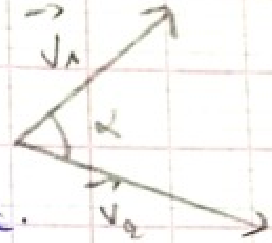
2.3. produit scalaire :



Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ fesant entre eux ~~son~~ un angle α et défini par

$$\boxed{\vec{V_1}\cdot\vec{V_2} = \vec{V_1}\times\vec{V_2} = \|\vec{V_1}\|\cdot\|\vec{V_2}\|\cdot\cos\alpha}$$

Rappel:

Le module d'un vecteur $\vec{V}(x, y, z)$ dans un

$\cancel{(\|\vec{V}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2})}$

repère orthonormé $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ est défini par =

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Remarque :

Si $\vec{A} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = 0$.

autre écriture :

soit $\vec{V_1}(x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{V_2}(x_2, y_2, z_2)$ deux vecteurs définis dans une base orthonormée $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ est défini par :

$$\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

Exercic :

Soit $\vec{V_1}(1, 2, 1)$ et $\vec{V_2}(-1, 1, -2)$ deux vecteurs définit dans une base orthonormée :

1. calculer le produit scalaire $\vec{V_1} \cdot \vec{V_2}$.
2. calculer les modules de $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ puis déduire l'angle α entre $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$.

Solution : $\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = -1 + 2 - 2 = -1$.

$\|\vec{V_1}\| = \sqrt{6}$ $\quad \|\vec{V_2}\| = \sqrt{6}$

$\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = -1$.

et $\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = \|\vec{V_1}\| \cdot \|\vec{V_2}\| \cdot \cos\alpha$

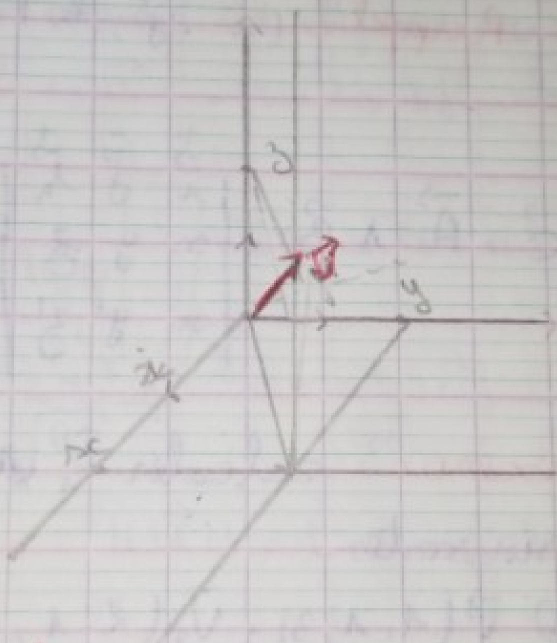
$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{V_1} \cdot \vec{V_2}}{\|\vec{V_1}\| \cdot \|\vec{V_2}\|} = \frac{-1}{6}$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos\left(-\frac{1}{6}\right) = 99.59.$$

1.4. Représentation d'un vecteur.

Pour représenter un vecteur $\vec{V}$ dans $\vec{V}(x . y . z)$ on repère orthonormé $(\vec{i} . \vec{j} . \vec{k})$. il faut connaître les cordonnées $(x . y . z)$ de l'extrémité de ce vecteur.

le sens du vecteur est de l'origine du repère vers l'extrémité du vecteur.



1.5. Egalité de deux vecteurs :

Les deux vecteurs $\vec{V_1}(x . y . z)$ et $\vec{V_2}(x' . y' . z')$ sont égales s'ils ont le même module, la même direction et le même sens.

Ou bien :
$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

1. produit vectoriel

ns dirod

$\vec{i}$ $\vec{k}$ $\vec{j}$

I.6. produit vectoriel :

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{A}(x, y, z)$ et $\vec{B}(x', y', z')$ est un vecteur on écrit : $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{C}$

Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le produit vectoriel $\vec{A} \wedge \vec{B}$ est calculé de la manière suivante

Rappel : $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: $\begin{cases} \vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0 \\ \vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1 \end{cases}$

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} \end{array} = (yz' - y'z)\vec{i} - (x\cdot z' - x'z)\vec{j} + (xy' - x'y)\vec{k}$$

Exercice : calculer $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$ dans les situations suivantes.

① $\vec{V_1}(1, 1, 3)$. $\vec{V_2}(2, 1, -1)$

② $\vec{V_1} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$, $\vec{V_2} = \vec{j} + 2\vec{k}$

Solution :

① . $$\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \end{array} = (-1-3)\vec{i} - (-1-6)\vec{j} + (1-2)\vec{k}$$

$$= -4\vec{i} + 7\vec{j} - 2\vec{k}.$$

autre définition : le produit vectoriel entre deux vecteur $\vec{A}$ et $\vec{B}$ faisant un angle α est défini par : $\vec{A} \wedge \vec{B} = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \sin\alpha \cdot \vec{u}$

$\vec{u}$ est le vecteur unitaire dans la direction de $\vec{A} \wedge \vec{B}$.

Rappel :

le vecteur unitaire dans la direction d'un vecteur $\vec{r}$ donné est défini par : $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$

Exemple : $\vec{C} = -4\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}$

$$\vec{u} = \frac{\vec{C}}{\|\vec{C}\|} \quad . \quad \|\vec{C}\| = \sqrt{16+49+1} = \sqrt{66}$$

$$\vec{u} = \frac{-4\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{66}} = \frac{-4}{\sqrt{66}}\vec{i} + \frac{7}{\sqrt{66}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{66}}\vec{k}.$$

Remarque : $\|\vec{u}\| = 1$. en effet : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\frac{16+49+1}{66}}$
$= \sqrt{\frac{66}{66}} = 1$.

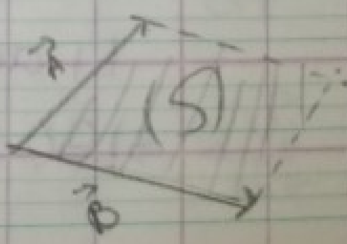
• propriétés :

1)- Si $\vec{A} \parallel \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0}$.

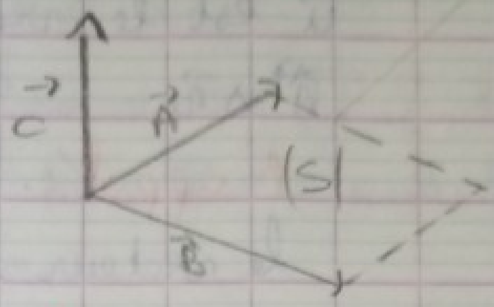
$\vec{A} \wedge \vec{B} = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \sin\alpha \cdot \vec{u} = \vec{0}$.

2)- $\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$.

3) $\|\vec{A} \wedge \vec{B}\| = S$



4) le produit vectoriel $\vec{A} \wedge \vec{B}$ est un vecteur $\vec{c}$ toujour perpendiculaire $(\perp)$ au plan formé par $\vec{A}$ et $\vec{B}$.



2-7- produit mixte.

le produit mixte est une opperation dans laquelle on effectue un produit scalaire et un produit vectoriel à la fois.

Soit $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$, $\vec{V_3}$ trois vecteur définis dans une base orthonormée.

Le produit mixte des trois vecteurs est défini par $\vec{V_1} \cdot (\vec{V_2} \wedge \vec{V_3})$

• propriétés :

1) $\vec{V_1} \cdot (\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}) = \vec{V_2} (\vec{V_3} \wedge \vec{V_1}) = \vec{V_3} (V_1 \wedge V_2)$

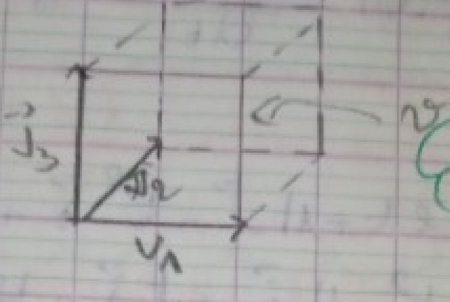
2) si $V_1 \cdot (\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}) = 0 \Rightarrow$ ~~V_1, V_2 et $\vec{V_3}$~~

$\Rightarrow$ a) $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ et $\vec{V_3}$ appartiennent au même plan ~~(colinéaire)~~ (coplanair).

b) au moins un des trois vecteurs est nule $(\vec{0})$

3) Si $\vec{V_1} (\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}) \neq 0$

alors : $|\vec{V_1} \cdot (\vec{V_2} \wedge \vec{V_3})|$ représente le volume du parallélipède formé par les 3 vecteurs $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ et $\vec{V_3}$.



$$v = |\vec{V_1} \cdot (\vec{V_2} \wedge \vec{V_3})|$$

3. dérivées, différentielles et opérateurs différentiels :

3.1. dérivée d'un vecteur :

Soit un vecteur $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ défini dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

La dérivée par rapport au temps du vecteur $\vec{r}$ est défini par :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}.$$

- propriétés :

Soit $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ deux vecteurs α et β des nombres réels :

- $\frac{d}{dt}(\alpha\vec{V_1} + \beta\vec{V_2}) = \alpha \cdot \frac{d\vec{V_1}}{dt} + \beta \cdot \frac{d\vec{V_2}}{dt}$.
- $\frac{d}{dt}(\vec{V_1} \cdot \vec{V_2}) = \frac{d\vec{V_1}}{dt} \cdot \vec{V_2} + \vec{V_1} \cdot \frac{d\vec{V_2}}{dt}$

$$\frac{d}{dt}(\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}) = \frac{d\vec{V_1}}{dt} \wedge \vec{V_2} + \vec{V_1} \wedge \frac{d\vec{V_2}}{dt}.$$

$$\frac{d}{dt}(f \cdot \vec{V}) = \frac{df}{dt} \cdot \vec{V} + f \cdot \frac{d\vec{V}}{dt}.$$

exp :

$\vec{V_1} = (2t+1)\vec{i} - t^2\vec{j} + (4t^2+1)\vec{k}$

$\vec{V_2} = (t^2-1)\vec{i} + t\vec{j} - 4t\vec{k}.$

3.2 : Différentielle :

a. différentielle d'une fonction scalaire :

On considère une fonction $f(x,y,z)$ dépendante de trois variables x, y, et z. La dérivée partielle de la fonction f par rapport à x est obtenue en considérant y et z comme des constantes.

on écrit : $\frac{\partial f}{\partial x}$ de même, on obtient : $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Exp : $f(x,y,z) = 3x^2 y - y^2 + z x^2.$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x \cdot y + 2z \cdot x.$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial z} = x^2.$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 - 2y.$

b - différentielle total :

La différentielle total d'un champ scalaire $f(x.y.z)$ et défini par :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot dz$$

3 - 3 - oppérateurs différentiels :

a - Le gradient :

Soit $f(x.y.z)$ une fonction continue et dérivable. « Le gradient de la fonction f ». est un vecteur noté : « $\overrightarrow{grad}\, f$ » défini par :

$$\overrightarrow{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial t} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

si on introduit l'ecriture avec l'oppérateur nabla $\vec{\nabla}$.

