha(T)$, il existe un chemin inverse α^{-1} de q à p donné par $\alpha^{-1}(t) = \alpha(T-t)$. Ainsi, nous avons : $H(\alpha^{-1}, A) = H(\alpha, A)^{-1}$.

Le cas le plus intéressant est l'holonomie le long d'une boucle.

Définition : Une boucle est une courbe $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ telle que $\alpha(0) = \alpha(1)$.

5.2.1 La transformation de jauge pour l'holonomie

Considérons deux vecteurs $u(0)$ et $w(0)$ transportés parallèlement le long d'une courbe γ respectivement jusqu'à $u(1)$ et $w(1)$ à l'aide des opérateurs $H(\gamma, A)$ et $H(\gamma, A')$. Soit $g(x)$ une transformation de jauge qui transforme u en w telle que $w(t) = g(t)u(t)$. Alors, on a :

$$\begin{aligned} w(1) &= g(1)u(1) \\ \Rightarrow H(\gamma, A')w(0) &= g(1)H(\gamma, A)u(0) \\ \Rightarrow H(\gamma, A')w(0) &= g(1)H(\gamma, A)g^{-1}(0)w(0). \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$H(\gamma, A') = g(1)H(\gamma, A)g^{-1}(0). \quad (5.2.24)$$

Dans le cas special d'une boucle α située au point p : $g(1) = g(0) = g(p)$, on a

$$H(\alpha, A') = g(p)H(\alpha, A)g^{-1}(p). \quad (5.2.25)$$

Utilisons cette propriété de l'holonomie le long d'une boucle. Nous pouvons définir une quantité qui soit un invariant de jauge, c'est la trace de l'holonomie le long de la boucle considéré. En effet

$$\text{tr}(H(\alpha, A')) = \text{tr}(g(p)H(\alpha, A)g^{-1}(p)) = \text{tr}(H(\alpha, A)), \quad (5.2.26)$$

où on a utilisé la propriété de la trace : $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(CAB)$, A , B et C étant des opérateurs. Cet invariant de jauge est appelé la boucle de *Wilson* ou "*Wilson loop*", et on le note $W(\alpha, A)$

$$W(\alpha, A) = \text{tr}(H(\alpha, A)). \quad (5.2.27)$$

Les boucles de Wilson jouent un rôle fondamentale dans les théories de jauge modernes, notamment dans la théorie de la "*QLG*" (la gravité quantique à boucles). Elles sont les observables de la théorie.

5.3 Derivation extérieure covariante dans les fibrés $\Omega^r(M, E)$

On définit la dérivée extérieure covariante d^D comme une extension naturelle de la dérivée extérieure d définie dans la section (1.1.6). On demande que d^D coïncide avec la dérivée covariante ordinaire D pour $r = 0$. Autrement dit, l'action de d^D sur une section $s \in E$ vérifie :

$$d^D s(v) = D_v s, \quad (5.3.28)$$

pour tout champ de vecteur $v \in TM$.

Ainsi, on définit la dérivée extérieure covariante d^D par son action sur une r -forme différentielle à valeurs dans E , $s \otimes \omega$ où s est une section de E et ω est une r -forme différentielle ordinaire : $d^D : \Omega^r(M, E) \longrightarrow \Omega^{r+1}(M, E)$

$$d^D(s \otimes \omega) = d^D s \wedge \omega + s \otimes d\omega. \quad (5.3.29)$$

Une formule générale pour la dérivée extérieure covariante est analogue à celle donnée par l'équation (1.1.23) pour la dérivée extérieure d'une r -forme. Ainsi, étant donnée une r -forme à valeurs dans E , $\psi \in \Omega^r(M, E)$, on a

$$\begin{aligned} d^D \psi(X_1, \dots, X_{r+1}) &= \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} D_{X_i}(\psi(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{r+1})) \\ &\quad - \sum_{1 \leq i < j \leq r+1} (-1)^{i+j+1} \psi([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{r+1}) \end{aligned} \quad (5.3.30)$$

où le chapeau signifie l'omission de l'élément qui le porte.

5.3.1 Action de d^D sur une r -forme à valeurs dans $End(E)$

Une formule qui sera utile par la suite, est l'expression de l'action de d^D sur une r -forme à valeurs dans le fibré $End(E)$. Soit $\omega \in \Omega^r(M, End(E))$. Posons $\omega_I \equiv \omega_{\mu_1, \dots, \mu_r}$ et $dx^I \equiv dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$ où $I \equiv \{\mu_1, \dots, \mu_r\}$ est un indice contracté. On peut écrire $\omega = \omega_I \otimes dx^I$, où $\omega_I \in End(E)$, c'est à dire $\omega_I = \omega_{Ij}^i e_i \otimes e^j$. Par définition, d^D agit sur une r -forme à valeurs dans $End(E)$ en produisant une $(r+1)$ -forme à valeurs dans $End(E)$,

$$d^D \omega = (d^D \omega)_j^i e_i \otimes e^j$$

$$\begin{aligned} d^D \omega &= d^D(\omega_I) \wedge dx^I = d^D(\omega_{Ij}^i e_i \otimes e^j) \wedge dx^I \\ &= D_\mu(\omega_{Ij}^i e_i \otimes e^j) dx^\mu \wedge dx^I \\ &= (\partial_\mu \omega_{Ij}^i e_i \otimes e^j + \omega_{Ij}^i A_{\mu k}^k e_k \otimes e^j - \omega_{Ij}^i A_{\mu k}^j e_i \otimes e^k) dx^\mu \wedge dx^I \\ &= [\partial_\mu \omega_{Ij}^i + \omega_{Ij}^k A_{\mu k}^i - \omega_{Ij}^i A_{\mu k}^k] e_i \otimes e^j dx^\mu \wedge dx^I \\ &= [d\omega_j^i + A_k^i \wedge \omega_j^k - (-1)^r \omega_k^i \wedge A_j^k] e_i \otimes e^j \\ &= [d\omega + A \wedge \omega - (-1)^r \omega \wedge A]_j^i e_i \otimes e^j \end{aligned}$$

Ainsi,

$$d^D(\omega) = d\omega + A \wedge \omega - (-1)^r \omega \wedge A = dA + [A, \omega], \quad (5.3.31)$$

où on a utilisé la propriété $d^2 = 0$ et la définition (1.2.25) du commutateur de deux formes $\omega \in \Omega^r(M, E)$ et $\eta \in \Omega^s(M, E)$, $[\omega, \eta] = \omega \wedge \eta - (-1)^{rs} \eta \wedge \omega$.

