Université Abderrahmane Mira - Bejaïa
Faculté des Sciences Économiques, Commerciales, et des Sciences de Gestion (FSECSG)
Département des Sciences Économiques

Exercices : Analyse des données (ADD).

Niveau : L3 EA *Semestre : Cinquième (S5)* *Année :24/2025* *Resp. du module :Kebieche.H*

Exercices N°01 (Valeurs propres, vecteurs propres & diagonalisation) :

Trouver les éléments propres (vecteurs propres & valeurs propres) des matrices suivantes. Sont-elles diagonalisables ? Si c'est le cas, déterminer une base de diagonalisation.

$A=\begin{pmatrix}3 & -4\\2 & -6\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & -1\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}3 & 2\\-1 & 0\end{pmatrix}$; $E=\begin{pmatrix}5 & -1\\1 & 3\end{pmatrix}$; $F=\begin{pmatrix}3 & -5\\2 & -3\end{pmatrix}$; $G=\begin{pmatrix}2 & -2\\-2 & 5\end{pmatrix}$; $H=\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 2\end{pmatrix}$; $J=\begin{pmatrix}7 & 3\\3 & -1\end{pmatrix}$

$K=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\0 & 1 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}$; $L=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\3 & -5 & 3\\6 & -6 & 4\end{pmatrix}$; $M=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\7 & -5 & 1\\6 & -6 & 2\end{pmatrix}$; $N=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 2 & -5\\0 & 1 & -2\end{pmatrix}$; $O=\begin{pmatrix}4 & 1 & -1\\2 & 5 & -2\\1 & 1 & 2\end{pmatrix}$; $Q=\begin{pmatrix}11 & -8 & 4\\-8 & -1 & -2\\4 & -2 & -4\end{pmatrix}$

$R=\begin{pmatrix}5 & 4 & 2 & 1\\0 & 3 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 1\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; $S=\begin{pmatrix}-4 & 7 & 1 & 4\\6 & -16 & -3 & -9\\12 & -27 & -4 & -15\\-18 & 43 & 7 & 24\end{pmatrix}$; $T=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 1\\1 & 2 & 1 & 1\\1 & 1 & 2 & 1\\1 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$; $V=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0 & 0 & 0\\1 & 4 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 3 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 3 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$; $W=\begin{pmatrix}4 & 0 & 2 & 0 & 1\\0 & 4 & 0 & 2 & 1\\1 & 0 & 5 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & 5 & 1\\1 & 0 & 2 & 0 & 4\end{pmatrix}$

Énoncé :

Nous avons :

$A=\begin{pmatrix}3 & -4\\2 & -6\end{pmatrix}$ *et* : $(A-\lambda.I_2)=\begin{pmatrix}3-\lambda & -4\\2 & -6-\lambda\end{pmatrix}$ *ainsi* : $det(A-\lambda.I_2)=\begin{vmatrix}3-\lambda & -4\\2 & -6-\lambda\end{vmatrix}=-10+3\lambda+\lambda^2=(\lambda-2)(\lambda+5)$

L'équation $(\lambda-2)(\lambda+5)=0$ a pour solution deux racine : $\lambda_1=2$ et $\lambda_2=-5$ nous déterminons par la suite les vecteurs propres u_1 et u_2 associés respectivement aux valeurs propres λ_1 et λ_2 :

- le vecteur propre associé à la valeur propres $\lambda_1=2$ c'est celui qui vérifie :

$$\begin{pmatrix}1 & -4\\2 & -8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{cases}x-4y=0\\2x-8y=0\end{cases}\iff x-4y=0 \quad \text{soit :} \boldsymbol{u_1=(4,1)}$$

- le vecteur propre associé à la valeur propres $\lambda_2=-5$ c'est celui qui vérifie :

$$\begin{pmatrix}8 & -4\\2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{cases}8x-4y=0\\2x-y=0\end{cases}\iff 2x-y=0 \quad \text{soit :} \boldsymbol{u_2=(\frac{1}{2},1)}$$