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

on Écrit : $\overrightarrow{grad}\, f = \vec{\nabla} f$

b - La divergence :

La divergence d'un vecteur $\vec{V}$ est défini par : $div(\vec{V}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$

Si : $\vec{V}(V_x . V_y . V_z)$

$$\boxed{div(\vec{V}) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}}$$

c. Le Rotationnel :

on considère un vecteur $\vec{V}$ défini dans un repère orthonormé $(\vec{i} ; \vec{j} . \vec{k})$. le rotationnel du vecteur $\vec{V}$ noté $\vec{Rot}(\vec{V})$ est défini par :

$\boxed{\vec{Rot}(\vec{V}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{V}}$ / $\vec{V}(V_x . V_y . V_z)$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y} . V_z - V_y \frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x} . V_z . V_x . \frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x} V_y - V_x . \frac{\partial}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Ex :

$$\vec{V} = (2x + y)\vec{i} + (y^2 - z)\vec{j} + 2zx\,\vec{k}.$$

$$\vec{Rot}(\vec{V})\ (0 + 2z)\vec{i} - (2z - 0)\vec{j} + (0 - 1)\vec{k}$$

$$= 2z\vec{i} - 2z\vec{j} - \vec{k}$$

propriété :

$\vec{Rot}(\vec{grad} f) = \vec{0}$

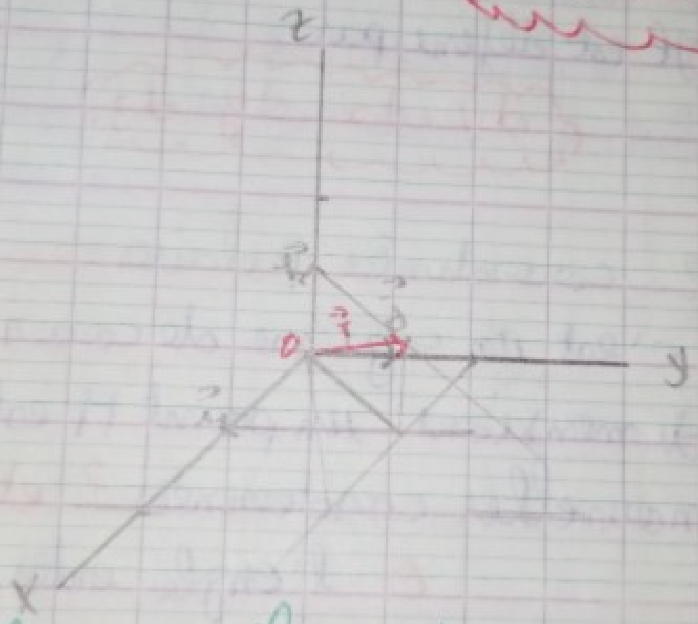
Scanned by Gen Scanner

Ex : $f(x, y, z) = 2xy + z^2$. grad f = 2y i
$\vec{\text{grad}}\, f = 2y\vec{i} + 2x\vec{j} + 2z\vec{k}$

$\vec{\text{Rot}}(\vec{\text{grad}}\, f) = (0-0)\vec{i} - (0-0)\vec{j} + (2-2)\vec{k} = \vec{0}$

3-4 - Systèmes cartesiennes = cordoné cartisiennes

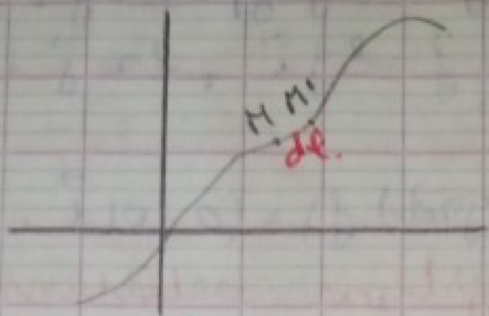
Dans un repére orthonormé $R(X, Y, Z)$ est une base $(\vec{i} ; \vec{j} . \vec{k})$ la position d'un point M aterial est donnée par un vecteur appellé (vecteure position) on écrit : $\boxed{\vec{r} = \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}$



Deplacement élémentaire :

Le déplacement élémentaire d'un point $M(x, y, z)$ à un autre point $M'(x + dx ; y + dy, z + dz)$ trés proche de M est donné par :

$$\boxed{\vec{dl} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}}$$



Élément de volume :

Le volume défini par les trois déplacement élémentaire : $dx; dy; dz$. est apple volume élémentaire => Les cordonnée cartesienes.

Il est défini par :

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz$$

2- coordonnées polaires :

c'est un système de coordonnés à deux dimensions. un point M est répré par 2 nouvelles cordonnées ρ et θ. avec. $\rho = \|\vec{OM}\|$

θ = l'engle entre $\vec{OM}$ et l'axe x.

on écrit : $M(x; y)$ → cordonnées cartesiennes

$M(\rho, \theta)$ → coordonnées polaires

passage : coordonées polaires → coordonées cartesienes. $(\rho, \theta) \to (x, y)$

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\theta \end{cases}$$

Passage : c.c → c.p

$$\begin{cases} \rho = \|\vec{OM}\| = \sqrt{x^2+y^2} \\ tg\,\theta = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$$

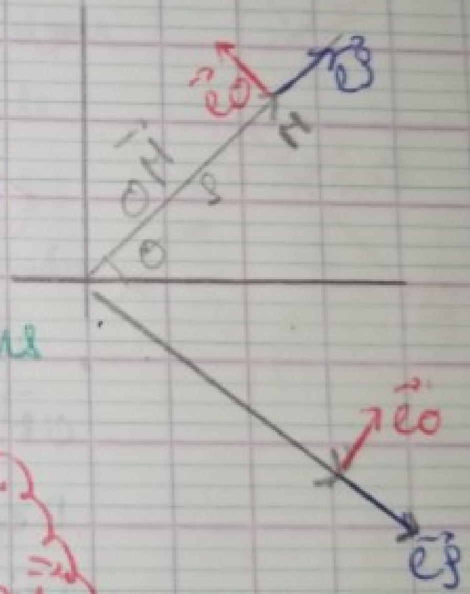
• vecteurs de base :

Il existe deux vecteurs de base $(\vec{e}_\rho ; \vec{e}_\theta)$

$\vec{e}_\rho$: est uis suivants ρ

$\vec{e}_\theta$ = est uis $\perp$ à $\vec{e}_\rho$ ds le sens direct

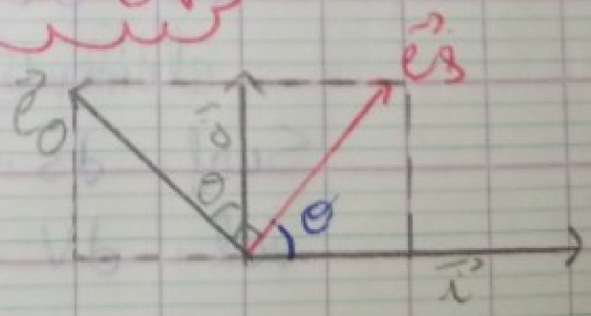
avec :



$$\begin{cases} \|\vec{e}_\rho\| = \|\vec{e}_\theta\| = 1. \\ \vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\theta = 0 \quad (\vec{e}_\rho \perp \vec{e}_\theta) \end{cases}$$

• relation entre les vecteurs de base :

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \\ \vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \end{cases}$$



• vecteur position :

$$\boxed{\vec{OM} = \rho \cdot \vec{e_\rho}}$$

. Deplacement élémentaire :

$$d\vec{l} = d\vec{OM} = d(\rho, \vec{e_\rho})$$

$$d\vec{l} = d\rho \cdot \vec{e_\rho} + \rho\, d(\vec{e_\rho})$$

avec : $d\vec{e_\rho} = d\theta \cdot \vec{e_\theta}$

$$\boxed{d\vec{l} = d\rho \cdot \vec{e_\rho} + \rho \cdot d\theta \cdot \vec{e_\theta}}$$

• Surface élémentaire :

c.c : $ds = dx \cdot dy$.

$$\boxed{c.p : ds = \rho\, d\rho\, d\theta}$$

• vecteur position :

$\vec{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

. Deplacement élémentaire :

$d\vec{e} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

. élements de surface et volume :

Surf : $ds = dx \cdot dy$.

vol : $dV = dx \cdot dy \cdot dz$.

Scanned by Gen Scanner

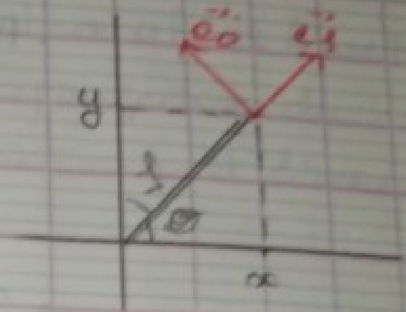
c. polaires : $M(\rho, \theta)$

V. position : $\vec{OM} = \rho \cdot \vec{e_\rho}$

élément de surface : $dS = \rho \cdot d\rho \cdot d\theta$.

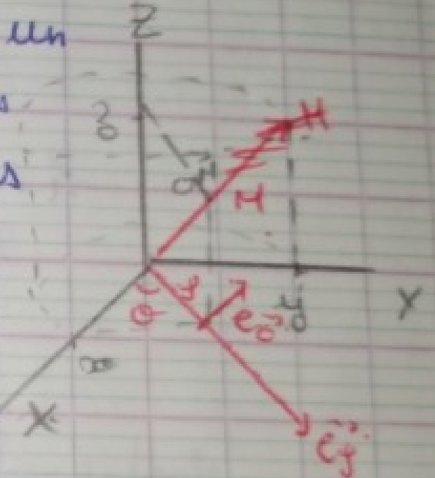
$\vec{e_\rho} = \cos\theta \, \vec{i} + \sin\theta \, \vec{j}$

$\vec{e_\theta} = -\sin\theta \, \vec{i} + \cos\theta \, \vec{j}$



4-3 : Coordonnées sylindiques :

En coordonnées sylindique, un point M est représenté par les deux coordonnées polaires dans le plus auxquelles on rajoute la coordonnée z. $M(\rho, \theta, z)$



- relation avec les coordonnées cartesiennes :

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

- La base : $(\vec{e_\rho} ; \vec{e_\theta} ; \vec{k})$.