5.4 La courbure dans les fibrés vectoriels

Comme on a fait pour la connexion, on définit l'opérateur de courbure dans un fibré vectoriel E comme étant l'opérateur de dérivation double $(d^D)^2$ de l'espace des sections de E dans les sections du fibré $\Omega^2(M, E)$.

$$(d^D)^2 \equiv F. \quad (5.4.32)$$

Son expression en terme de la connexion A est déduite de l'action de $(d^D)^2$ sur une section de la base de E . En utilisant la définition (5.3.29) de d^D on trouve :

$$\begin{aligned} (d^D)^2 e_i &= d^D(D e_i) = d^D(D_\mu e_i dx^\mu) \\ &= d^D(A_{\mu i}^j e_j dx^\mu) = D_\nu(A_{\mu i}^j e_j) dx^\nu \wedge dx^\mu \\ &= (\partial_\nu(A_{\mu i}^j)) e_j + A_{\nu j}^k A_{\mu i}^j e_k dx^\nu \wedge dx^\mu \\ &= (dA_i^j + A_k^j \wedge A_i^k) e_j = (dA + A \wedge A)_i^j e_j \\ &\equiv F_i^j e_j. \end{aligned}$$

On conclut que,

$$F = dA + A \wedge A. \quad (5.4.33)$$

En utilisant l'équation (1.5.3) définissant l'action de d^D sur une r-forme à valeurs dans un espace vectoriel, on déduit l'équation de structure pour la courbure F . Par définition $(d^D)^2 s = F s$ où s est une section du fibré E . $F \in \Omega^2(M, E)$, si on applique F au couple de vecteurs (v, w) , $v, w \in TM$, on trouve

$$\begin{aligned} F s(v, w) &= ((d^D)^2 s)(v, w) \\ &= D_v(d^D s(w)) - D_w(d^D s(v)) - d^D s([v, w]) = D_v D_w s - D_w D_v s - D_{[v, w]} s \end{aligned}$$

Pour tout $v, w \in TM$, et toute section $s \in E$, on définit la courbure F sur E par :

$$F(v, w)s = D_v D_w s - D_w D_v s - D_{[v, w]} s. \quad (5.4.34)$$

Alors nous pouvons considérer la courbure $F(v, w)$ comme étant un opérateur agissant sur les sections de E , donnant une nouvelle section de E , définie par l'équation (5.4.34). Ainsi, on définit l'opérateur de courbure comme :

$$F(v, w) = D_v D_w - D_w D_v - D_{[v, w]} = [D_v, D_w] - D_{[v, w]}. \quad (5.4.35)$$

L'opérateur de courbure ainsi défini est anti-symétrique : $F(v, w) = -F(w, v)$.

Considérons les coordonnées locales $\{x^\mu\}$ sur un ouvert U de M . Nous pouvons trouver la forme locale de la courbure en terme de ces coordonnées,

$$F_{\mu\nu} = F(\partial_\mu, \partial_\nu) = [D_\mu, D_\nu], \quad (5.4.36)$$

où on a utilisé le fait que $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$.

Pour trouver la forme explicite de $F_{\mu\nu}$, appliquons cet opérateur sur un vecteur de base dans E ,

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}e_i &= D_\mu D_\nu e_i - D_\nu D_\mu e_i \\
&= D_\mu(A_{\nu i}^j e_j) - D_\nu(A_{\mu i}^j e_j) \\
&= (\partial_\mu A_{\nu i}^j) e_j + A_{\mu j}^k A_{\nu i}^j e_k - (\partial_\nu A_{\mu i}^j) e_j - A_{\nu j}^k A_{\mu i}^j e_k \\
&= (\partial_\mu A_{\nu i}^j + A_{\mu k}^j A_{\nu i}^k - \partial_\nu A_{\mu i}^j - A_{\nu k}^j A_{\mu i}^k) e_j \\
&= F_{\mu\nu i}^j e_j.
\end{aligned}$$

Alors, l'expression locale de la courbure en terme du potentiel vecteur est donnée par :

$$F_{\mu\nu i}^j = \partial_\mu A_{\nu i}^j - \partial_\nu A_{\mu i}^j + A_{\mu k}^j A_{\nu i}^k - A_{\nu k}^j A_{\mu i}^k. \quad (5.4.37)$$

En omettant les indices internes, on peut écrire

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + A_{\mu\lambda} A_\nu - A_{\nu\lambda} A_\mu \\
&= \partial_{[\mu} A_{\nu]} + [A_\mu, A_\nu].
\end{aligned} \quad (5.4.38)$$

5.4.1 Identité de Bianchi pour la courbure

L'opérateur F défini dans une carte locale $U \subseteq M$ satisfait aussi l'identité de Bianchi, donnée par la formule

$$d^D F = 0.$$

Pour vérifier cette propriété, appliquons l'opérateur de dérivation extérieure d sur F , donné par son expression (5.4.33) :

$$\begin{aligned}
dF &= d^2 A + d(A \wedge A) = dA \wedge A - A \wedge dA \\
&= (F - A \wedge A) \wedge A - A \wedge (F - A \wedge A) \\
&= F \wedge A - A \wedge F = -[A, F],
\end{aligned}$$

où on a utilisé les propriétés $d^2 = 0$ et $A \wedge (A \wedge A) = (A \wedge A) \wedge A$.

Ainsi,

$$d^D F = dF + [A, F] = 0, \quad (5.4.39)$$

où (1.5.4) a été utilisée.

5.5 La courbure dans les fibrés principaux

Par définition, toute connexion ω définit une courbure Ω sur le fibré principal $P(M, G)$ par la dérivée covariante de cette connexion : $\Omega = D\omega = d\omega + \omega \wedge \omega \in \Omega^2(P) \otimes \mathfrak{g}$. C'est une 2-forme à valeurs dans l'algèbre de Lie \mathfrak{g} du groupe structural G du fibré principal. Nous pouvons démontrer facilement que sous une transformation de jauge $g(x)$, l'opérateur de courbure se transforme simplement comme : $\Omega' = g^{-1}\Omega g$.

