Exercice 1/

Définition : on dit que A est diagonalisable si elle possède n vecteurs propres u_1, u_2 , ...u_n linéairement indépendants.

Nous

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad (B - \lambda I_3) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$det(B - \lambda I_3) = (2-\lambda)\begin{vmatrix} (1-\lambda) & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & (1-\lambda) \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$det(B - \lambda I_3) = -\lambda(2-\lambda)(1-\lambda) - (2-\lambda) + 1 + (1-\lambda)$$

$$det(B - \lambda I_3) = -\lambda(2-\lambda)(1-\lambda)$$

L'équation $-\lambda(2-\lambda)(1-\lambda)$ a pour solutions les trois racines : $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 1$.

- Les vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_1 = 0$ sont ceux qui vérifient :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

  La solution est $Y = (-y,\ y, -y) = y(-1,\ 1, -1)$. Donc, le vecteur propres associé à la valeur propre $\lambda_1 = 0$ est $u_1 = (-1\ ,\ 1, -1)$.

- Les vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_2 = 2$ sont ceux qui vérifient :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y - z = 0 \\ -y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

  La solution est $Y = (y,\ y,\ y) = y(1,\ 1,\ 1)$. Donc, le vecteur propres associé à la valeur propre $\lambda_1 = 0$ est $u_1 = (1\ ,\ 1,\ 1)$.

- Les vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_2 = 1$ sont ceux qui vérifient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

  La solution est $Y = (-y,\ y,\ 0) = y(-1,\ 1,\ 0)$. Donc, le vecteur propres associé à la valeur propre $\lambda_1 = 0$ est $u_1 = (-1\ ,\ 1,\ 0)$.

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad et \quad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = P^{-1}BP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 2/

On considère le tableau suivant :

	a	***b***	***c***	***d***	***e***	***f***
$\boldsymbol{X_1}$	3	2	5	0	2	0
$\boldsymbol{X_2}$	2	0	0	2	1	1
$\boldsymbol{X_3}$	0	5	2	3	3	5

Chaque individu étant muni du poids $p = \frac{1}{6}$

Question1.- donner la matrice $\boldsymbol{X}$ associée au tableau, puis calculer le centre de gravité $\boldsymbol{g}$ et la matrice $\boldsymbol{Y}$ associée au tableau centré.

Réponse :

Nous avons : $X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ matrice de 8 lignes (individu) et de trois colonnes (variables).

Le centre de gravité $\boldsymbol{g}$ est égal par définition : $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{X^t D 1_n}$ où $\boldsymbol{1_n}$ désigne le vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les coordonnées sont égales à 1 et $\boldsymbol{D}$ la matrice des poids $\boldsymbol{D} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n}} \mathbb{I}_{\boldsymbol{n}}$ $(\mathbb{I}_{\boldsymbol{n}}$ représente la matrice identité avec $n = 8$ dans cette exercices) :

$$\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\bar{X}_1} = 2 \\ \boldsymbol{\bar{X}_2} = 1 \\ \boldsymbol{\bar{X}_3} = 3 \end{pmatrix}$$

La matrice $\boldsymbol{Y}$ associée au tableau centré est définie par : $\boldsymbol{Y = X - 1_n g^t}$ où $y_{ij} = x_{ij} - \bar{X}_j$

$$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (2 \quad 1 \quad 3) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Question2. Soit $\boldsymbol{V}$ la matrice variance-covariance du tableau : $\boldsymbol{V} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 & -2 & -5 \\ -2 & 2 & -2 \\ -5 & -2 & 9 \end{pmatrix}$

Réponse : Par définition la matrice variance-covariance $\boldsymbol{V}$ est une matrice carrée de dimension $(p \times p)$ où : $\boldsymbol{V = Y^tDY = X^tDX - gg^t}$ ou $\boldsymbol{V = \frac{1}{n}Y^tY}$ soit $\boldsymbol{V = \frac{1}{8}Y^tY}$

$$\boldsymbol{V} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 18 & -4 & -10 \\ -4 & 4 & -4 \\ -10 & -4 & 18 \end{pmatrix}$$

Et par simplification : $\boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{6}}\begin{pmatrix} 18 & -4 & -10 \\ -4 & 4 & -4 \\ -10 & -4 & 18 \end{pmatrix} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3}}\begin{pmatrix} 9 & -2 & -5 \\ -2 & 2 & -2 \\ -5 & -2 & 9 \end{pmatrix}$.