. vecteur position : $\vec{OM} = \vec{OM'} + \vec{M'M}$

$$\vec{OM} = \rho \, \vec{e_\rho} + z \, \vec{k}$$

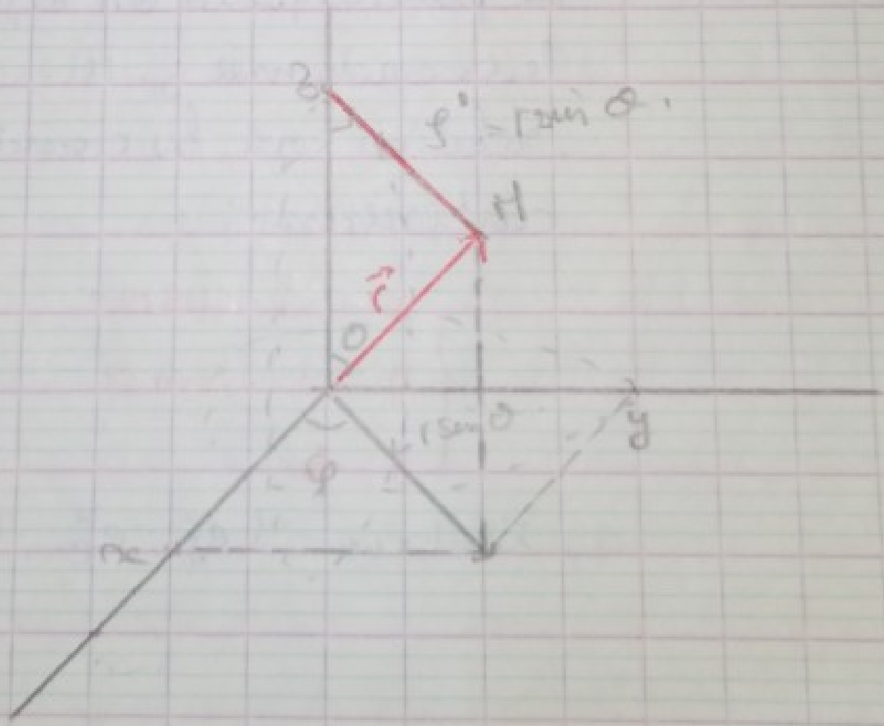
. Deplacement élémentaire :

$$\vec{dl} = d\rho \, \vec{e_\rho} + \rho \, d\theta \, \vec{e_\theta} + dz \, \vec{k}$$

. volume élémentaire :

$$dV = \rho \, d\rho \, d\theta \, dz$$

4 - coordonnées sphériques $M(r, \theta, \varphi)$.



En coordonnées sphérique, un point M est représenté par trois coordonnées :

- $r = \|\vec{OM}\|$
- θ = est l'angle entre le vecteur $\vec{OM}$ et l'axe z.
- φ : est l'angle entre la projection du vecteur $\vec{OM}$ dans le plans (x, y) et l'axe des X.

- La base : $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$

. La relation avec les coordonnées cartesiennes :

$$\begin{cases} x = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = r \cdot \cos\theta \end{cases}$$

θ = angle colatitude

φ : angle Azimute ou bien longitude.

. vecteur position :

$$\vec{OM} = r \cdot \vec{e_r}$$

. deplacement élémentaire :

$$\vec{dl} = d\vec{OM} = dr\,\vec{e_r} + r\,d\theta\,\vec{e_\theta} + r\sin\theta\, d\varphi \cdot \vec{e_\varphi}$$

. volume élémentaire :

$$\boxed{dV = r^2 \sin\theta \, dr . d\theta . d\varphi}$$

5. Equations aux dimensions :

5-1 : Rappel :

Système international (SI) ou système (MKSA).

Il comporte 7 unité de base :

1) le mètre (m) : unité de la longeur.

2) le kilogramme (kg) : " " " masse.

3) la seconde (s) " " du temps.

4) L'ampère (A) " de l'intensité du courant électrique.

5) le kelvin (K) : unité de mesure de la température $T(K) = T(°C) + 273,16$.

6) La candéla (cd) : unité de mesure de l'intensité lumineuse.

7) le mole (Mole) : unité de mesure de la quantité de matière.

Les autres unités formées à partir des unité de base sont appelées : unités secondaires ou unités dérivées.

5 - 2 - Définition :

Une équation aux dimension est de déterminer pour chaque grandeur physique sa dimension en fonction des sept Unité de Base du S.I.

. Notation :

1) la longeur → L . 2) la masse → M

3) Le temps → T . 4) l'intensité de courant → I . 5) La température → Θ .

6) quantité de matière → N.

7) L'intensité lumineuse → J .

. La dimension d'une grandeur physique G est noté : [G] .

5 - 3 : propriétés :

Soit A, B et C trois grandeurs physiques.

1) $C = A + B \Rightarrow [C] = [A] = [B]$.

2) $C = A \cdot B \Rightarrow [C] = [A] . [B]$.

3) $C = \frac{A}{B} \Rightarrow [C] = \frac{[A]}{[B]} = [A] . [B]^{-1}$

4) $C = \frac{\alpha}{A} \Rightarrow [C] = [\alpha] . [A]^{-1} = [A]^{-2}$. $[\alpha] = 1$.

Scanned by Gen Scanner

5-4 = Calcule d'équations aux dimensions :

a- force . $F = m \cdot a \Rightarrow [F] = [m] \cdot [a]$.

$$[F] = [m] \left[\frac{d}{t^2}\right] = [m]\,[d]\,[t]^{-2}.$$

$$[F] = M \cdot L \cdot T^2$$, Son unité : $kg \cdot m \cdot s^{2}$.
= Newton.

b. La pression : $p = \frac{F}{S} \Rightarrow [P] = [F] \cdot [S]^{-1}$

$$[P] = M L T^{-2} L^{-2} = M L^{-1} T^{-2}$$

unité = $kg \cdot m^{-1} s^{-2} \Rightarrow$ pascal.

Energie cinétique :

$$Ec = \frac{1}{2} m v^2.$$

$$[Ec] = \left[\frac{1}{2}\right] \cdot [m] \cdot [v]^2 = [m] \cdot \frac{[d]^2}{[t]^2}.$$

$[Ec] = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$. Unité = $kg\, m^2 s^{-2} \Rightarrow$ joule.

exercice : Donner l'équation aux dimension de :

$$X = A \sin(Bt^2) + ct.$$

tableaux des multiples et sous multiples.

multiples.

Nom	valeur
déca	10^1
hecto	10^2.
kilo	10^3
Méga	10^6
giga	10^9
téra	10^{12}.

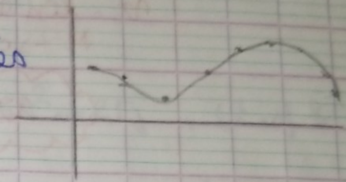
sous - multiples

Nom	valeur
pico	10^{-12}.
nano	10^{-9}
micro	10^{-6}
milli	10^{-3}
centi	10^{-2}.
déci	10^{-1}
fento	10^{-15}

repère qui peut être fixe (absolu) ou mobile (relatif).
Il existe plusieurs type de mouvement : rectiligne, curviligne, circulaire, elliptique ... etc.

4 - la trajectoire :

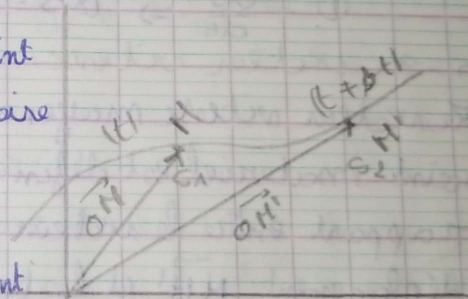
L'ensemble des position géometrique occupé par un point materiel au cours du temps represente la trajectoire.



L'ensemble des positions occupées par le point materiel (trajectoire) est appelée : « équation de la trajectoire ».

5 - La vitesse :

5 - 1 - vitesse moyenne :



La vitesse moyenne d'un point materiel le long d'une trajectoire est definie comme la distance parcourir ~~par~~ sur la trajectoire, ~~par~~ entre un instant « t » est un instant « t + Δt » devisé par le temps de parcours

$$v_m = \frac{\overset{\frown}{MM'}}{\Delta t}$$

on peut l'exprimer en fonction des abcisses curviligne

$$v_m = \frac{S_2 - S_1}{\Delta t} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

5-2- vitesse instantanée :

Elle est obtenue en réduisant le temps de déplacement Δt à une valeur proche de Zéro de telle sorte à considérer que le point $M'(S_2)$ est presque collé à $M_1(S_1)$.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}$$

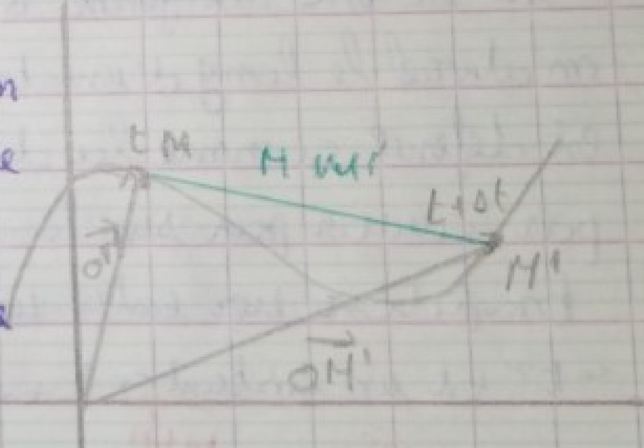
$$v = \frac{dS}{dt}$$

• Equation de la trajectoire :

$$v = \frac{dS}{dt} \Rightarrow dS = v \cdot dt \Rightarrow S(t) = \int v \cdot dt.$$

5-3- vecteur vitesse :

Le vecteur vitesse moyenne d'un point materiel est défini par le rapport entre le vecteur déplacement $\overrightarrow{MM'}$ et le temps de deplacement « Δt ».



on écrit : $\vec{v}_m = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$.

$$\vec{v}_m = \frac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{OM}(t+\Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t}.$$

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \overrightarrow{OM}}{\Delta t}.$$

Scanned by Gen Scanner

5-4- vecteur vitesse instantanée :

Il correspond à la limite du vecteur vitesse moyenne lorsque le temps de deplacement est proche de zéro.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{OM}}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

exp : $\vec{OM} = \vec{r} = (2t+1)\vec{i} + (5t^2 - 2)\vec{j} + (t-1)\vec{k}$

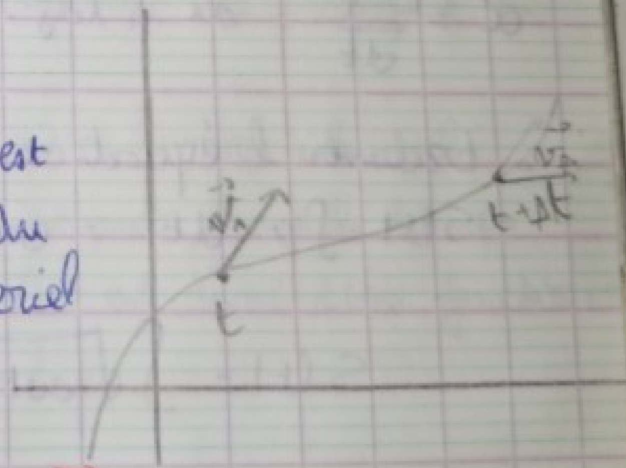
$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{i} + 10t\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

6- Accélération :

6-1 : accélération moyenne :

Le vecteur accélération moyenne est défini comme la variation du vecteur vitesse du point materiel en fonction du temps :



$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v_2} - \vec{v_1}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$$

6-2- Accélération instantanée :

elle est défini comme la limite du vecteur accélération moyenne lorsque le temps de deplacement Δt tendier zéro

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad . \quad \vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = \frac{d^2x}{dt}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt}\vec{k}$$

• Suite de l'exp :

$$\vec{v} = 2\vec{i} + 10t\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 0\vec{i} + 10\vec{j} + 0\vec{k} = 10\vec{j}$$

• trouver l'équation de la trajectoire.