Nous avons l'ensemble : $S=\{u_1,u_2\}=\{(4,2),(\frac{1}{2},1)\}$, S est un ensemble maximal de vecteurs propres linéairement indépendants. Et comme S est une base de $\mathbb{R}^2$, *la matrice A est diagonalisable*. En utilisant la base S, A est représentée par la matrice diagonale $D=diag(2,-5)$. Soit P la matrice de colonnes u_1 ; u_2 alors :

$$D=P^{-1}AP=\frac{2}{7}\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\-1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -4\\2 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & \frac{1}{2}\\1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & -5\end{pmatrix}$$

Nous avons :

$B=\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & -1\end{pmatrix}$ *et* : $(B-\lambda.I_2)=\begin{pmatrix}1-\lambda & -1\\2 & -1-\lambda\end{pmatrix}$ *ainsi* : $det(B-\lambda.I_2)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\2 & -1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1$

L'équation $\lambda^2+1=0$ n'a pas de solution sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. Et comme cette équation n'a pas de racines réelles, la matrice B en tant que matrice réelle représentant une transformation linéaire sur $\mathbb{R}^2$, n'a ni valeurs propres ni vecteurs propres. Ainsi, la matrice B n'est pas diagonalisable.

Nous avons :

$C=\begin{pmatrix}3 & 2\\-1 & 0\end{pmatrix}$ *et* : $(C-\lambda.I_2)=\begin{pmatrix}3-\lambda & 2\\-1 & -\lambda\end{pmatrix}$ *ainsi* : $det(C-\lambda.I_2)=\begin{vmatrix}3-\lambda & 2\\-1 & -\lambda\end{vmatrix}=2-3\lambda+\lambda^2=(\lambda-2)(\lambda-1)$

L'équation $(\lambda-2)(\lambda-1)=0$ a pour solution deux racine : $\lambda_1=2$ et $\lambda_2=1$ nous déterminons par la suite les vecteurs propres u_1 et u_2 associés respectivement aux valeurs propres λ_1 et λ_2 :

- le vecteur propre associé à la valeur propres $\lambda_1=2$ c'est celui qui vérifie :

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{cases}x+2y=0\\-x-2y=0\end{cases}\iff x+2y=0 \quad \text{soit :} \boldsymbol{u_1=(-2,1)}$$

- le vecteur propre associé à la valeur propres $\lambda_2 = 1$ c'est celui qui vérifie :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow -x - y = 0 \quad \text{soit :} \boldsymbol{u_2 = (-1, 1)}$$

Nous avons l'ensemble : $S = \{u_1, u_2\} = \{(-2, 1), (-1, 1)\}$, S est un ensemble maximal de vecteurs propres linéairement indépendants. Et comme S est une base de $\mathbb{R}^2$, *la matrice C est diagonalisable*. En utilisant la base S, C est représentée par la matrice diagonale $D = diag(2, 1)$. Soit P la matrice de colonnes u_1 ; u_2 alors :

$$D = P^{-1}CP = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous avons :

$$E = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \; et : (E - \lambda.I_2) = \begin{pmatrix} 5 - \lambda & -1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} \; ainsi : det(E - \lambda.I_2) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 16 - 8\lambda + \lambda^2 = (\lambda - 4)(\lambda - 4) = (\lambda - 4)^2$$

L'équation $(\lambda - 1)^2 = 0$ a pour solution une racine double : $\lambda = 4$ c'est la seule valeur propre de la matrice E. En retranchant $\lambda = 4$ du diagonal de la matrice E, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x - y = 0 \text{soit :} \boldsymbol{u = (1, 1)}$$

Ce système homogène n'a qu'une seule solution indépendante le vecteur $u = (1, 1)$ qui est un vecteur propres de la matrice E. De plus, comme il n'y a pas d'autres valeurs propres, l'ensemble singleton $S = \{u\} = \{(1, 1)\}$ ne constitue pas une base de $\mathbb{R}^2$, raison pour laquelle la matrice E n'est pas diagonalisable.