- L'*inertie totale* $\boldsymbol{I_g}$ du nuage de points associé au tableau $\boldsymbol{X}$ est la moyenne pondérée des carrés des distances des points au centre de gravité $\boldsymbol{g}$ **:**

$$I_g = \sum_{i=1}^{n} p_i d^2(e_i, g) = \sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{j=1}^{p} (x_{ij} - g)^2 = \sum_{j=1}^{p}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_{ij} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\right)^2\right] = \sum_{j=1}^{p} Var(V_j)$$

$$\mathrm{I}_g = \sum_{j=1}^{3} Var(V_j) = Trace(V) = 3 + \frac{2}{3} + 3 = \frac{20}{3}$$

- Le calcul des valeurs propres $(\lambda_1, \lambda_2\ et\ \lambda_3)$ et des vecteurs propres de la matrice $\boldsymbol{V}$.
  Par définition, les valeurs propres de la matrice $\boldsymbol{V}$ sont les solutions en λ de l'équation
  $$det(V - \lambda I_n) = 0$$
  Et les vecteurs propres correspondants sont les éléments du noyau de $A - \lambda I_n$. Donc, nous avons :
  $$(V - \lambda \mathrm{I}_n) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 & -2 & -5 \\ -2 & 2 & -2 \\ -5 & -2 & 9 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9-\lambda & -2 & -5 \\ -2 & 2-\lambda & -2 \\ -5 & -2 & 9-\lambda \end{pmatrix}$$

  Et : $\qquad det[\alpha.(V - \lambda I_n)] = \alpha.det(V - \lambda I_n)$

Donc on a : $det(V - \lambda I_3) = (9 - \lambda)\begin{vmatrix} (2-\lambda) & -2 \\ -2 & (9-\lambda) \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -5 & (9-\lambda) \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} -2 & (2-\lambda) \\ -5 & -2 \end{vmatrix}$

$$det(V - \lambda I_3) = (2 - \lambda)(9 - \lambda)^2 - 25(2 - \lambda) - 8(14 - \lambda)$$
$$det(V - \lambda I_3) = (2 - \lambda)[(9 - \lambda)^2 - 25] - 8(14 - \lambda)$$
$$det(V - \lambda I_3) = (2 - \lambda)(4 - \lambda)(14 - \lambda) - 8(14 - \lambda)$$
$$det(V - \lambda I_3) = (14 - \lambda)[(2 - \lambda)(4 - \lambda) - 8] = (14 - \lambda)(6 - \lambda)(-\lambda)$$

Cette dernière équation a pour solution :$\lambda_1 = 14$, $\lambda_2 = 6$ et $\lambda_3 = 0$. Et en multipliant chaque valeur propre par $\alpha = \frac{1}{3}$ nous obtenons :

$$\lambda_1 = \frac{1}{3} \times 14 = \frac{14}{3} \qquad et \qquad \lambda_2 = \frac{1}{3} \times 6 = 2$$

- Nous déterminons après, u_1 le vecteur propre de $\boldsymbol{V}$ associé à $\lambda_1 = \frac{14}{3}$ de norme unitaire 1 (normé) qui dirige le premier axe factoriel $(\boldsymbol{F_1})$ et le vecteur propre u_2 de la même matrice associée à la valeur propre $\lambda_2 = 2$ de norme 1 qui dirige le deuxième axe factoriel $(\boldsymbol{F}_2)$:

  Pour $\lambda_1 = \frac{14}{3}$ nous avons $\left(V - \frac{14}{3} I_3\right) u_1 = 0$ et $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & -4 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{3} x_1 - \frac{2}{3} y_1 - \frac{3}{2} z_1 = 0 \\ -\frac{2}{3} x_1 - 4 y_1 - \frac{2}{3} z_1 = 0 \\ -\frac{5}{3} x_1 - \frac{2}{3} y_1 - \frac{5}{3} z_1 = 0 \end{cases}$$

  Nous avons un système de trois équations linéaires qui admet pour solution $x_1 = -z_1$, $y_1 = 0$ et $z_1 = z_1$. Donc le vecteur propre associé à la valeur propre λ_1 est $u_1 = (-1, 0, 1)$.

  Nous procédons au même calcul avec la deuxième valeur propre $\lambda_2 = 2$ où $\left(V - \frac{3}{2} I_3\right) u_2 = 0$ et nous trouverons $u_2 = (1, -1, 1)$ le vecteur propre associé à la deuxième valeur propre λ_2.

Remarque *:il faut que la norme de chaque vecteur qu'elle soit égale à 1, sinon, on divise les composantes de chaque vecteur par la racine carrée de sa norme pour le rendre unitaire.*

Après la normalisation des deux vecteurs on obtient :

$$\boldsymbol{u_1} = (-0{,}70710678\,;\ 0\ ;\ 0{,}70710678\,)$$

$$\boldsymbol{u_2} = (0{,}57735027\,;\ -0{,}57735027\,;\ 0{,}57735027)$$

Question 3.- Les contributions absolues des axes $\boldsymbol{F}_1$ **et** $\boldsymbol{F}_2$ à l'inertie du nuage :

$$cr\left({}^{F_k}/_{I_g}\right) = \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_p} = \frac{\lambda_k}{Trace(V)}$$

$$cr\left({}^{F_1}/_{I_g}\right) = \frac{\lambda_1}{Trace(V)} = \frac{14/3}{20/3} = \frac{14}{20} = \boldsymbol{0,7} \quad et\ \ cr\left({}^{F_2}/_{I_g}\right) = \frac{\lambda_1}{Trace(V)} = \frac{2}{20/3} = \frac{6}{20} = \boldsymbol{0,3}$$

<u>La représentation graphique :</u>

Pour représenter les individus dans le nouveau plan, il suffit de calculer les coordonnées des individus dans les nouveaux axes. Pour obtenir y_{ik}, coordonnée de l'unité e_i sur l'axe F_k on projette orthogonalement le vecteur $\overrightarrow{ge_i}$ sur cet axe et on obtient :

$$y_{ik} = \langle \overrightarrow{ge_i}, \overrightarrow{u_i} \rangle = \boldsymbol{Yu^t}$$

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -0{,}70710678 & 0 & 0{,}70710678 \\ 0{,}57735027 & -0{,}57735027 & 0{,}57735027 \end{pmatrix} \quad et \quad \boldsymbol{u^t} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad\quad\boldsymbol{u_1} & \quad\quad\quad\quad\boldsymbol{u_2} \end{array} \\ \begin{pmatrix} -0{,}70710678 & 0{,}57735027 \\ 0 & -0{,}57735027 \\ 0{,}70710678 & 0{,}57735027 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\boldsymbol{y_{8,3}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0{,}70710678 & 0{,}57735027 \\ 0 & -0{,}57735027 \\ 0{,}70710678 & 0{,}57735027 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.8284 & -1.7321 \\ 1.4142 & 1.7321 \\ -2.8284 & 1.7321 \\ 1.4142 & -1.7321 \\ 0 & 0 \\ 2.8284 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{F_1}$	$\boldsymbol{F_1}$
$\boldsymbol{a}$	-2.8284	-1.7321
$\boldsymbol{b}$	1.4142	1.7321
$\boldsymbol{c}$	-2.8284	1.7321
$\boldsymbol{d}$	1.4142	-1.7321
$\boldsymbol{e}$	0	0
$\boldsymbol{f}$	2.8284	0