$S(t) = \int v \,.\, dt$ · on a : $v = \sqrt{4 + 100t^2 + 1} = \sqrt{100t^2 + 5}$

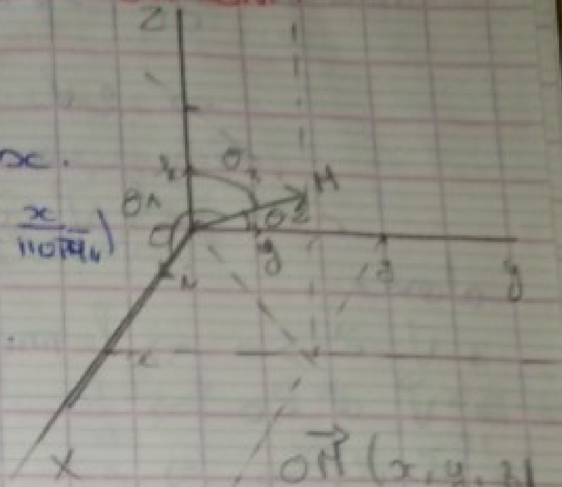
$$S(t) = \int \sqrt{100t^2 + 5} \,.\, dt$$

Le cosinus directeur du vecteur $\vec{OH}$ sont :

* $\vec{OH} \cdot \vec{i} = \|\vec{OH}\| \cdot \|\vec{i}\| \cdot \cos\theta$ (avec $\|\vec{i}\| = 1$)

$\vec{OH} \cdot \vec{i} = x \cdot 1 + y \cdot 0 + z \cdot 0 = x$

$\cos\theta_1 = \frac{x}{\|\vec{OH}\|} \Rightarrow \theta_1 = \arccos\left(\frac{x}{\|\vec{OH}\|}\right)$



* $\vec{OH} \cdot \vec{j} = \|\vec{OH}\| \cdot \|\vec{j}\| \cdot \cos\theta_2$

$\vec{OH} \cdot \vec{j} = y \Rightarrow \cos\theta_2 = \frac{y}{\|\vec{OH}\|}$

de même : $\cos\theta_3 = \frac{z}{\|\vec{OH}\|} \Rightarrow \theta_3 = \arccos\left(\frac{z}{\|\vec{OH}\|}\right)$

$\vec{OH}(x, y, z)$
$\vec{i}(1, 0, 0)$
$\vec{j}(0, 1, 0)$
$\vec{k}(0, 0, 1)$

7- Nature du mouvement :

un mouvement peut être uniforme, accéléré ou décéléré. cela dépend de la vitesse de l'objet en mouvement.

* pour un mouvement accéléré, le module de la vitesse et une fonction croissante dans le temps

$\Rightarrow$ par conséquent le carré $\|\vec{v}\|^2$ est aussi une fonction croissante dans le temps.

Remarque :

sens de variation d'une fonction

$f'(x) > 0 \Rightarrow f$ croissante.

$f'(x) < 0 \Rightarrow f$ decroissante.

$f'(x) = 0 \Rightarrow$ Extremum

alors : $\frac{d\|\vec{v}\|^2}{dt} > 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} > 0$

$$\Rightarrow 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} > 0 \Rightarrow \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} > 0.$$

$$\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{a} > 0$$

alors :

- $\vec{v} \cdot \vec{a} > 0 \Rightarrow$ le mouvement est accéléré
- $\vec{v} \cdot \vec{a} < 0 \Rightarrow$ " " " décéléré
- $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow$ " " " uniforme.

cas particuliers de mouvements.

a) m. v. t rectiligne et uniforme :

$$\begin{cases} a = 0 \\ v = v_0 \quad \text{(constante)} \\ v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int dx = \int v_0 \, dt \Rightarrow x(t) = v_0 t + x_0 \end{cases}$$

b) mouvement rectiligne uniformément accéléré (varié)

$$\begin{cases} a = a_0 \quad \text{constante.} \\ a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \int dv = \int a_0 \, dt \Rightarrow v = a_0 t + v_0 \\ v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int dx = \int v \, dt \Rightarrow x = \int (a_0 t + v_0) \, dt. \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0$$

8 - Expression des vecteurs vitesse et accélération dans les différents systèmes de coordonnée.

8 - 1 : En coordonnée cartésienne

$\vec{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ → vecteur position.

vitesse : $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$.

où : $\vec{v} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k}$

accélération : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}$

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt}\vec{k}$$

où : $\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} + \ddot{z}\,\vec{k}$.

8 - 2 : En coordonnée sylindrique :

En coordonnée sylindrique un point M est représenté par ses coordonnée (ρ, θ, z) dans la Base $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\theta}, \vec{k})$.

vecteur position : $\vec{OM} = \rho\,\vec{e_\rho} + z\,\vec{k}$

vecteur vitesse : $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho\,\vec{e_\rho} + z\,\vec{k})$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(\rho\,\vec{e_\rho}) + \frac{d}{dt}(z\,\vec{k})$$

Rappel :

$\frac{d\vec{e_\rho}}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$

$\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\,\vec{e_\rho}$

$\frac{d\vec{k}}{dt} = 0$

$$\vec{v} = \frac{d\rho}{dt}\cdot\vec{e_\rho} + \rho\cdot\frac{d\vec{e_\rho}}{dt} + \frac{dz}{dt}\cdot\vec{k} + z\cdot\frac{d\vec{k}}{dt}$$

$$\vec{v} = \dot{\rho}\cdot\vec{e_\rho} + \rho\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} + \dot{z}\,\vec{k}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2}$$

Scanned by Gen Scanner

vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{\rho}\,\vec{e_\rho} + \rho\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} + \dot{z}\,\vec{k})$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\dot{\rho}\,\vec{e_\rho}) + \frac{d}{dt}(\rho\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}) + \frac{d}{dt}(\dot{z}\,\vec{k})$$

$$\vec{a} = \ddot{\rho}\,\vec{e_\rho} + \dot{\rho}\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} + \dot{\rho}\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} + \rho\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} - \rho\dot{\theta}^2\,\vec{e_\rho} + \ddot{z}\,\vec{k}$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\,\vec{e_\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\,\vec{e_\theta} + \ddot{z}\,\vec{k}$$

$$\|\vec{a}\| = a = \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})^2 + \ddot{z}^2}$$

Cas particulier coordonnées polaire :

Dans ce cas on remplace z par « 0 ».

$$\vec{v} = \dot{\rho}\,\vec{e_\rho} + \rho\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}.$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\,\vec{e_\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\,\vec{e_\theta}.$$

8-3 : En coordonnée sphérique :

$M(r, \theta, \varphi)$. $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$

vecteur position : $\vec{OM} = r\,\vec{e_r}$.

vecteur ~~position~~ vitesse :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{e_r}) = \frac{dr}{dt}\vec{e_r} + r\cdot\frac{d\vec{e_r}}{dt}$$

Rappels : $\frac{d\vec{e_r}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{e_r}}{d\theta}}_{\vec{e_\theta}} \cdot d\theta + \underbrace{\frac{d\vec{e_r}}{d\varphi}}_{\sin\theta \vec{e_\varphi}} \cdot d\varphi$ → à revoir

$$\begin{cases} (\cos f)' = -f' \sin f \\ (\sin f)' = f' \cos f \end{cases}$$

$$\vec{v} = \dot{r} \cdot \vec{e_r} + r \cdot d\theta \cdot \vec{e_\theta} + r \cdot \sin\theta \cdot d\varphi \cdot \vec{e_\varphi}$$

$$\vec{v} = \dot{r} \cdot \vec{e_r} + r \cdot d\theta \cdot \vec{e_\theta} + r \cdot \sin\theta \cdot d\varphi \cdot \vec{e_\varphi}$$

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e_r} + r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{e_\theta} + r \cdot \sin\theta \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{e_\varphi}$$

vecteur accélération : à calculer

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{d}{dt}(\dot{r} \vec{e_r}) + \frac{d}{dt}(r \cdot \dot{\theta} \vec{e_\theta}) + \frac{d}{dt}(r \cdot \dot{\varphi} \sin\theta \vec{e_\varphi})$$

Rappels :

En coordonnées sphériques (r, θ, φ), la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$ → $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\vec{e_r} = \sin\theta \cdot \cos\varphi \vec{i} + \sin\theta \cdot \sin\varphi \vec{j} + \cos\theta \vec{k}$$

$$\vec{e_\theta} = \cos\theta \cdot \cos\varphi \vec{i} + \cos\theta \cdot \sin\varphi \vec{j} - \sin\theta \cdot \vec{k}$$

$$\vec{e_\varphi} = -\sin\varphi \vec{i} + \cos\varphi \vec{j}$$

$[\sin f(x)]' = f'(x)\cdot\cos f(x)$.

$[\cos f(x)]' = -f'(x)\sin f(x)$

$$\vec{a} = \ddot{r}\vec{e_r} + \dot{r}\frac{d\vec{e_r}}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e_\theta} + r\ddot{\theta}\vec{e_\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} + \dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e_\varphi} + r\ddot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e_\varphi} + r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e_\varphi} + r\dot{\varphi}\sin\theta\frac{d\vec{e_\varphi}}{dt} \quad \text{--- (I)}$$

* $\frac{d\vec{e_r}}{dt} = \dot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e_\varphi}$ ..... (1)

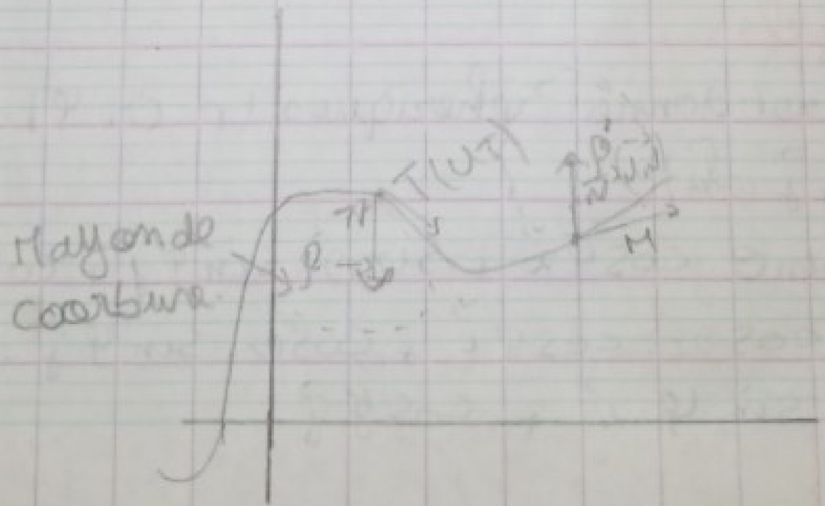
* $\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e_r} + \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e_\varphi}$ ..... (2)

* $\frac{d\vec{e_\varphi}}{dt} = -\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e_r} - \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e_\theta}$ ..... (3)

on injectant (1), (2) et (3) dans (I) on obtient l'expression finale de l'accélération en coordonnées sphérique.

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)\vec{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta)\vec{e_\theta} + (2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta)\vec{e_\varphi}$$

3-4- coordonnées intrinsèque : Repère de Fresnet.