La courbure vérifie l'équation de structure de Cartan :

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega], \quad (5.5.40)$$

telle que pour tout $X, Y \in \Gamma(P)$:

$$\Omega(X, Y) = d\omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)], \quad (5.5.41)$$

où on a utilisé le fait que : $\frac{1}{2}[\omega, \omega](X, Y) = [\omega(X), \omega(Y)]$.¹

Ω vérifie aussi l'identité de Bianchi :

$$d^D\Omega = d\Omega + [\omega, \Omega] = 0. \quad (5.5.42)$$

Démonstration

Les définitions du potentiel de jauge A et de la courbure F faisaient appel au choix d'une base locale $\{e_i\}$ d'une fibre de P , c'est à dire d'une section locale $\sigma : x \in M \rightarrow \sigma(x) \in P$. Donc, A (resp. F) n'est autre qu'une expression locale de la connexion ω (resp. Ω) dans P .

$$A = \sigma^*\omega \quad \text{et} \quad F = \sigma^*\Omega. \quad (5.5.43)$$

En utilisant les propriétés du pullback (voir section (1.1.8)), nous pouvons déduire les relations précédentes pour la courbure Ω . En effet,

$$\begin{aligned} F &= dA + A \wedge A \\ \Rightarrow \sigma^*\Omega &= d\sigma^*\omega + \sigma^*\omega \wedge \sigma^*\omega = \sigma^*(d\omega + \omega \wedge \omega). \end{aligned}$$

Il en résulte que : $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$.

De même pour l'identité de Bianchi dans P , on peut écrire

$$\begin{aligned} dF + [A, F] &= 0 \\ \Rightarrow d\sigma^*\Omega + [\sigma^*\omega, \sigma^*\Omega] &= 0 \\ \Rightarrow \sigma^*(d\Omega + [\omega, \Omega]) &= 0. \end{aligned}$$

On a donc : $d^D\Omega = 0$.

1. voir la démonstration à la fin de la section (1.2.5)

Cas spéciaux

Notons que dans les fibrés tangents, les indices internes appartiennent aux même jeux d'indices que les indices de la base, ce qui nous permet de contracter deux indices référant à deux bases différentes. En appliquant la formule (5.4.37) pour la connexion de Levi-Civita, on trouve la courbure associée à cette dernière en terme des symboles de Christoffel. Elle est appelée la courbure Riemannienne. Notons R cette courbure :

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \partial_{\beta}\Gamma^{\alpha}_{\gamma\delta} - \partial_{\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\rho}\Gamma^{\rho}_{\gamma\delta} - \Gamma^{\alpha}_{\gamma\rho}\Gamma^{\rho}_{\beta\delta}. \quad (5.5.44)$$

Dans le chapitre sur la géométrie Riemannienne, on va étudier en détail le cas de la courbure Riemannienne.

De la même manière, on associe à la connexion de spin $\Gamma_{\mu I}^J$ une courbure donnée par :

$$F_{\tau\sigma}^{IJ} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu}^{IJ} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu}^{IJ} + \Gamma_{\mu}^{IM}\Gamma_{\nu M}^J - \Gamma_{\nu}^{IM}\Gamma_{\mu M}^J. \quad (5.5.45)$$

Cette courbure joue un rôle fondamentale dans les nouvelles formulations des théories de jauge dans le cadre de la relativité générale.

Chapitre 6

Géométrie Riemannienne

6.1 Variété Riemannienne

6.1.1 Métrique et produit scalaire

Métrique

Définition : Une métrique g sur la variété différentiable M est un tenseur de type $(0, 2)$ symétrique et non dégénéré au sens suivant, l'application $g|_p$ appelée application *bémol*

$$\begin{aligned} g|_p : T_p M &\longrightarrow T_p^* M \\ X &\longmapsto [Y \mapsto g|_p(X, Y)], \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Notons $g|_p^\flat$, l'application inverse de $g|_p$. On l'appelle application *dièse*. Cette opération est l'opération d'élévation et d'abaissement des indices. A un champ de vecteurs X , nous associons la 1-forme différentielle $\alpha = g^\flat X$, dite covecteur ou vecteur dual de X , dont l'expression en coordonnées locales est $\alpha_i = g_{ij} X^j$, où $[g_{ij}(p)]$ est une matrice symétrique inversible définie en tout point p de la carte locale considérée. A une 1-forme différentielle α nous associons le champ de vecteurs $X = g^\sharp \alpha$ par $X^i = g^{ij} \alpha_j$, où $[g^{ij}(p)]$ est la matrice inverse de $[g_{ij}(p)]$, notée g^{-1} .

La dualité entre vecteur et covecteur s'exprime au niveau des composantes : $X_i = g_{ij} X^j$, $X^i = g^{ij} X_j$. On dit que les X_i sont les composantes covariantes et X^i sont les composantes contravariantes de X .

Généralisation : Nous pouvons généraliser l'opération d'élévation et d'abaissement des indices, qui relie les vecteurs et les covecteurs, pour les tenseurs de n'importe quel ordre. Ainsi, nous pouvons écrire

$$g_{\alpha\beta} A^{\alpha\gamma\rho} = A_\beta^{\gamma\rho}, \quad g^{\alpha\beta} A_{\alpha\gamma\rho} = A^\beta_{\gamma\rho}. \tag{6.1.2}$$

Par la contraction répétée avec g , d'un tenseur de type $(r, 0)$, on obtient un tenseur de type $(0, r)$

$$g_{i_1 j_1} g_{i_2 j_2} \dots g_{i_r j_r} A^{i_1 i_2 \dots i_r} = A_{j_1 j_2 \dots j_r}. \quad (6.1.3)$$

Produit scalaire

Définition : Le produit scalaire de deux vecteurs X et Y de $T_p M$ est défini par l'application bilinéaire symétrique non dégénérée

$$\begin{aligned} g|_p : T_p M \otimes T_p M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X|_p, Y|_p) &\longmapsto g|_p(X|_p, Y|_p). \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

C'est le réel noté $\langle X, Y \rangle = g|_p(X, Y)$. On dit que le tenseur métrique $g|_p$ munit l'espace vectoriel $T_p M$ d'une structure d'espace vectoriel Euclidien.

En coordonnées locales : $g|_p(e_i, e_j) = \langle e_i, e_j \rangle = g_{ij}$. Il s'ensuit que

$$g|_p(X|_p, Y|_p) = g|_p(X^i e_i, Y^j e_j) = g|_p(e_i, e_j) X^i Y^j = g_{ij} X^i Y^j.$$

Définition : deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul : $X \perp Y$ si $\langle X, Y \rangle = 0$.