Nous avons :

$$F = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \; et : (F - \lambda.I_2) = \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -5 \\ 2 & -3 - \lambda \end{pmatrix} \; ainsi : det(F - \lambda.I_2) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -5 \\ 2 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = 1 + \lambda^2$$

Pour cette équation nous considérons deux cas :

1. F est une matrice sur le corps des nombres réels $\mathbb{R}^2$. Dans ce cas la matrice F n'a pas de valeurs propres ni de vecteurs propre, et donc F n'est pas diagonalisable (le même cas d'ailleurs de la matrice B ci-haut).
2. F est une matrice sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}^2$. Alors $det(F - \lambda.I_2) = (\lambda - i)(\lambda + i)$ a pour solution deux racines i et $-i$.Ainsi, la matrice F possède deux valeurs propres distinctes i et $-i$, et donc, F a deux vecteurs propres indépendants. Par conséquent, il existe une matrice non-singulière P sur le corps complexe $\mathbb{C}^2$ pour laquelle :

$$D = P^{-1}FP = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

La matrice F est, dans ce cas, diagonalisable sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}^2$.

Nous avons :

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \; et : (G - \lambda.I_2) = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -2 & 5 - \lambda \end{pmatrix} \; ainsi : det(G - \lambda.I_2) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = -6 - 7\lambda + \lambda^2 = (\lambda - 6)(\lambda - 1)$$

L'équation $(\lambda - 6)(\lambda - 1) = 0$ a pour solution deux racine : $\lambda_1 = 6$ et $\lambda_2 = 1$ nous déterminons par la suite les vecteurs propres u_1 et u_2 associés respectivement aux valeurs propres λ_1 et λ_2 :

- le vecteur propre associé à la valeur propres $\lambda_1 = 6$ c'est celui qui vérifie :

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} -4x - 2y = 0 \\ -2x - y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow -2x - y = 0 \text{soit :} \boldsymbol{u_1 = (-\frac{1}{2}, 1)}$$

- le vecteur propre associé à la valeur propres $\lambda_2 = 1$ c'est celui qui vérifie :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x - 2y = 0 \text{soit :} \boldsymbol{u_2 = (2, 1)}$$

Nous avons l'ensemble : $S = \{u_1, u_2\} = \{(-\frac{1}{2}, 1), (2, 1)\}$, S est un ensemble maximal de vecteurs propres linéairement indépendants. Et comme S est une base de $\mathbb{R}^2$, *la matrice G est diagonalisable*.De plus la matrice G est une matrice symétrique ce qui fait que les vecteurs propres u_1 et u_2 sont orthogonaux. Et la normalisation de ces deux vecteurs donne les vecteurs orthogonaux :

$$\hat{u}_1 = (\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) \; et : \; \hat{u}_2 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$$

En utilisant la base S, G est représentée par la matrice diagonale $D = diag(2, -5)$. Soit P la matrice orthogonale de colonnes $\hat{u}_1$; $\hat{u}_2$ alors :

$$D = P^{-1}GP = \frac{2}{7} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Nous avons :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \; et : (H - \lambda.I_2) = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ -1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} \; ainsi : det(H - \lambda.I_2) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 4 - 3\lambda + \lambda^2$$

Pour cette équation nous considérons deux cas :