Dans le cas des mouvements plan A un mouvement curviligne, on associe une base attaché à la position du point materiel elle est constituée de deux vecteurs de base : $\vec{U_T}$ ($\vec{T}$), tangent à la courbe et orienté dans le sens du mouvement. Un vecteur $\vec{U_n}$ ($\vec{N}$) perpendiculaire à $\vec{U_T}$ ($\vec{T}$) est orienté vers le centre de la courbure. On défini le Rayon de courbure, comme la distance entre le point M ~~est le point~~ et le centre de la courbure Relation entre les ~~vect~~ vecteurs de base : $\vec{T} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$, $\vec{N} = \rho \cdot \frac{d\vec{T}}{dt}$.

• La vitesse : La vitesse est tengentielle : elle est toujour orientée suivant $\vec{U_T}$ ($\vec{T}$).

$$\vec{v} = v\,\vec{T} = \frac{ds}{dt}\cdot\vec{T} \qquad \vec{v_N} = 0$$

• L'accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\cdot\vec{T}) = \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{T} + v\cdot\frac{d\vec{T}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = v\cdot\frac{\vec{N}}{\rho}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + v\cdot v\cdot\frac{\vec{N}}{\rho}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}\vec{T} + v^2\cdot\frac{\vec{N}}{\rho}$$

Scanned by Gen Scanner

accéleration congentielle : $\gamma_t = \frac{dv}{dt}T = \frac{d^2s}{dt}$.

" Normale : $\gamma_n = \frac{v^2}{\rho}$

Exercice :

Un mouvement plans d'un point materiel est donnée par les expressions $\begin{cases} x = 2\cos wt \\ y = 2\sin wt \end{cases}$

① Donner l'équation de la trajectoire ainsi que sa nature

② calculer les vecteurs vitesse et accélération.

③ calculer le module de la vitesse, deduire les accélération normale et tengentielle ainsi que le rayon de courbature.

Correction :

① $\begin{cases} x^2 = 4\cos^2 wt \quad ...① \\ y^2 = 4\sin^2 wt \quad ...② \end{cases}$ $① + ② = x^2 + y^2 = 4$.

c'est un mouvement circulaire de centre : (0.0) et de rayon : 2.

$R = 2$.

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}$$

$\vec{v} = -2w\sin wt \cdot \vec{i} + 2w \cdot \cos wt\,\vec{j}$.

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -2w^2\cos wt\,\vec{i} - 2w^2 \cdot \sin wt\,\vec{j}$.

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{4w^2 \sin^2 wt + 4w^2 \cos^2 wt}$$
$$= 2w\sqrt{1} = 2w.$$

$$\vec{a}_T = \vec{\gamma}_t = \frac{dv}{dt}\vec{T} \Rightarrow \gamma_t = a_t = \frac{d(2w)}{dt} = 0.$$

$$\gamma_t = 0$$

$$\vec{\gamma} = \vec{a} = a_t \vec{T} + a_N \cdot \vec{N}$$
$$= \gamma_t \vec{T} + \gamma_n \cdot \vec{N}$$
$$\vec{\gamma} = \gamma_n \vec{N} \quad \text{car } \gamma_t = 0$$

$$\gamma_n = \|\vec{\gamma}\| = \sqrt{4w^4\cos^2 wt + 4w^4 \sin^2 wt} = 2w^2\sqrt{1} = 2w^2.$$

$$\gamma_n = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{\gamma_n} = \frac{4w^2}{2w^2} = 2.$$

$$\gamma_n = 2$$

9. Changement de référentiel

9.1. Introduction

Nous allons abordé dans cette section la question de changement de référentiel. Il s'agit d'étudier le mouvement d'un point materiel par rapport à deux type de referentiel : . referentiel fixe dit : « Absolu »
. " en mouvement dit : « Relatif »

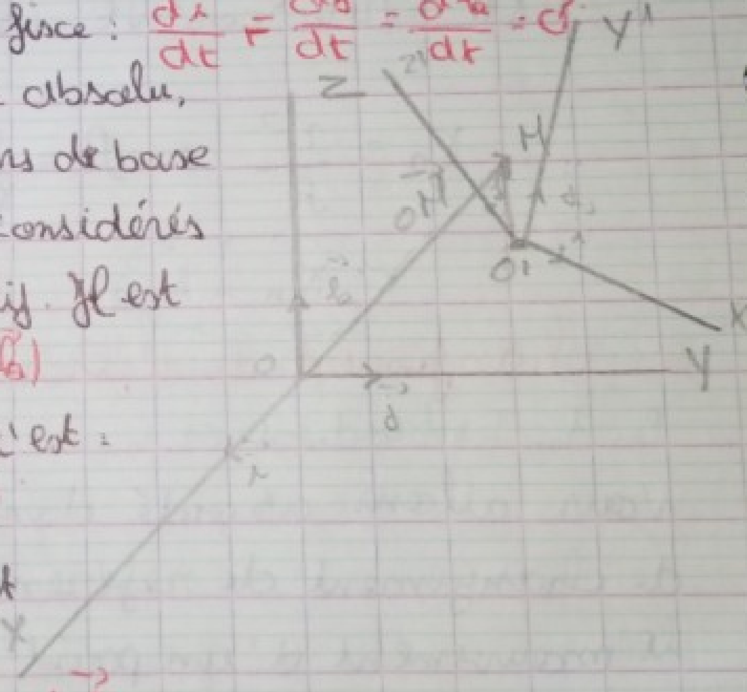
Notre but est de determiner les grandeurs physiques de la cinématique ($\vec{v}$, $\vec{a}$, trajectoire, vecteur position..) dans chacun des deux référentiels et de trouver le liens entres ces grandeurs physique lorsqu'on passe d'un référentiel à un autre.

1.2. Référentiel absolu et Référentiel relatif:

Un référentiel est dit absolu lorsque son origine et ses vecteurs de base sont supposé être fixe. Il est noté: $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le vecteur position donné par:

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont supposés fixe: $\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}$



contrairement au repére absolu, l'origine O' et les vecteurs de base $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$, ne sont pas considérés fixe dans le repére relatif. Il est noté par: $R'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$

Le vecteur position dans R' est:

$$\vec{O'M'} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$$

Les vecteurs de base ne sont pas fixes:

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} \neq \vec{0}, \quad \frac{d\vec{j}'}{dt} \neq \vec{0}, \quad \frac{d\vec{k}'}{dt} \neq \vec{0}$$

9.3. Loi de composition des vitesse :
Dans le référentiel absolu, la vitesse absolue est défini :

$$\vec{v}_a = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{OO'} + \vec{O'M}).$$

$$\vec{v}_a = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + \frac{d}{dt}(x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'}).$$

$$\vec{v}_a = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + \frac{dx'}{dt}\vec{i'} + x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\cdot\vec{j'} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\cdot\vec{k'}$$

$$+ z'\cdot\frac{d\vec{k'}}{dt}.$$

$$\vec{v}_a = \underbrace{\frac{d\vec{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}}_{\text{vitesse d'entrainement } \vec{v_e}} + \underbrace{\frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\cdot\vec{k'}}_{\text{vitesse relatif } \vec{v_r}}.$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

avec : La vitesse d'entrainement

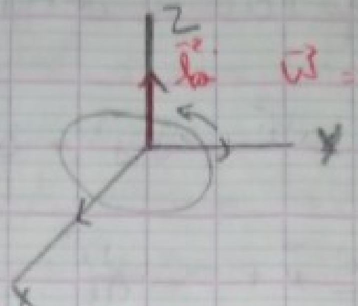
$$\vec{v}_e = \underbrace{\frac{d\vec{OO'}}{dt}}_{\text{translation}} + \underbrace{x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}}_{\text{partie rotation}}$$

. vitesse relative :

$$\vec{v}_r = \frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'}.$$

Expressions en fonction de la vitesse de rotation des axes.

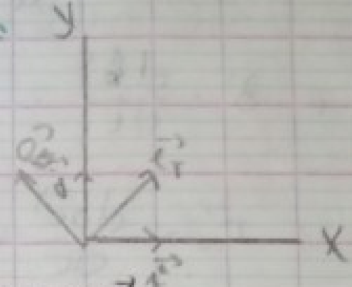
Rappels : vecteur vitesse de rotation $\vec{W} = \omega \cdot \vec{u}$



$\vec{W} = \omega \cdot \vec{k_0}$

- $\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{w} \wedge \vec{u}$

Démonstration :



$\vec{e_r} = \cos\theta\, \vec{i} + \sin\theta\, \vec{j}$

$$\frac{d\vec{e_r}}{dt} = \frac{d\vec{e_r}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\left(-\sin\theta\, \vec{i} + \cos\theta\, \vec{j}\right)$$

$$= -\omega \sin\theta\, \vec{i} + \omega \cos\theta\, \vec{j} \quad \text{....} \ (1)$$

d'antre part :

$$\vec{w} \wedge \vec{e_r} = \omega \vec{k} \wedge \left(\cos\theta\, \vec{i} + \sin\theta\, \vec{j}\right) = \omega \cdot \cos\theta\, \vec{j} - \omega \sin\theta\, \vec{i} \quad (2)$$

$(1) = (2) \Rightarrow \frac{d\vec{e_r}}{dt} = \vec{w} \wedge \vec{e_r}$.

Dans ce cas la vitesse d'entraînement s'écrit :

$$\cancel{\vec{v_e} = \frac{d\vec{OO'}}{dt}}$$

$$\vec{v_e} = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + x'(\vec{w} \wedge \vec{i'}) + y'(\vec{w} \wedge \vec{j'}) + z'(\vec{w} \wedge \vec{k'})$$

$$\vec{v_e} = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + \vec{w} \wedge (\underbrace{x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'}}_{\vec{O'M}})$$

$$\vec{v_e} = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + \vec{w} \wedge \vec{O'M}$$

• Cas particulières.

* cas d'une translation sans rotation : $\vec{\omega} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v_e} = \frac{d\vec{OO'}}{dt}$

* cas d'une rotation sans translation : $\frac{d\vec{OO'}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v_e} = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$.