Le champ de tenseur g est dit métrique et $g|_p$ est le tenseur métrique défini sur $T_p M \otimes T_p M$. La non dégénérescence de g est équivalent à la non dégénérescence du produit scalaire pour tout $p \in M$, c.à.d si $g|_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle = 0$ pour tout $X \in T_p M$, alors $Y = 0$.

Norme et angle

Définition : La norme d'un vecteur X est le réel $\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$.

Définition : L'angle α entre deux vecteurs X et Y de $T_p M$ est défini par $\cos \alpha = \frac{g|_p(X, Y)}{\|X\| \|Y\|}$.

Variété Riemannienne et pseudo-Riemannienne

Un tenseur g de type $(0, 2)$ est appelé métrique **pseudo-Riemannienne** si, en tout point $p \in M$ et pour tout $X, Y \in T_p M$,

- (a) g est symétrique, c.à.d : $g|_p(X, Y) = g|_p(Y, X)$.
- (b) g est non dégénéré, c.à.d : si $g|_p(X, Y) = 0$ alors $Y = 0$.

Si on a, en plus,

- (c) g est défini positif : $g|_p(X, X) > 0, \forall X \neq 0$, la métrique est appelée métrique **Riemannienne**.

Introduisons des coordonnées locales $\{x^\mu\}$ et une base $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\}$. En posant $g|_p(\partial_\mu, \partial_\nu) = g_{\mu\nu}$:

- 1) la condition (a) signifie $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$,
- 2) la condition (b) signifie que la matrice $[g_{\mu\nu}]$ est inversible,
- 3) la condition (c) signifie que $\forall X \neq 0 : g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu > 0$.

Définition : Une variété pseudo-Riemannienne est un couple (M, g) , où M est une variété différentiable et g est une forme bilinéaire qui répond aux conditions (a) et (b). Si, en outre, g satisfait la condition (c), la variété est appelée une variété Riemannienne.

Définition : L'élément métrique de M est le scalaire (intrinsèque)

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (6.1.5)$$

Pour un autre corepère $\{\theta^\alpha\}$, on notera l'élément métrique

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} \theta^\alpha \theta^\beta. \quad (6.1.6)$$

Signature de la métrique

La signature de la métrique est la différence $p - q = r$, où p est le nombre des valeurs propres positives de la métrique et q est le nombre des valeurs propres négatives. Si $r = n = \dim M$, la métrique est dite Riemannienne et la variété M est une variété Riemannienne. Si $r < n$ ($q \neq 0$) la métrique est pseudo-Riemannienne et aussi la variété M . Si $q = 0$ la forme métrique est définie positive et dans le cas $p = 0$ la forme métrique est définie négative. Dans les autres cas, la métrique est dite indéfinie.

Une fois la métrique est diagonalisée par un choix approprié d'une matrice orthogonale, il est toujours possible de réduire, par un choix approprié d'une matrice diagonale¹, tous les éléments diagonales à ± 1 . La métrique Riemannienne se réduit à la métrique Euclidienne $\delta = \text{diag}(1, \dots, 1)$. Quant à la métrique Pseudo-Riemannienne, elle se réduit à la métrique Lorentzienne $\eta = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$.

Exercice

Exprimer le tenseur métrique Euclidien et son conjugué dans la base $(\partial_r, \partial_\theta, \partial_z)$ des coordonnées cylindriques dans \mathbb{R}^3 , puis dans la base $(\partial_r, \partial_\theta, \partial_\varphi)$ des coordonnées sphériques dans \mathbb{R}^3 .

6.1.2 Vecteurs de Killing

Définition : Un champ de vecteurs X tel que

$$\mathcal{L}_X g = 0 \quad (6.1.7)$$

1. Autrement dit, par un réechellement (*rescaling*) des vecteurs de base.

est appelé champ de vecteurs de Killing. L'équation (6.1.8) signifie que la métrique ne change pas le long de la direction du champ de vecteurs X .

De la définition de la dérivée de Lie d'un champ de tenseur, nous pouvons facilement vérifier que $\mathcal{L}_X g_{\mu\nu} = 2(\nabla_\mu X_\nu - \nabla_\nu X_\mu) = 2\nabla_{(\mu} X_{\nu)}$. Ainsi, l'équation (6.1.8) est équivalente à

$$\nabla_{(\mu} X_{\nu)} = 0. \quad (6.1.8)$$

Cette dernière est appelée l'équation de Killing. Les vecteurs de Killing jouent un rôle important dans la physique moderne. L'existence des vecteurs de Killing implique la conservation des quantités associées au mouvement des particules libres et le nombre des vecteurs de Killing donne l'information sur la géométrie de l'espace considéré. Un espace de dimension n est dit à symétrie maximal s'il admet un nombre maximal des vecteurs de Killing qui est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$.

Proposition : S'il existe une carte locale dans laquelle le tenseur métrique est indépendant d'une coordonnées, alors un vecteur de Killing existe automatiquement. Par exemple, la métrique Euclidienne, $\delta = \text{diag}(1, 1, 1)$ dans \mathbb{R}^3 , ne dépend pas des coordonnées x, y et z , il s'ensuit que ∂_x, ∂_y et ∂_z sont des vecteurs de Killing dans \mathbb{R}^3 . D'autres vecteurs de Killing peuvent être construits par la combinaison de ces trois vecteurs.

6.1.3 Forme volume

Les variétés Riemanniennes sont de dimensions finies.

Définition : La forme volume de la métrique Riemannienne g est la n -forme complètement anti-symétrique

$$V_g = \sqrt{\det g} \, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n. \quad (6.1.9)$$

Ce tenseur a pour composantes dans la base $(dx^1 \otimes dx^2 \otimes \dots \otimes dx^n)$

$$(V_g)_{i_1 \dots i_n} = \epsilon_{i_1 \dots i_n} \sqrt{\det g}, \quad (6.1.10)$$

où $\epsilon_{i_1 \dots i_n}$ est le symbole de permutation totalement anti-symétrique de Levi-Civita

$$\epsilon_{i_1 \dots i_n} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i_1 \dots i_n) \text{ est une permutation paire de } (1, 2, \dots, n), \\ -1 & \text{si } (i_1 \dots i_n) \text{ est une permutation impaire de } (1, 2, \dots, n), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans \mathbb{R}^n : $\epsilon_{i_1 \dots i_n} = \epsilon^{i_1 \dots i_n}$.

Dans $\mathcal{M}^{(1,3)}$: $\epsilon_{i_0 i_1 i_2 i_3} = -\epsilon^{i_0 i_1 i_2 i_3}$.