1. H est une matrice sur le corps des nombres réels $\mathbb{R}^2$. Dans ce cas la matrice H n'a pas de valeurs propres ni de vecteurs propre, et donc H n'est pas diagonalisable (le même cas d'ailleurs des matrices B et F ci-haut).
2. H est une matrice sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}^2$. Alors $det(H-\lambda.I_2) = (1-\lambda)(2-\lambda)+2$ a pour solution deux racines $\lambda_1 = \frac{3-i\sqrt{7}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{3+i\sqrt{7}}{2}$.Ainsi, la matrice H possède deux valeurs propres distinctes $\frac{3-i\sqrt{7}}{2}$ et $\frac{3+i\sqrt{7}}{2}$, et donc, H a deux vecteurs propres indépendants. Par conséquent, il existe une matrice non-singulière P sur le corps complexe $\mathbb{C}^2$ pour laquelle :

$$D = P^{-1}HP = \begin{pmatrix} \frac{3-i\sqrt{7}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3+i\sqrt{7}}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice H est, dans ce cas, diagonalisable sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}^2$.

Nous avons :

$J = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ $et : (J-\lambda.I_2) = \begin{pmatrix} 7-\lambda & 3 \\ 3 & -1-\lambda \end{pmatrix}$ $ainsi : det(J-\lambda.I_2) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 3 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -16-6\lambda+\lambda^2 = (\lambda-8)(\lambda+2)$

L'équation $(\lambda-8)(\lambda+2) = 0$ a pour solution deux racine : $\lambda_1 = 8$ et $\lambda_2 = -2$ nous déterminons par la suite les vecteurs propres u_1 et u_2 associés respectivement aux valeurs propres λ_1 et λ_2 :

- le vecteur propre associé à la valeur propres $\lambda_1 = 8$ c'est celui qui vérifie :

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} -x+3y=0 \\ 3x-9y=0 \end{cases} \Longleftrightarrow -x+3y=0 \text{soit } : \boldsymbol{u_1 = (3,1)}$$

- le vecteur propre associé à la valeur propres $\lambda_2 = -2$ c'est celui qui vérifie :

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 9x+3y=0 \\ 3x+y=0 \end{cases} \Longleftrightarrow 3x+y=0 \text{soit } : \boldsymbol{u_2 = (-\frac{1}{3},1)}$$

Nous avons l'ensemble : $S = \{u_1, u_2\} = \{(3,1), (-\frac{1}{3}, 1)\}$, S est un ensemble maximal de vecteurs propres linéairement indépendants. Et comme S est une base de $\mathbb{R}^2$, *la matrice J est diagonalisable.*De plus la matrice J est une matrice symétrique ce qui fait que les vecteurs propres u_1 et u_2 sont orthogonaux. Et la normalisation de ces deux vecteurs donne les vecteurs orthogonaux :

$$\hat{u}_1 = (\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}) \; et : \; \hat{u}_2 = (\frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}})$$

En utilisant la base S, J est représentée par la matrice diagonale $D = diag(8,-2)$. Soit P la matrice orthogonale de colonnes $\hat{u}_1$; $\hat{u}_2$ alors :

$$D = P^{-1}JP = \frac{3}{10}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Nous avons :

$K = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $et : (K-\lambda.I_3) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ $ainsi : det(K-\lambda.I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-1)(-\lambda)$

L'équation $(\lambda-2)(\lambda-1)(-\lambda) = 0$ a pour solution deux racine : $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 0$ nous déterminons par la suite les vecteurs propres u_1 , u_2 et u_3 associés respectivement aux valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 :

- le vecteur propre associé à la valeur propres $\lambda_1 = 2$ c'est celui qui vérifie :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} y-z=0 \\ -y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases} \Longleftrightarrow x=y=z \quad \text{soit } : \boldsymbol{u_1 = (1,1,1)}$$

- le vecteur propre associé à la valeur propres $\lambda_2 = 1$ c'est celui qui vérifie :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ y=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \text{x=y et x=0} \quad \text{soit } : \boldsymbol{u_2 = (-1,1,0)}$$

- le vecteur propre associé à la valeur propres $\lambda_3 = 0$ c'est celui qui vérifie :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x+y-z=0 \\ y+z=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \text{x=-y et z=-y} \quad \text{soit } : \boldsymbol{u_3 = (-1,1,-1)}$$