9-4- Loi de composition des accélérations :

$$\vec{v_a} = \vec{v_e} + \vec{v_r}$$

$$\vec{v_a} = \underbrace{\frac{d\vec{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i}}{dt} + y'\frac{d\vec{j}}{dt} + z'\frac{d\vec{k}}{dt}}_{\vec{v_e}} + \underbrace{\frac{dx'}{dt}\vec{i} + \frac{dy'}{dt}\vec{j} + \frac{dz'}{dt}\vec{k}}_{\vec{v_r}}$$

Par définition : $\vec{a_a} = \frac{d\vec{v_a}}{dt}$.

$$\vec{a_a} = \frac{d^2\vec{OO'}}{dt} + \frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i}}{dt} + x'\frac{d^2\vec{i}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\cdot\frac{d^2\vec{j}}{dt} + y'\frac{d^2\vec{j}}{dt}$$
$$+ \frac{dz'}{dt}\cdot\frac{d^2\vec{k}}{dt} + z'\frac{d^2\vec{k}}{dt} + \frac{d^2x'}{dt}\vec{i} + \frac{dx'}{dt}\cdot\frac{d\vec{i}}{dt} +$$
$$\frac{d^2y'}{dt}\vec{j} + \frac{dy'}{dt}\cdot\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{d^2z'}{dt}\cdot\vec{k} + \frac{dz'}{dt}\cdot\frac{d\vec{k}}{dt}.$$

$$\vec{a_a} = \underbrace{\frac{d^2\vec{OO'}}{dt} + x'\frac{d^2\vec{i}}{dt} + y'\frac{d^2\vec{j}}{dt} + z'\frac{d^2\vec{k}}{dt}}_{\vec{a_e}} + \underbrace{\frac{d^2x'}{dt}\vec{i} + \frac{d^2y'}{dt}\vec{j} + \frac{d^2z'}{dt}\vec{k}}_{\vec{a_r}} + \underbrace{2\left[\frac{dx'}{dt}\cdot\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\cdot\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\cdot\frac{d\vec{k}}{dt}\right]}_{\vec{a_c}}$$

avec :

$\vec{a_e}$ = accélération d'entrainement.

$$\vec{a_e} = \frac{d^2\vec{OO'}}{dt} + x'\frac{d^2\vec{i}}{dt} + y'\frac{d^2\vec{j}}{dt} + z'\frac{d^2\vec{k'}}{dt}.$$

$\vec{a_r}$ = accélération relative :

$$\vec{a_r} = \frac{d^2x'}{dt}\vec{i} + \frac{d^2y'}{dt}\vec{j} + \frac{d^2z'}{dt}\vec{k}.$$

$\vec{a_c}$ = accélération de coriolis :

$$\vec{a_c} = 2\left[\frac{dx'}{dt}\cdot\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\cdot\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\cdot\frac{d\vec{k'}}{dt}\right]$$

$$\vec{a_a} = \vec{a_e} + \vec{a_r} + \vec{a_c}$$

- Expression en fonction de $\vec{w}$:

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{w}\wedge\vec{i} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{w}\wedge\vec{j} \cdot \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{w}\wedge\vec{k}.$$

$$\frac{d^2\vec{i}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{i}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\vec{w}\wedge\vec{i}) = \frac{d\vec{w}}{dt}\wedge\vec{i} + \vec{w}\wedge\frac{d\vec{i}}{dt}.$$

$$= \frac{d\vec{w}}{dt}\wedge\vec{i} + \vec{w}\wedge(\vec{w}\wedge\vec{i}).$$

- accélération d'entrainement :

$$\vec{a_e} = \frac{d^2\vec{OO'}}{dt} + \frac{d\vec{w}}{dt}\wedge x'\vec{i} + \vec{w}\wedge(\vec{w}\wedge x'\vec{i}) + \frac{d\vec{w}}{dt}\wedge y'\vec{j}$$

$$+ \vec{w}\wedge(\vec{w}\wedge y'\vec{j}) + \frac{d\vec{w}}{dt}\wedge z'\vec{k'} + \vec{w}\wedge(w\wedge z'\vec{k'}).$$

$$\vec{a_e} = \frac{d^2\vec{OO'}}{dt} + \frac{d\vec{W}}{dt}\wedge(x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k'}) + \cancel{\vec{w}}\wedge$$

$$\vec{w}\wedge(w\wedge(x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k'})).$$

Scanned by Gen Scanner

$$\vec{a_e} = \frac{d^2\vec{OO'}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{O'M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{O'M})$$

- accélération de coriolis :

$$\vec{a_c} = 2\left(\frac{dx'}{dt}\cdot(\vec{\omega}\wedge\vec{i'}) + \frac{dy'}{dt}\cdot(\vec{\omega}\wedge\vec{j'}) + \frac{dz'}{dt}(\vec{\omega}\wedge\vec{k'})\right)$$

$$= 2\left[\vec{\omega}\wedge\frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \vec{\omega}\wedge\frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \vec{\omega}\wedge\frac{dz'}{dt}\vec{k'}\right].$$

$$= 2\vec{\omega}\wedge\underbrace{\left(\frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'}\right)}_{\vec{v_r}}.$$

$$\Rightarrow \vec{a_c} = 2\vec{\omega}\wedge\vec{v_r}$$

cas particulier : cas d'un mouvement de translation du repère relatif $\vec{\omega} = \vec{0}$.

$$\vec{a_e} = \frac{d^2\vec{OO'}}{dt} \; ; \; \vec{a_c} = \vec{0}$$

$$\vec{a_a} = \vec{a_e} + \vec{a_r}$$

I Information :

Ce principe (2ème) est valable uniquement si la masse de l'objet est constante. Dans le cas contraire « m » n'est pas constante.

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ avec $\vec{p}$: quantité de mouvement.

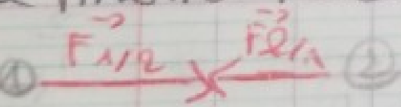
$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$.

$$\vec{F} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt} \cdot \vec{v} + \left\{ m \frac{d\vec{v}}{dt} \right\} m\vec{a}$$

$$\sum \vec{F} = \frac{dm}{dt} \cdot \vec{v} + m \cdot \vec{a}.$$

4-3 Troisième loi de Newton : principe de l'action et la réaction :

Dans un référentiel Galiléen, si un objet ① excerc un force $\vec{F}_{1/2}$ sur un objet ② ce dernier excerce lui aussi une force $\vec{F}_{2/1}$ sur l'objet ①. Cette force est sur la même droit d'action de même module mais dans le sens opposé.



$$\|\vec{F}_{1/2}\| = \|\vec{F}_{2/1}\|$$

$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1} \Rightarrow \vec{F}_{1/2} + \vec{F}_{2/1} = \vec{0}$$

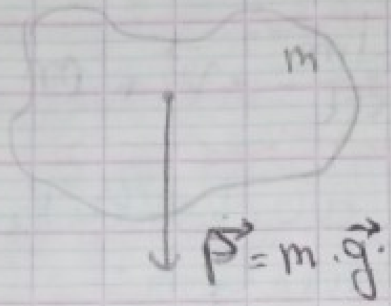
5 - Cas particulier de force :

5 - 1 : Le poids (champ de la

Le poids « P » d'un objet de masse « m » correspond à l'action qu'excerce la terre sur cet objet à traverse le champs de la pesenteur des terre $\vec{g}$. Il est calculé à travers la formule:

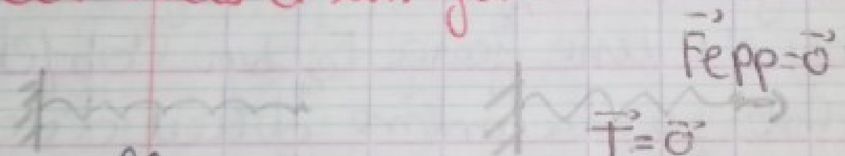
$$\vec{P} = m . \vec{g}$$

$\vec{g}$: est applée aussi : accélération de la pesenteur. son unité $(m.s^{-1})$. La force de poids $\vec{P}$ est toujour orientée de l'objet vers le centre de la terre.

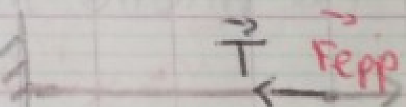


5 - 2 : tension d'un fil ou d'un ressorte :

a. cas d'un fil :



Fil libre.
$\vec{T} = \vec{0}$

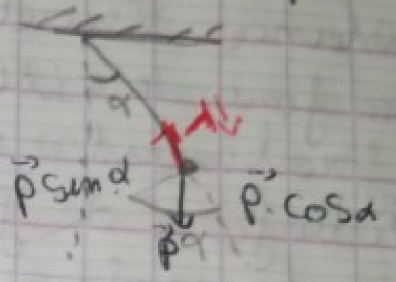


l'orsque un opperateur agit sur l'extrimité d'un fil accroché à un mur. En position tendue. le fil répond à l'action de l'opperateur par une force applé « Tension du fill » Cette force de tension possède le même module et la même direction que la force l'opperateur mais dans le sens opposé son role est de maintenir le système fil opperatair en equilibre.

$$\vec{F}_{app} = -\vec{T} \quad \text{avec} : \|\vec{T}\| = \|\vec{F}_{app}\|$$

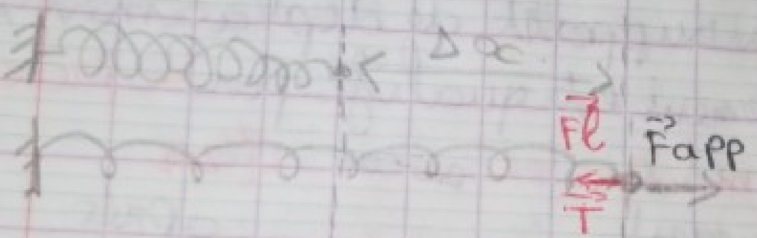
$$\vec{F}_{app} + \vec{T} = 0$$

a) cas d'un pendul :



$$\vec{T} + \vec{P}\cos α = 0$$

b) cas d'un ressort :



$Δx = l - l_0$ allongement

Dans le cas d'un ressort, la force de l'opperateur conduit est défini comme la force ressort. la tension du ressort $\vec{T}$ est défini comme la force de répons du ressort à l'action de l'opperateur. Elle est proportionnelle à l'allongement $Δx = l - l_0$ subit par le ressort. on écrit :

$$T = k \cdot Δx \cdot \vec{v}$$

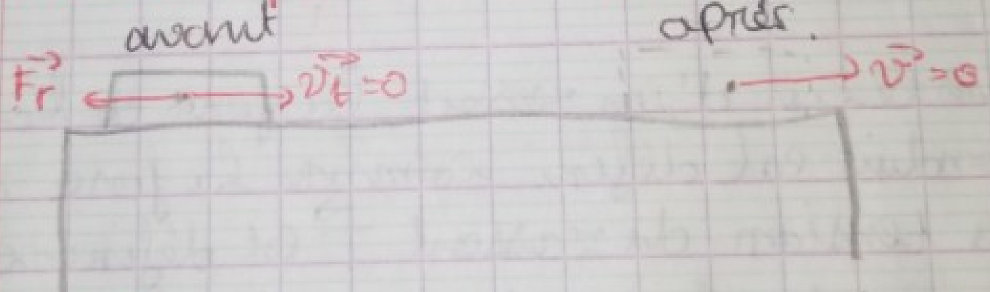
. k = est appelé constante de raideur du ressort.

I-3 : Force de Frottement.

Experience 01 :

Si un objet est lancé avec une vitesse $\vec{v}$ sur une surface horizental, $\vec{F_r} = m.\vec{a}$ cette objet s'arretera aprés avoir parcouru une certain distance. L'arret de l'objet est provoqué par une force de résistance applée « force de frotement » qui s'oppose à son mouvement.

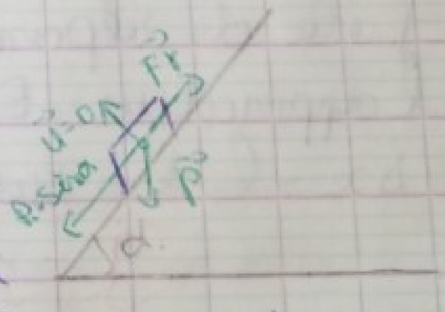
Cette force de frotement est du au contact entre la surface de l'objet avec la surfac horizontale du support de deplacement, ce type de frottement est qualifé par « procade frottement cinitique ». ~~avait~~ = $\vec{F_r}$



Exercice 02 :

l'orsqu'un objet suspendu sur une surface incliree.