6.2 Hodge star

Le tenseur métrique et l'isomorphisme entre les espaces vectoriels de même dimension nous permettent de définir une contraction (un isomorphisme) entre l'espace $\Omega^r(M)$ et $\Omega^{n-r}(M)$ puisque $\dim \Omega^r(M) = \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} = \dim \Omega^{n-r}(M)$. Cet isomorphisme est appelé **la dualité de Hodge** ou *Hodge star operator*

$$\begin{aligned} * : \Omega^r(M) &\longrightarrow \Omega^{n-r}(M) \\ \alpha &\longmapsto *\alpha, \end{aligned} \tag{6.2.11}$$

tel que $\forall \beta \in \Omega^r(M) : \beta \wedge (*\alpha) = \langle \beta, \alpha \rangle \omega_{\mathbf{v}}$, où $\omega_{\mathbf{v}}$ est la forme volume dans $\Omega(M)$, $\omega_{\mathbf{v}} = \sqrt{g}e^1 \wedge e^2 \wedge \dots \wedge e^n$, et le produit scalaire des r-formes : $\langle \beta, \alpha \rangle = \frac{1}{r!} \beta^{i_1 \dots i_r} \alpha_{i_1 \dots i_r}$. On obtient, donc, dans la base $\{e^i\}$ de $\Omega^{n-r}(M)$

$$(*\alpha)_{i_{r+1} \dots i_n} = \frac{\sqrt{g}}{r!} \epsilon_{i_1 \dots i_n} \alpha^{i_1 \dots i_r}. \tag{6.2.12}$$

Dans \mathbb{R}^n ,

$$\begin{aligned} * : \Omega^r(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \Omega^{n-r}(\mathbb{R}^n) \\ *(dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^r) &= \frac{1}{(n-r)!} \epsilon^{i_1 \dots i_r}_{i_{r+1} \dots i_n} dx^{i_{r+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}. \end{aligned} \tag{6.2.13}$$

Exemple

Dans \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} *dx^1 &= \frac{1}{2!} \epsilon^1_{jk} dx^j \wedge dx^k = dx^2 \wedge dx^3, & *dx^2 &= \frac{1}{2!} \epsilon^2_{jk} dx^j \wedge dx^k = -dx^1 \wedge dx^3, \\ *(dx^2 \wedge dx^3) &= \frac{1}{1!} \epsilon^{23}_k dx^k = dx^1, & *(dw^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) &= \frac{1}{0!} \epsilon^{123} = 1, & *f &= f dV. \end{aligned}$$

Propriétés

- 1) $\forall \phi, \psi \in \Omega^r(M) : \langle \phi, \psi \rangle = \text{sign } g \langle *\phi, *\psi \rangle$.
- 2) $\forall \phi \in \Omega^r(M) : **\phi = \text{sign } g (-1)^{r(n-r)} \phi$.

Exercices

- 1) Dans l'espace de Minkowski $\mathcal{M}^{(1,3)}$ vérifier les relations suivantes

$$*(dx^0 \wedge dx^1) = -dx^2 \wedge dx^3, \quad *dt = -dw^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

2) Vérifier les relations suivantes dans \mathbb{R}^3

Si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction smooth dans \mathbb{R}^3 , alors $df = \vec{\nabla} \cdot d\vec{x}$ et $*d*\alpha = \vec{\nabla} \cdot \vec{\alpha}$

Si $\alpha = \alpha_i dx^i$ est une 1-forme où α_i sont des fonctions dans \mathbb{R}^3 , alors $*d\alpha = (\vec{\nabla} \times \vec{\alpha}) \cdot d\vec{x}$,

Si $\beta = \beta_1 dx^2 \wedge dx^3 + \beta_2 dx^3 \wedge dx^1 + \beta_3 dx^1 \wedge dx^2$ est une 2-forme où β_i sont des fonctions dans \mathbb{R}^3 , alors $d\beta = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\beta}) dV$.

6.2.1 Codifférentielle et Laplacien

Définition

Pour une r -forme $\omega \in \Omega^r(M)$ arbitraire, la codifférentielle de ω , notée $\delta\omega$, est une $(r-1)$ -forme définie par

$$\delta\omega = \text{sign } g (-1)^{n(r+1)+1} *d*\omega. \quad (6.2.14)$$

Ainsi,

Dans un espace Euclidien : $\delta\omega = (-1)^{n(r+1)+1} *d*\omega$.

Dans un espace Minkowskien : $\delta\omega = -(-1)^{n(r+1)+1} *d*\omega$.

Propriétés

1) $\delta^2 = 0$.

2) $(\delta\alpha, \beta) = (\alpha, d\beta)$.

Opérateur de Laplace-Beltrami

L'opérateur de Laplace-Beltrami est défini par :

$$\nabla^2 \doteq \text{divgrad} \doteq \delta d \quad (6.2.15)$$

$$\nabla^2 f = \delta df = *d*df. \quad (6.2.16)$$

Opérateur de Laplace-de Rham

L'opérateur de Laplace-de Rham est défini par : $-\Delta \doteq d\delta + \delta d$.

Propriétés dans \mathbb{R}^3

$$* d * (\vec{v}.d\vec{x}) = \operatorname{div} \vec{v}$$

$$d * (\vec{v}.d\vec{x}) = \vec{\operatorname{rot}} \vec{v}.d\vec{x}$$

$$d * d * (\vec{v}.d\vec{x}) = (\vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{v}).d\vec{x}$$

$$* d * d (\vec{v}.d\vec{x}) = \vec{\operatorname{rot}}(\vec{\operatorname{rot}} \vec{v}).d\vec{x}$$

$$(d\delta + \delta d)(\vec{v}.d\vec{x}) = (\vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{v} - \vec{\operatorname{rot}} \vec{\operatorname{rot}} \vec{v}).d\vec{x} = -\Delta \vec{v}.d\vec{x}$$

$$\vec{\operatorname{rot}}^{-1} \vec{v} = \vec{\operatorname{rot}}(-\Delta^{-1} \vec{v}) \quad \text{quand } \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (\text{Loi de Biot-Savart})$$

$$(\Delta \alpha, \beta) = (\alpha, \Delta \beta), \quad \alpha, \beta \in \Omega(M)$$

$$\Delta * = * \Delta, \quad \Delta d = d \Delta, \quad \Delta \delta = \delta \Delta.$$

Remarque

Dans $\mathcal{M}^{(1,3)}$, l'opérateur de Laplace-de Rham $d\delta + \delta d$ représente le d'Alembertien

$$d\delta + \delta d = -\square \equiv -\partial^\mu \partial_\mu = \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Formes exactes et co-exactes, formes fermées et co-fermées

- 1) Une forme différentielle ω est exacte s'il existe une forme différentielle η telle que $\omega = d\eta$.
- 2) Une forme différentielle ω est co-exacte s'il existe une forme différentielle η telle que $\omega = \delta\eta$.
- 3) Une forme différentielle ω est fermée si $d\omega = 0$.
- 4) Une forme différentielle ω est co-fermée si $\delta\omega = 0$.