Nous avons l'ensemble : $S = \{u_1, u_2, u_3\} = \{(1,1,1), (-1,1,0), (-1,1,-1)\}$, S est un ensemble maximal de vecteurs propres linéairement indépendants. Et comme S est une base de $\mathbb{R}^2$, *la matrice K est diagonalisable.* En utilisant la base S, K est représentée par la matrice diagonale $D = diag(2,1,0)$. Soit P la matrice de colonnes u_1 ; u_2 ; u_3 alors :

$$D = P^{-1}KP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Nous avons :

$$L=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & -5 & 3\\ 6 & -6 & 4\end{pmatrix} \; et : (L-\lambda.I_3) = \begin{pmatrix}1-\lambda & -3 & 3\\ 3 & -5-\lambda & 3\\ 6 & -6 & 4-\lambda\end{pmatrix} \; ainsi : det(L-\lambda.I_3) = \begin{vmatrix}1-\lambda & -3 & 3\\ 3 & -5-\lambda & 3\\ 6 & -6 & 4-\lambda\end{vmatrix} = (2+\lambda)^2(4-\lambda)$$

L'équation $(2+\lambda)^2(4-\lambda) = 0$ a pour solution une racine double : $\lambda_1, 2 = -2$,et $\lambda_3 = 4$ nous déterminons par la suite les vecteurs propres u_1 , u_2 et u_3 associés respectivement aux valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 :

- le vecteur propre associé à la valeur propres $\lambda_1, 2 = -2$ c'est celui qui vérifie :

$$\begin{pmatrix}3 & -3 & 3\\ 3 & -2 & 3\\ 6 & -6 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases}3x-3y+3z=0\\ 3x-3y+3z=0\\ 6x-6y+6z=0\end{cases} \Longleftrightarrow y = x+z \quad \text{soit :}\boldsymbol{u_1 = (1,1,0), u_2 = (0,1,1)}$$

- le vecteur propre associé à la valeur propres $\lambda_3 = 4$ c'est celui qui vérifie :

$$\begin{pmatrix}-3 & -3 & 3\\ 3 & -9 & 3\\ 6 & -6 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases}-3x-3y+3z=0\\ 3x-9y+3z=0\\ 6x-6y=0\end{cases} \Longleftrightarrow \text{x=y et z=2y} \quad \text{soit :}\boldsymbol{u_2 = (1,1,2)}$$

Nous avons l'ensemble : $S = \{u_1, u_2, u_3\} = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,1,2)\}$, S est un ensemble maximal de vecteurs propres linéairement indépendants. Et comme S est une base de $\mathbb{R}^3$, *la matrice L est diagonalisable.* En utilisant la base S, L est représentée par la matrice diagonale $D = diag(-2,-2,4)$. Soit P la matrice de colonnes u_1 ; u_2 ; u_3 alors :

$$D = P^{-1}LP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -2 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & -5 & 3\\ 6 & -6 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

Nous avons :

$$M=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 7 & -5 & 1\\ 6 & -6 & 2\end{pmatrix} \; et : (M-\lambda.I_3) = \begin{pmatrix}3-\lambda & -1 & 1\\ 7 & -5-\lambda & 1\\ 6 & -6 & 2-\lambda\end{pmatrix} \; ainsi : det(M-\lambda.I_3) = \begin{vmatrix}3-\lambda & -1 & 1\\ 7 & -5-\lambda & 1\\ 6 & -6 & 2-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(4+\lambda)$$

L'équation $(2-\lambda)^2(4+\lambda) = 0$ a pour solution une racine double : $\lambda_1, 2 = 2$,et $\lambda_3 = 4$ nous déterminons par la suite les vecteurs propres u_1 , u_2 et u_3 associés respectivement aux valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 :

- le vecteur propre associé à la valeur propres $\lambda_1, 2 = 2$ c'est celui qui vérifie :