$(\vec{v} = \vec{0})$ celui-ci est maintenu à sa position garce à une force de frottement qui



s'oppose aux autres forces qui tentent le faire glisser l'objet vers le bas, cette force de frottement est dite « force de frottement statique » elle est due à la surface de contact entre l'objet et le plan incliné.

• Coefficient de frottement statique et de coefficient de frottement cinétique :

1- Coefficient de frottement statique :

Experience : Un objet de masse m est placé sur un $\vec{F}$ parallèle à l'horizontale.

① si $\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \sum \vec{F} = m.\vec{a} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \underbrace{\vec{P} + \vec{N}}_{=\vec{0}} + \vec{F} + \vec{Fr} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{F} + \vec{Fr} = \vec{0} \quad \Rightarrow \vec{Fr} = 0$$

② $\vec{F} \neq \vec{0}$ ⇒ mais $\vec{F}$ suffisament faible provoque l'objet commence à se déplacer.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \sum \vec{F} = \vec{0} \text{ (l'objet est immobile)}$$

$$\underbrace{\vec{P} + \vec{N}}_{=\vec{0}} + \vec{F} + \vec{Fr} = \vec{0} \quad ; \quad \vec{Fr} = -\vec{F} \Rightarrow \|\vec{Fr}\| = \|\vec{F}\|$$

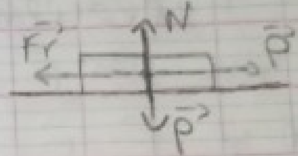
③ $\vec{F} \neq \vec{0}$ et on augmente $\vec{P}$ jusqu'à on atteint une valeur limite au delà de laquelle l'objet va commencer à se déplacer. La force de frottement observé à cette limite est applée « Force de frottement maximale ».

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{0} \;:\; \underbrace{\vec{P} + \vec{N}}_{=0} + \vec{F} + \vec{Fr}_{s\,max} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{Fr}_{s\,max} = -\vec{F}$$

on défini le coeficient de frottement statique par :

$$U_s = \frac{\vec{Fr}_{max}}{N} \Rightarrow \vec{F}_{r\,max} = U_s \cdot N \Rightarrow N = P$$

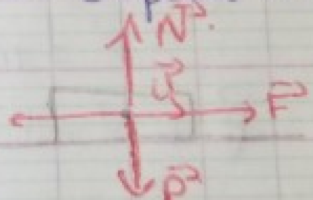


Remarque :

La valeur du coeficient de frottement statique dépond de la nature de la surface de contact.

2. coeficient de frottement cinitique :

- $\vec{F} > \vec{Fr}_{max}$: l'objet commence à se déplacé avec une accélération $\vec{a}$.



- on diminue la force appliqué jusqu'à ce que $\vec{F} = \vec{F}_{r\,max}$ l'objet continue à se déplacer
- on diminue encor la force appliquée jusqu'à des valeur : $\vec{F} < \vec{F}_{r\,max}$: l'objet continue encore à

se déplacer.

l'explication : Aprés le démarrage de l'objet les frottement statique disparaisse et remplacée par des frottement ~~statique dis~~ cinétique si l'objet continue à se déplacer même lorsque $\vec{F} < \vec{F}_{r\,max}$

Sela signifique que les frottement cinétique sont moins importants les frottement statique.

On defini ainsi le coeficient de frottement cinétique par :

$U_c = \frac{Fr^c}{N}$ $\Rightarrow$ $Fr^c = M_c\ U_c \cdot N$ $N = P$

plan

Exo :

Un bloc de poids 50 N et placé sur une horizental. surface horizontale. on applique une force $\vec{F}$ parallèle à l'horizontal.

a) si $\vec{F} = 20N$ et l'objet reste immobile, calculer la force de frottement résultante $\vec{F}_{rs}$.

b) L'objet se met en mouvement lorsque ~~Fattient~~ $\vec{F}$ atteint 40 N. que vaut le coeficient de frottement. U_s.

c) L'objet continue à se déplacer même si appliquée et ramnulé à 32 N que vaut U_a.

26-11-2017

6. Les forces d'inertie :

Les lois de Newton sont des loi physique Applicable dans tous les référentielle gallielien. Si le référentiel n'est pas galléléen, ces lois pleuvent toujour s'appliquer à condition d'apporter quelque correction suplimentaire applées « forces d'inertié ».

forces d'inertie : Les forces d'inertie c'est des forces fictives qui agissant sur un objet lorsqu'il est observés dans un référentiel non galléleen. Elles ne sont pas La résultante qu'une ~~intecti~~ iteraction physique mais dûes à l'inertie de l'objet.

Remarque :

Les forces d'inertie ne peuvent pas être observées dans un référentiel galléléen.

* Eprission des forces d'inertie :

d'aprés La 2 en loi de Newton (PFD) dans un référentiel galleléen, on a : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_{absolu}$ ....(I)

or dans un référentiel relatife, comment peut-mon ecrire cette loie ? $m \cdot \vec{a}_r = ?$

D'aprés la loi de composition des accélérations

$$\vec{a}_0 = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c \quad \text{.....(II)}$$

on remplacant (II) dans (I) on trouve :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}_r + m\vec{a}_e + m\vec{a}_c$$

$$m\vec{a}_r = \sum \vec{F}_{ext} - \underbrace{m\vec{a}_e}_{\vec{F}_{ie}} - \underbrace{m\vec{a}_c}_{\vec{F}_{ic}}$$

$$m \cdot \vec{a}_r = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$$ avec :

$\vec{F}_{ie} = - m\vec{a}_e$; force d'inertie d'entrainement

$\vec{F}_{ic} = - m\,\vec{a}_c$; force d'inertie coriolis.

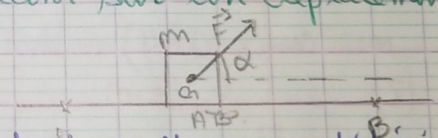
Chapitre 04 : Travail et énergie.

1 - Introduction :

Dans cette partie du programme, nous allons nous ~~etre~~ intéressé à l'étude des résultats de l'action d'une force sur un objet. Ce résultat est connu sous le nom du « travail d'une force ». Nous allons aussi introduire la notion de l'énergie potentielle et sa relation avec le travail d'une force. Enfin nous allons introduire les notion d'énergie cinétique et énergie mécanique et voir comment utiliser cette dernier (énergie mécanique) dans la résolution des problème de mécanique classique sans passer par les lois de Newton.

2 - travail d'une force :

2-1 : cas d'une force constant sur un déplacement réctiligne :



considérant une force $\vec{F}$ constante agissant sur un objet de masse m considéré comme un point materiel « G ».

L'objet et astreint à se deplacer sur un segment de déplacement de droite AB (vecteur de déplacement $\vec{AB}$)

par définition, le travail de la force $\vec{F}$ le long de trajet

$\vec{AB}$ est défini par le produit scalaire :

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB}$$ $$W_{A\to B}(\vec{F}) = F \cdot AB \cdot \cos\alpha$$

cas particulier $\alpha = 0$ ($\vec{AB} \parallel \vec{F}$) $\Rightarrow W_{A\to B}(\vec{F}) = F \cdot AB$

son unité dans le SI : est le joule (J).

Il éxiste 3 situation différente pour le calcul du travail :

①: $\vec{F} \perp \vec{AB} \Rightarrow W_{A\to B}(\vec{F}) = 0 \Rightarrow \vec{F}$ ne contribue pas au déplacement de l'objet.

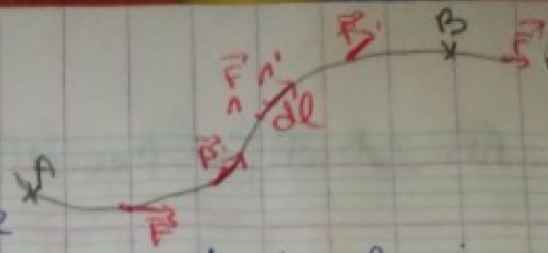
②: $W_{A\to B}(\vec{F}) < 0 \Rightarrow \vec{F}$ est dit : force de résistance.

③: $W_{A\to B}(\vec{F}) > 0 \Rightarrow \vec{F}$ est dit : force motrice.

2.2 : Cas d'une force varriable sur une trajectoire quelconique :

Dans le cas de présence d'une force varriable ($\vec{F}$ peut changer de module ou la direction ou les deux à la fois) sur une trajectoire curviligne quelconque, l'application ~~de la~~ de la loie précédente n'est pas possible.

Scanned by Gen Scanner



pour pouvoir calculer le travail de la force le longe du trajet AB, nous allons considérer plusieur déplacements élémentaire $d\vec{l}$ qui donneront leu chacun à un travail élémentaire «dW» durant le deplacement $d\vec{l}$, on suppose que $\vec{F}$ est parallele de à $d\vec{l}$ et $\vec{F}$ constante. de la on défini le travail élémentaire dl par: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{l}$

Remarque :

le produit scalaire $\vec{F} \cdot d\vec{l}$ est appler aussi. circulation du vecteur $\vec{F}$ sur le deplacement dl de (MM')

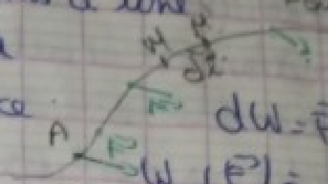
pour calculer le travail global accompli par la force $\vec{F}$ le long du trajet AB, on effectue une somme intgral sur tous ces travaux élémentairs dW entre A et B :

$$\boxed{dW_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}}$$

3 - Exemple de calcule de travail :

3 - 1 - Cas où la force est constante :

Dans le cas où l'objet est soumis à une force constante, le calcule du travail fourni par cette force devient :



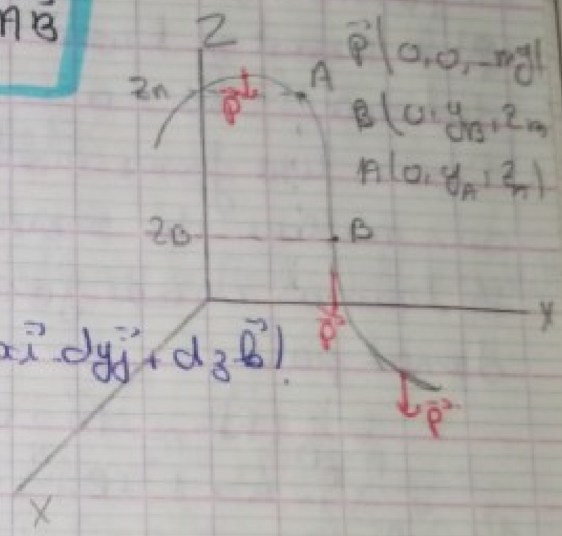
$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = \vec{F}\int_A^B d\vec{l}$$

$d W = \vec{F}\cdot d\vec{l}$

$W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l}$

$$\Rightarrow \boxed{W_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\vec{AB}}$$

Exemple : $\vec{F} = \vec{P}$



$\vec{P}(0, 0, -mg)$

$B(0, y_B, z_B)$

$A(0, y_A, z_A)$

$$W_{A\to B}(\vec{P}) = \int_A^B \vec{P}\cdot d\vec{l}$$

$$= \int_A^B (0\vec{i} + 0\vec{j} - mg\vec{k})(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k})$$

$$= \int_A^B -mg\, dz$$

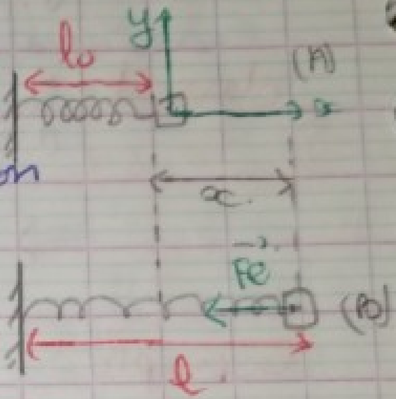
$$= -mgz\Big|_A^B = -mg(z_B - z_A)$$

$$W_{A\to B}(\vec{P}) = mg(z_A - z_B)$$

exercice (TAF) : calculer le travail de la force.
$\vec{F} = x^2\vec{i} + 2yx\vec{i} + (z+1)\vec{k}$.
entres les points A(1, 1, 1) et B(2, 3, 1) donner en cordonnées cartésiennes.