Formes harmoniques

Une forme différentielle ω est harmonique si $\Delta\omega = 0$. Cette définition implique la proposition suivante : Une forme différentielle ω est harmonique si et seulement si $\delta\omega = 0$ et $d\omega = 0$.

Démonstration

Le fait que $\Delta = d\delta + \delta d$, les deux conditions suffisantes pour que $\Delta\omega = 0$ sont $\delta\omega = 0$ et $d\omega = 0$.

Ainsi, toute forme harmonique est à la fois fermée et co-fermée.

Exercice

Montrer que dans l'espace de Minkowski, doté de la métrique Lorentzienne η , on a

- 1) Si ϕ est une 0-forme : $\delta\phi = 0$.
- 2) Si A est une 1-forme : $\delta A = -\frac{1}{\sqrt{|\eta|}} \partial_\mu (\sqrt{|\eta|} A^\mu)$.
- 3) Si F est une 2-forme : $(\delta F)^\nu = -\frac{1}{\sqrt{|\eta|}} \partial_\mu (\sqrt{|\eta|} F^{\mu\nu})$.

6.2.2 L'électromagnétisme dans le langage des formes différentielles

Définissons dans $\mathcal{M}^{(1,3)}$ la 1-forme champ électrique par

$$E = E_1 dx + E_2 dy + E_3 dz, \quad (6.2.17)$$

où (E_1, E_2, E_3) sont les composantes du champ électrique $\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$. Et de même, on définit la 2-forme champ magnétique par

$$B = B_{12} dx \wedge dy + B_{13} dz \wedge dx + B_{23} dy \wedge dz, \quad (6.2.18)$$

où $(B_{12} \equiv B_z, B_{13} \equiv B_y, B_{23} \equiv B_x)$ sont les composantes du champ électrique $\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$. On définit, aussi, la 1-forme courant électrique par

$$J = \rho dt - j_1 dx - j_2 dy - j_3 dz \quad (6.2.19)$$

et la 1-forme 4-potentiel

$$J = \phi dt - A_1 dx - A_2 dy - A_3 dz. \quad (6.2.20)$$

Nous pouvons vérifier les expressions suivantes :

i) Le tenseur champ électromagnétique est donné par : $F = dA$. De cette définition, nous avons

$$F = E \wedge dt + B, \text{ où } E = \partial_t A \text{ et } B = d_s A.$$

ii) La conservation du courant J est donnée par : $\delta J = 0$.

iii) La 1^{ère} classe des équations de Maxwell est donnée par : $dF = 0$.

iv) La 2^{ème} classe des équations de Maxwell est donnée par : $\delta F = 0$.

Théorie de l'électromagnétisme		
	<i>Forme Géométrique</i>	<i>Forme Covariante</i>
La 1 ^{ère} classe des équations de Maxwell	$dF = 0$	$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0$
La 2 ^{ème} classe des équations de Maxwell	$\delta F = 0$	$\frac{1}{\sqrt{ g }} \partial_\beta (\sqrt{ g } F^{\alpha\beta}) = J^\alpha$
Equation de continuité	$\delta J = 0$	$\frac{1}{\sqrt{ g }} \partial_\alpha (\sqrt{ g } J^\alpha) = 0$
Potentiel de jauge	$F = dA$	$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$
Théorie de jauge	$A \longrightarrow A + d\chi$	$A_\alpha \longrightarrow A_\alpha + \partial_\alpha \chi$

TABLE 6.1 – L'électromagnétisme dans le langage des formes différentielles

6.2.3 Connexion de Levi-Civita

Définition : On appelle connexion linéaire sur M toute application

$$D : \Gamma(M) \otimes \Gamma(M) \longrightarrow \Gamma(M) \quad (6.2.21)$$

$$(X, Y) \longmapsto D_X Y,$$

qui est bilinéaire et telle que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, on a

$$D_{fX} Y = f D_X Y \quad \text{et} \quad D_X (fY) = f D_X Y + df(X)Y. \quad (6.2.22)$$

Théorème : Sur toute variété Riemannienne (M, g) , il existe une unique connexion linéaire ∇ telle que, pour tout $(X, Y, Z) \in \Gamma(M)^3$:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad (6.2.23)$$

$$Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y). \quad (6.2.24)$$

L'équation (6.2.23) signifie que ∇ est sans torsion et (6.2.24) est la condition de la compatibilité de ∇ avec la métrique g . ∇ est appelée **connexion de Levi-Civita** de la métrique g .

En coordonnées locales $\{x^\mu\}$ d'une carte (U, φ) de M , on a

$$\nabla_\mu \partial_\nu = \Gamma^\rho_{\mu\nu} \partial_\rho \quad (6.2.25)$$

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \quad (6.2.26)$$

Exercice : Evaluer $\nabla_X Y$.

Exercice : Montrer, à partir de (6.2.23) et (6.2.24), qu'on a les propriétés $\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\nu\mu}$ et $\nabla g = 0$.

Les $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ sont appelés les symboles de Christoffel de deuxième espèce de la métrique g dans la carte (U, φ) . Par définition, les symboles de Christoffel de première espèce sont données par la formule : $\Gamma_{\sigma\mu\nu} = g_{\rho\sigma} \Gamma^\rho_{\mu\nu}$.

Exercice : Donner la loi de transformation des symboles de Christoffel $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ lors d'un changement de coordonnées $(x) \rightarrow (x')$. Que peut-on conclure ?

6.2.4 Equation de la géodésique

Sur la variété Riemannienne (M, g) , soit un arc de courbe $c : [a, b] \rightarrow M; t \mapsto c(t)$, différentiable par morceaux sur M .

Définition : La longueur de l'arc c est le nombre réel

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{g_c\left(\frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt}\right)} dt, \quad (b > a). \quad (6.2.27)$$

En coordonnées locales, on a

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} dt, \quad (6.2.28)$$

encore noté $L(c) = \int_a^b \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} dt = \int_{S_a}^{S_b} dS$.