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 7 & -7 & 1\\ 6 & -6 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases}x-y+z=0\\ 7x-7y+z=0\\ 6x-6y=0\end{cases} \Longleftrightarrow y = x \quad \text{soit :}\boldsymbol{u_1 = (1,1,0)}$$

- le vecteur propre associé à la valeur propres $\lambda_3 = -4$ c'est celui qui vérifie :

$$\begin{pmatrix}7 & -1 & 1\\ 7 & -1 & 1\\ 6 & -6 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases}7x-y+z=0\\ 7x-y+z=0\\ 6x-6y+6z=0\end{cases} \Longleftrightarrow \text{x=0 et y=z} \quad \text{soit :}\boldsymbol{u_2 = (0,1,1)}$$

Nous avons l'ensemble : $S = \{u_1, u_2\} = \{(1,1,0),(0,1,1)\}$, S est un ensemble maximal de vecteurs propres linéairement indépendants.Parce que M possède au plus deux vecteurs propres linéairement indépendants, M n'est pas semblable à une matrice diagonale ; c'est-à-dire que M n'est pas diagonalisable.

Nous avons :

$$N=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -5\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix} \; et : (N-\lambda.I_3) = \begin{pmatrix}3-\lambda & 0 & 0\\ 0 & -3-\lambda & -5\\ 0 & 1 & -2-\lambda\end{pmatrix} \; ainsi : det(F-\lambda.I_2) = \begin{vmatrix}3-\lambda & 0 & 0\\ 0 & -3-\lambda & -5\\ 0 & 1 & -2-\lambda\end{vmatrix} = (3-\lambda)(1+\lambda^2)$$

Pour cette équation nous considérons deux cas :

1. N est une matrice sur le corps des nombres réels $\mathbb{R}^3$. Alors N admet seulement une valeur propre 3. Puisque 3 a seulement un vecteur propre indépendant, N n'est pas diagonalisable.
2. N est une matrice sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}^3$. Alors N admet trois valeurs propres distincts : 3, i et $-i$. Il existe alors une matrice P sur le corps des complexe $\mathbb{C}^3$ pour laquelle :

$$D = P^{-1}NP = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & i & 0\\ 0 & 0 & -i\end{pmatrix}$$

La matrice N est, dans ce cas, diagonalisable sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}^3$.

Nous avons :

$$O=\begin{pmatrix}4 & 1 & -1\\ 2 & 5 & -2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} \; et : (O-\lambda.I_3) = \begin{pmatrix}4-\lambda & 1 & -1\\ 2 & 5-\lambda & -2\\ 1 & 1 & 2-\lambda\end{pmatrix} \; ainsi : det(O-\lambda.I_3) = \begin{vmatrix}4-\lambda & 1 & -1\\ 2 & 5-\lambda & -2\\ 1 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix} = (3-\lambda)^2(5-\lambda)$$

L'équation $(3-\lambda)^2(5-\lambda)=0$ a pour solution une racine double : $\lambda_1, 2=3$,et $\lambda_3=5$ nous déterminons par la suite les vecteurs propres u_1 , u_2 et u_3 associés respectivement aux valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 :

- le vecteur propre associé à la valeur propres $\lambda_1, 2=3$ c'est celui qui vérifie :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+2y-2z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \Longleftrightarrow x+y-z=0 \quad \text{soit : } \boldsymbol{u_1=(-1,1,0), u_2=(1,0,1)}$$

- le vecteur propre associé à la valeur propres $\lambda_3=5$ c'est celui qui vérifie :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} -x+y-z=0 \\ 2x-2z=0 \\ x+y-3z=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \text{x=z et z=2y} \quad \text{soit : } \boldsymbol{u_2=(1,2,1)}$$