2 - cas de la force élastique : $\vec{F} = \vec{F_e} = -k(x)\vec{i}$

Considerons un ressort constante de raideur k accroché à une masse m. en position (B) horizentales A la position (B) le ressort se trouve alonger d'une distance $l - l_0 = x$.



Donc, une force élastique est produite au niveau du ressort. $\vec{Fe} = -kx.\vec{i}$

Le travail de cette force ~~est produite au~~ elastique est donné par :

$$W_{A\to B}(\vec{F_e}) = \int_A^B \vec{Fe}\cdot d\vec{l}$$

$$= \int_A^B (-kx\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k})(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}).$$

$$= \int_A^B -kx\,dx = -k\int_A^B x\,dx = -k\frac{1}{2}x^2\Big|_A^B$$

$$= -\frac{1}{2}k(x_B^2 - x_A^2).$$

$$W_{A\to B}(\vec{Fe}) = -\frac{1}{2}k(x_B^2 - x_A^2).$$

3 - Puissance d'une force :

La puissance d'une force $\vec{F}$ est définie comme le travail accomplit par cette force pendant une durée t déterminée. Alors, durant un temps élémentaire dt, la puissance produite par une force $\vec{F}$ sera donnée par :

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt}} \quad \text{or} : \; dW = \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$\Rightarrow \boxed{P = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

L'unité de la puissance dans le SI est le watt ($kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}$).

Remarque :

On peut calculer le travail d'une force à partir de sa puissance. $P = \frac{dW}{dt} \Rightarrow dW = P \, dt$

$$\Rightarrow W(\vec{F}) = \int_{t_1}^{t_2} P \cdot dt$$

ou bien $W(\vec{F}) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} \cdot dt$.

4- Energie cinetique.

4-1: Notion de l'énergie cinétique :

Considérons un point materiel, de masse m évaluant dans un référentiel gallellen R.
D'aprés la 2em loie de Newton l'accéleration de ce point material est liée diractement à la somme des forces exterieurs qui agissent sur ce point.

$$dW = \vec{F}ext \cdot \vec{dl}$$

si on multiplée les deux cotés de l'équation (1) par $\vec{dl}$ on obtient :

$$\sum \vec{F}ext \cdot \vec{dl} = m \cdot \vec{a} \cdot \vec{dl}$$

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{dl} = m \cdot d\vec{v} \cdot \vec{v} = \sum \vec{F}ext \cdot dl$$

si on integre les deux cotés de l'équation entre deux points A et B.

$$\int_{v_A}^{v_B} m \cdot \vec{v} \cdot d\vec{v} = \int_A^{\vec{B}} \sum \vec{F}ext \cdot \vec{dl}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 \Big|_{v_A}^{v_B} = \sum \int_A^B \vec{F}ext \cdot dl$$

$$\boxed{\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = \sum_{A \to B} W(\vec{F}ext)}$$

Le terme : $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ est applé énergie cinétique du point materiel

Théorème de l'énergie cinétique :

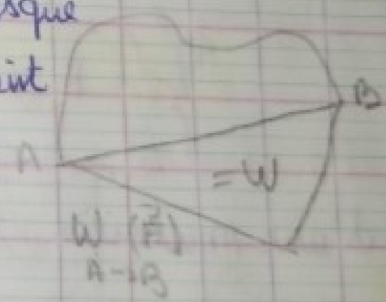
Dans un référentiel galliléen, la variation de l'energie cinétique d'un objet (point materiel) de masse m entre deux point A et B est égale à la somme des travaux éffectués entre A et B par les forces exterieures qui agissent sur cet objet (point materiel).

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum W_{A \to B} (\vec{F}_{ext})$$

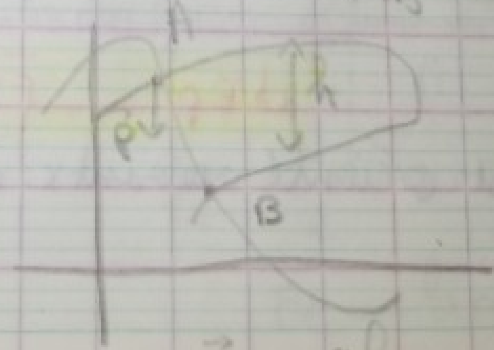
5 - Energie potentielle :

5-1 : Notion de la forces conservative qui dérivent d'un potentiel :

Une force $\vec{F}$ est dite conservative lorsque le travail de cette force entre deux point distincts A et B ne ~~doit~~ dépend pas du chemin suivant.



Exemple : le poids



$W_{A \to B}(\vec{P}) = mgh$

Dans le cas contraire, le travail dépend du chemin ~~suivant~~ suivit, on dit que la force est non conservative.

Exemple : de forces non conservatives : les frottements.

4-2 : Energie potentielle :

par définition, le travail des forces conservatives peut s'exprimer à partir d'une fonction d'état appelée « Energie potentielle Ep » dont la variation entre l'état final et l'état initial est égale à l'opposé du travail des ces forces conservatives.

$$\Delta E_p = E_p(B) - E_p(A) = -W_{A\to B}(\vec{F}^c_{ext})$$

Ce qui se traduit par :

$$E_p(B) - E_p(A) = -\int_A^B \vec{F}^c_{ext} \cdot d\vec{l}$$

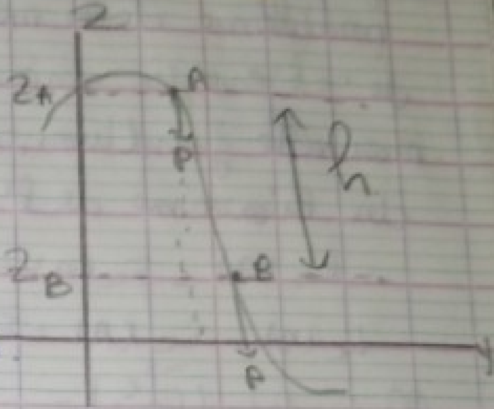
d'une manière instantanée, on écrit :

$$dE_p = -\vec{F}^c_{ext} \cdot d\vec{l}$$

Si $\vec{F}$ est orienté suivant x : $dE_p = -F^c_{ext} \cdot dx \Rightarrow F^c_{ext} = -\frac{dE_p}{dx}$

D'une manière général, une force $\vec{F}$ qui dérive d'un potentiel (force conservative) et reliée à la fonction énergie potentielle par : $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, E_p$

- Cas de la force de poids :



$$\Delta E_p = E_p(B) - E_p(A) = -\int_A^B \vec{P} \cdot d\vec{l}$$

$$= -\int_A^B (-mg\vec{k}) \cdot (dz\,\vec{k})$$

$$= mg\int_A^B dz = mgz\Big|_A^B = mgz_A - mgz_B$$

$$\Delta E_p(\vec{P}) = mg(z_A - z_B) = mgh$$

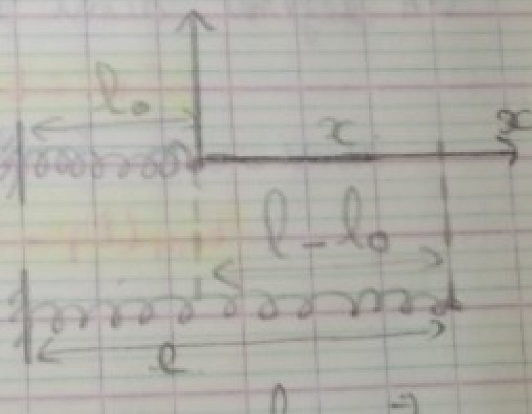
d'une manière générale : ~~$dE_p - \vec{P} \cdot d\vec{l}$~~

$dE_p = -\vec{P} \cdot d\vec{l} \Rightarrow E_p = -\int -mg \cdot dx \Rightarrow E_p = mgz + C$

Aud contraire : $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, E_p$

$$\vec{F} = -\underbrace{\frac{dE_p}{dx}}_{0}\vec{i} - \underbrace{\frac{dE_p}{dy}}_{0}\vec{j} - \frac{dE_p}{dz}\vec{k} = -mg\vec{k} = \vec{P}$$

- Cas de la force élastique :



$$\Delta E_p = E_p(B) - E_p(A) = -\int_A^B \vec{F_e} \cdot d\vec{l} = -\int_A^B -kx\,dx$$

$$= k\int_A^B x\,dx = \frac{1}{2}kx^2\Big|_A^B$$

$$\Rightarrow \Delta E_p = \frac{1}{2}k\left(x_B^2 - x_A^2\right)$$

$\vec{F_e} = -kx \cdot \vec{i}$

6. Energie mécanique :

Nous allons introduire dans cette partie une nouvelle fonction d'energie, très utilisée dans la résolution des problèmes de la mécanique classique, et qui est celle de « l'energie mécanique ». pour introduire cette nouvelle fonction, nous allons commencer à partir du théorème de l'énergie cinétique.

$$E_c(B) - E_c(A) = \sum W_{A\to B}(\vec{F}_{ext})$$

$$E_c(B) - E_c(A) = \sum W_{A\to B}(\vec{F}^{c}_{ext}) + \sum W_{A\to B}(\vec{F}^{NC}_{ext})$$

or : $W_{A\to B}(\vec{F}^{c}_{ext}) = -[E_p(B) - E_p(A)]$.

$$\Rightarrow E_c(B) - E_c(A) = -[E_p(B) - E_p(A)] + \sum W_{A\to B}(\vec{F}^{NC}_{ext})$$

$$\Rightarrow E_c(B) - E_c(A) + E_p(B) - E_p(A) = \sum W_{A\to B}(\vec{F}^{NC}_{ext})$$

$$\Rightarrow [E_p(B) - E_p(A)] - [E_c(A) + E_c(B)] = \sum W_{A\to B}(\vec{F}^{NC}_{ext})$$

On définit ainsi l'énergie mécanique par

$$E_m = E_c + E_p$$

ainsi, on écrit :

$$E_m(B) - E_m(A) = \sum W_{A\to B}(\vec{F}^{NC}_{ext})$$