Théorème : un arc géodésique c est un arc de courbe tel que son champ de vecteurs tangent X vérifie

$$\nabla_X X = 0. \quad (6.2.29)$$

On dit que X est transporté parallèlement le long de c . En coordonnées locales, cette équation des géodésiques s'écrit

$$\frac{dX^\mu}{dt} + \Gamma^\mu_{\sigma\nu} X^\sigma X^\nu = 0, \quad (6.2.30)$$

ou

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Gamma^\mu_{\sigma\nu} \frac{dx^\sigma}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0. \quad (6.2.31)$$

Cette équation signifie que la particule n'est soumise à aucune force le long de l'arc de courbe c , par conséquent la géodésique est le chemin suivi par la particule libre.

Exercice : Par la variation de $L(c)$ donné par (6.2.28), reproduire les équations de la géodésique (6.2.31).

6.2.5 La courbure Riemannienne

Définition : Soit (M, g) une variété Riemannienne et ∇ sa connexion de Levi-Civita. On appelle **tenseur de courbure** de (M, g) l'application

$$\begin{aligned} R : \Gamma(M) \otimes \Gamma(M) \otimes \Gamma(M) \otimes \Gamma(M) &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \\ (W, X, Y, Z) &\longmapsto g(\nabla_W(\nabla_X Z) - \nabla_X(\nabla_W Z) - \nabla_{[W, X]}Z, Y) = R(W, X, Y, Z). \end{aligned} \quad (6.2.32)$$

Dans une carte locale (U, φ) de M et à un point $x \in M$

$$R(W, X, Y, Z)(x) = R_{\mu\nu\rho\sigma} W^\mu(x) X^\nu(x) Y^\rho(x) Z^\sigma(x), \quad (6.2.33)$$

$$\text{avec } R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\sigma\delta} \left(\partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\delta - \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\delta + \Gamma_{\mu\rho}^\epsilon \Gamma_{\nu\epsilon}^\delta - \Gamma_{\nu\rho}^\epsilon \Gamma_{\mu\epsilon}^\delta \right). \quad (6.2.34)$$

Exercice : A partir de la définition (6.2.32) de la courbure R , démontrer la relation (6.2.34).

Proposition : R est un tenseur de type $(0, 4)$ 4-linéaire sur $\Gamma(M)$.

Propriétés :

- 1) $R(W, X, Y, Z) = -R(X, W, Y, Z)$
- 2) $R(W, X, Y, Z) = -R(W, X, Z, Y)$
- 3) $R(W, X, Y, Z) = R(Y, ZW, X)$
- 4) $R(f_1 W, f_2 X, f_3 Y, f_4 Z) = f_1 f_2 f_3 f_4 R(W, X, Y, Z), \quad \forall f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$.

Le tenseur de courbure de Riemann

Définition : Le **tenseur de courbure de Riemann** est le tenseur de type $(1, 3)$ donné par

$$R^\tau_{\nu\rho\sigma} = g^{\tau\mu} R_{\mu\nu\rho\sigma} = \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\tau - \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\tau + \Gamma_{\mu\rho}^\epsilon \Gamma_{\nu\epsilon}^\tau - \Gamma_{\nu\rho}^\epsilon \Gamma_{\mu\epsilon}^\tau. \quad (6.2.35)$$

L'application

$$\begin{aligned} R : \Gamma(M) \otimes \Gamma(M) \otimes \Gamma(M) &\longrightarrow \Gamma(M) \\ (X, Y, Z) &\longmapsto R(X, Y)Z, \end{aligned} \quad (6.2.36)$$

est définie par

$$R(X, Y)Z = X^\mu Y^\nu Z^\rho R^\tau_{\rho\mu\nu} \partial_\tau, \quad (6.2.37)$$

$$\text{où } R(X, Y)Z = \left(\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]} \right) Z \quad (6.2.38)$$

$$\Rightarrow R(\partial_\mu, \partial_\nu) \partial_\rho = R^\tau_{\rho\mu\nu} \partial_\tau. \quad (6.2.39)$$

Prop : Le tenseur de Riemann est antisymétrique sur les deux derniers indices $R^\tau_{\rho\mu\nu} = -R^\tau_{\rho\nu\mu}$.

Tenseur de Ricci

Définition : Le **tenseur de Ricci** est le tenseur symétrique de composantes

$$R_{\mu\nu} = R^{\tau}{}_{\mu\tau\nu} = g^{\rho\tau} R_{\mu\rho\tau\nu}. \quad (6.2.40)$$

Courbure scalaire

Définition : La **courbure scalaire** d'une variété Riemannienne est le scalaire intrinsèque obtenu par la contraction du tenseur de Ricci

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (6.2.41)$$

Exercice : Calculer les symboles de Christoffel non nuls, les composantes non nulles du tenseur de Riemann, le tenseur de Ricci et la courbure scalaire de la métrique de de Sitter

$$ds^2 = c^2 dt^2 - e^{2Ht}(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

$H = \frac{c}{R}$ est le paramètre de Hubble et R est le rayon de l'espace de de Sitter.

6.2.6 Tenseur de torsion

Définition : Le **tenseur de torsion** est le tenseur de type $(1, 2)$ donné par

$$\begin{aligned} T : \Gamma(M) \otimes \Gamma(M) &\longrightarrow \Gamma(M) \\ (X, Y) &\longmapsto T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]. \end{aligned} \quad (6.2.42)$$

Ses composantes, dans la base naturelle $\{\partial_\mu\}$ et la base duale $\{dx^\mu\}$, sont données par

$$T^\lambda{}_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}. \quad (6.2.43)$$

Dans le cas d'un repère mobile $\{e_\mu, e_\nu\}$ avec $[e_\mu, e_\nu] = f_{\mu\nu}{}^\tau e_\tau$, on trouve

$$T^\lambda{}_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - f_{\mu\nu}{}^\lambda. \quad (6.2.44)$$

Le tenseur de torsion satisfait la propriété

$$T^\lambda{}_{\mu\nu} = -T^\lambda{}_{\nu\mu}. \quad (6.2.45)$$

Remarque : Si dans un repère naturel $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}$, comme dans le cas de la connexion de Levi-Civita, la torsion est alors nulle.