Nous avons l'ensemble : $S=\{u_1,u_2,u_3\}=\{(-1,1,0),(1,0,1),(1,2,1)\}$, S est un ensemble maximal de vecteurs propres linéairement indépendants. Et comme S est une base de $\mathbb{R}^3$, *la matrice O est diagonalisable.* En utilisant la base S, O est représentée par la matrice diagonale $D=diag(3,3,5)$. Soit P la matrice de colonnes u_1 ; u_2 ; u_3 alors :

$$D=P^{-1}OP=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Nous avons :

$$\text{Q}=\begin{pmatrix} 11 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix} et : (G-\lambda.I_3)=\begin{pmatrix} 11-\lambda & -8 & 4 \\ -8 & -1-\lambda & -2 \\ 4 & -2 & -4-\lambda \end{pmatrix} ainsi : det(Q-\lambda.I_3)=\begin{vmatrix} 11-\lambda & -8 & 4 \\ -8 & -1-\lambda & -2 \\ 4 & -2 & -4-\lambda \end{vmatrix}=(5+\lambda)^2(16-$$

L'équation $(5+\lambda)^2(16-\lambda)=0$ a pour solution une racine double : $\lambda_1=\lambda_2=-5$ et $\lambda_3=16$ nous déterminons par la suite les vecteurs propres u_1, u_2 et u_3 associés respectivement aux valeurs propres λ_1,λ_2 et λ_3 :

- le vecteur propre associé à la valeur propres $\lambda=-5$ c'est celui qui vérifie :

$$\begin{pmatrix} 16 & -8 & 4 \\ -8 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 16x-8y+4z=0 \\ -8x+4y-2z=0 \\ 4x-2y+Z=0 \end{cases} \Longleftrightarrow z=-4x+2y \text{soit : } \boldsymbol{u_1=(0,1,2), u_2=(1,0,-4)}$$

- le vecteur propre associé à la valeur propres $\lambda=16$ c'est celui qui vérifie :

$$\begin{pmatrix} -5 & -8 & 4 \\ -8 & -17 & -2 \\ 4 & -2 & -20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} -5x-8y+4z=0 \\ -8x-17y-2z=0 \\ 4x-2y-20z=0 \end{cases} \Longleftrightarrow x=4zety=-2z \text{soit : } \boldsymbol{u_3=(4,-2,1)}$$

Nous avons l'ensemble : $S=\{u_1,u_2,u_3\}=\{u_1=(0,1,2),u_2=(1,0,-4),u_3=(4,-2,1)\}$, S est un ensemble maximal de vecteurs propres linéairement indépendants. Et comme S est une base de $\mathbb{R}^3$, *la matrice Q est diagonalisable.*De plus la matrice Q est une matrice symétrique ce qui fait que les vecteurs propres u_1 et u_2, u_3 sont orthogonaux. Et la normalisation de ces deux vecteurs donne les vecteurs orthogonaux :

$$\hat{u}_1=(0,\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5})\ ;\ \hat{u}_2=(\frac{\sqrt{105}}{21},\frac{8\sqrt{105}}{105},-\frac{4\sqrt{105}}{105})\ ;\ \hat{u}_3=(\frac{4\sqrt{21}}{21},-\frac{2\sqrt{21}}{21},\frac{\sqrt{21}}{21})$$

En utilisant la base S, Q est représentée par la matrice diagonale $D=diag(-5,-5,16)$. Soit P la matrice orthogonale de colonnes $\hat{u}_1$; $\hat{u}_2$ alors :

$$D=P^{-1}QP=\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} & 2\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{105}}{21} & -\frac{8\sqrt{105}}{105} & -\frac{4\sqrt{105}}{105} \\ \frac{4\sqrt{21}}{21} & -\frac{2\sqrt{21}}{21} & \frac{\sqrt{21}}{21} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{105}}{21} & \frac{4\sqrt{21}}{21} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{8\sqrt{105}}{105} & -\frac{2\sqrt{21}}{21} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{4\sqrt{105}}{105} & \frac{\sqrt{21}}{21} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$