6.2.7 Identités de Bianchi

Théorème : Soit (M, g) un espace de Riemann doté de la connexion de Levi-Civita ∇ . Le tenseur de courbure de Riemann R satisfait les deux propriétés suivantes,

$$1^{\text{ère}} \text{ identité de Bianchi : } R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0, \quad (6.2.46)$$

$$2^{\text{ème}} \text{ identité de Bianchi : } (\nabla_X R)(Y, Z)W + (\nabla_Y R)(Z, X)W + (\nabla_Z R)(X, Y)W = 0. \quad (6.2.47)$$

Démonstration :

1^{ère} identité de Bianchi.

En utilisant la propriété (6.2.23) de la connexion de Levi-Civita et le fait que le commutateur de deux vecteurs est un vecteur, on obtient

$$\nabla_Z(\nabla_X Y - \nabla_Y X) = \nabla_Z[X, Y] \Leftrightarrow \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_Z \nabla_Y X = \nabla_{[X, Y]} Z + [Z, [X, Y]].$$

Avec une permutation circulaire des (X, Y, Z) et en utilisant l'identité de Jacobi pour les champs de vecteurs $[Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] + [X, [Y, Z]] = 0$, on obtient le résultat demandé.

2^{ème} identité de Bianchi.

En appliquant la règle de Leibnitz et la définition (5.1.13) de la dérivée covariante sur le tenseur de la courbure R , on obtient

$$\nabla_Z(R(X, Y)W) = (\nabla_Z R)(X, Y)W + R(\nabla_Z X, Y)W + R(X, \nabla_Z Y)W + R(X, Y)\nabla_Z W.$$

Une sommation avec permutation circulaire de (X, Y, Z) , on a

$$\begin{aligned} & (\nabla_X R)(Y, Z)W + (\nabla_Y R)(Z, X)W + (\nabla_Z R)(X, Y)W \\ &= \nabla_X(R(Y, Z)W) - R(\nabla_X Y, Z)W - R(Y, \nabla_X Z)W - R(Y, Z)\nabla_X W \\ & \quad + \nabla_Y(R(Z, X)W) - R(\nabla_Y Z, X)W - R(Z, \nabla_Y X)W - R(Z, X)\nabla_Y W \\ & \quad + \nabla_Z(R(X, Y)W) - R(\nabla_Z X, Y)W - R(X, \nabla_Z Y)W - R(X, Y)\nabla_Z W. \end{aligned}$$

Après développement, et en utilisant le fait que, dans le cas de la connexion de Levi-Civita, $T(X, Y)$ est un vecteur nul ce qui implique que $R(T(X, Y), Z)W = R(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], Z)W = 0$ et en utilisant les propriétés (5.1.8) de la connexion et l'identité de Jacobi pour les champs de vecteurs, on obtient le résultat demandé.

En coordonnées locales, la 1^{ère} identité de Bianchi se traduit par l'expression suivante entre les composantes du tenseur de Riemann

$$R^{\tau}_{\rho\mu\nu} + R^{\tau}_{\nu\rho\mu} + R^{\tau}_{\mu\nu\rho} = 0. \quad (6.2.48)$$

La 2^{ème} identité de Bianchi donne la relation suivante entre les composantes du tenseur de Riemann

$$\nabla_{\lambda} R^{\tau}_{\rho\mu\nu} + \nabla_{\nu} R^{\tau}_{\rho\lambda\mu} + \nabla_{\mu} R^{\tau}_{\rho\nu\lambda} = 0. \quad (6.2.49)$$

Equation d'Einstein

Dans la relation (6.2.49), une contraction sur les indices τ et λ donne

$$\begin{aligned} & \nabla_\tau R^\tau_{\rho\mu\nu} + \nabla_\nu R^\tau_{\rho\tau\mu} + \nabla_\mu R^\tau_{\rho\nu\tau} = 0 \\ \Rightarrow & \nabla_\tau R^\tau_{\rho\mu\nu} + \nabla_\nu R_{\rho\mu} - \nabla_\mu R_{\rho\nu} = 0. \end{aligned}$$

Une nouvelle contraction en ρ et ν implique

$$\begin{aligned} & \nabla_\tau g^{\rho\nu} R^\tau_{\rho\mu\nu} + \nabla_\nu g^{\rho\nu} R^\tau_{\rho\tau\mu} + \nabla_\mu g^{\rho\nu} R^\tau_{\rho\nu\tau} = 0 \\ \Rightarrow & \nabla_\tau R^\tau_\mu + \nabla_\nu R^\nu_\mu - \nabla_\mu R = 0 \\ \Rightarrow & 2\nabla_\nu g^{\delta\mu} R^\nu_\mu - \nabla_\mu g^{\delta\mu} R = 0 \\ \Rightarrow & \nabla_\nu (R^{\nu\delta} - \frac{1}{2}g^{\nu\delta} R) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, le tenseur $E^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu} R$, appelé **tenseur d'Einstein**, satisfait l'équation $\nabla_\mu E^{\mu\nu} = 0$. Ce tenseur, qui décrit les propriétés de l'espace-temps, peut être identifier au tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$ qui satisfait aussi l'équation de continuité $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Ainsi, l'équation d'Einstein s'écrit

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu} R = \kappa T^{\mu\nu}. \quad (6.2.50)$$

κ étant une constante qui assure l'homogénéité de l'équation. Le tenseur énergie-impulsion décrit l'état de la distribution énergétique en chaque point et généralise le membre de droite de l'équation de Poisson.

Bibliographie

- [1] S. Kobayashi, K. Nomizu ; *Foundations of differential geometry, Tomes I & II*, Interscience Publishers, (1963).
- [2] Y. Choquet-Bruhat , C. deWitt-Morette and M. Dillard-Bleick ; *Analysis, Manifolds and Physics* (Amsterdam : North-Holland) (1977).
- [3] J. C. Baez, J. P. Muniain ; " *Gauge Fields, Knots and Gravity*", Series on Knots and Everything - vol. 4, World Scientific Publishing, Singapore,(1994).
- [4] M. Nakahara ; "*Geometry, Topology and Physics*", IOP Publishing Ltd, Bristol, (1990).
- [5] Y. Talpaert ; *Differential geometry : with applications to mechanics and physics*, Marcel Dekker, New York, (2001).
- [6] R. Coquereaux , *Espaces Fibrés et Connexions : Une introduction aux géométries classiques et quantiques de la physique théorique*, Centre de Physique Théorique, Luminy - Marseille (2002).
- [7] T. MASSON ; *Géométrie différentielle, groupes et algèbres de Lie, fibrés et connexions* Laboratoire de Physique Théorique1, Université Paris XI (2001).