Exercice 1/

Définition : on dit que A est diagonalisable si elle possède n vecteurs propres $u_1, u_2, \dots u_n$ linéairement indépendants.

Nous avons :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad et \qquad (A - \lambda I_3) = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$det(A - \lambda I_3) = (3-\lambda)\begin{vmatrix} (3-\lambda) & 1 \\ 2 & (2-\lambda) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & (2-\lambda) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & (3-\lambda) \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$det(A - \lambda I_3) = (3-\lambda)^2(2-\lambda) - 2(3-\lambda) - (2-\lambda) - 2 - 2 - 2(3-\lambda)$$

$$det(A - \lambda I_3) = (3-\lambda)^2(2-\lambda) - (2-\lambda) - 4(4-\lambda)$$

$$det(A - \lambda I_2) = (2-\lambda)[(3-\lambda)^2 - 1] - 4(4-\lambda)$$

$$det(A - \lambda I_3) = (2-\lambda)^2(4-\lambda) - 4(4-\lambda)$$

$$det(A - \lambda I_3) = (4-\lambda)[(2-\lambda)^2 - 4] \quad \Rightarrow \quad det(A - \lambda I_3) = -\lambda(4-\lambda)^2$$

L'équation $-\lambda(4-\lambda)^2 = 0$ a pour solution une racine double $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ et $\lambda_3 = 0$.

- Les vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda = 4$ sont ceux qui vérifient :

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x & -y & +z = 0 \\ -x & -y & +z = 0 \\ 2x & +2y & -2z = 0 \end{cases}$$

La solution est $X = (-y+z, y, z) = y(-1,1,0) + z(1,0,1)$. Les vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2 sont $u_1 = (-1, 1, 0)$ et $u_2 = (1, 0, 1)$.

- Les vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda = 0$ sont ceux qui vérifient :

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x & -y & +z = 0 \\ -x & +3y & +z = 0 \\ 2x & +2y & +2z = 0 \end{cases}$$

La solution est $X = \left(-\frac{1}{2}z, -\frac{1}{2}z, z\right) = z\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$. Le vecteurs propre associé à la valeur propre λ_3 sont $u_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$.

$$P = \begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad et \qquad P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = P^{-1}AP = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 2/

On considère le tableau suivant :

	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{d}$	$\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{g}$	$\boldsymbol{h}$
$\boldsymbol{X_1}$	3	4	1	2	1	0	3	2
$\boldsymbol{X_2}$	3	4	1	2	5	4	3	2
$\boldsymbol{X_3}$	3	1	7	5	3	5	3	5

Chaque individu étant muni du poids $p = \frac{1}{8}$

Question1.- donner la matrice $\boldsymbol{X}$ associée au tableau, puis calculer le centre de gravité $\boldsymbol{g}$ et la matrice $\boldsymbol{Y}$ associée au tableau centré.

Réponse :

Nous avons : $X = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ matrice de 8 lignes (individu) et de trois colonnes (variables).

Le centre de gravité $\boldsymbol{g}$ est égal par définition : $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{X^t D 1_n}$ où $\boldsymbol{1_n}$ désigne le vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les coordonnées sont égales à 1 et $\boldsymbol{D}$ la matrice des poids $\boldsymbol{D} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}} \mathbb{I}_{\boldsymbol{n}}$ ($\mathbb{I}_{\boldsymbol{n}}$ représente la matrice identité avec $n = 8$ dans cette exercices) :

$$\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 7 & 5 & 3 & 5 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\bar{X}_1} = 2 \\ \boldsymbol{\bar{X}_2} = 3 \\ \boldsymbol{\bar{X}_3} = 4 \end{pmatrix}$$

La matrice $\boldsymbol{Y}$ associée au tableau centré est définie par : $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X} - \boldsymbol{1_n g^t}$ où $y_{ij} = x_{ij} - \bar{X}_j$

$$\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}3&3&3\\4&4&1\\1&1&7\\2&2&5\\1&5&3\\0&4&5\\3&3&3\\2&2&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}(2\quad 3\quad 4)=\begin{pmatrix}3&3&3\\4&4&1\\1&1&7\\2&2&5\\1&5&3\\0&4&5\\3&3&3\\2&2&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&3&4\\2&3&4\\2&3&4\\2&3&4\\2&3&4\\2&3&4\\2&3&4\\2&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&-3\\-1&-2&-3\\0&-1&1\\-1&2&-1\\-2&1&1\\1&0&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

Question2. Soit $\boldsymbol{V}$ la matrice variance-covariance du tableau : $\boldsymbol{V}=\frac{3}{2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$

Réponse : Par définition la matrice variance-covariance $\boldsymbol{V}$ est une matrice carrée de dimension $(p\times p)$ où : $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{Y^tDY}=\boldsymbol{X^tDX}-\boldsymbol{gg^t}$ ou $\boldsymbol{V}=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{Y^tY}$ soit $\boldsymbol{V}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}\boldsymbol{Y^tY}$

$$\boldsymbol{V}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1&2&-1&0&-1&-2&1&0\\0&1&-2&-1&2&1&0&-1\\-1&-3&-3&1&-1&1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&-3\\-1&-2&-3\\0&-1&1\\-1&2&-1\\-2&1&1\\1&0&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}12&0&-12\\0&12&-12\\-12&-12&24\end{pmatrix}$$

Et par simplification : $\boldsymbol{V}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}\begin{pmatrix}12&0&-12\\0&12&-12\\-12&-12&24\end{pmatrix}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$**.**

- L'*inertie totale* $\boldsymbol{I_g}$ du nuage de points associé au tableau $\boldsymbol{X}$ est la moyenne pondérée des carrés des distances des points au centre de gravité $\boldsymbol{g}$ **:**

$$I_g=\sum_{i=1}^{n}p_id^2(e_i,g)=\sum_{i=1}^{n}p_i\sum_{j=1}^{p}(x_{ij}-g)^2=\sum_{j=1}^{p}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_{ij}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{ij}\right)^2\right]=\sum_{j=1}^{p}Var(V_j)$$

$$\mathrm{I}_g=\sum_{j=1}^{3}Var(V_j)=Trace(V)=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+3=6$$

- Le calcul des valeurs propres $(\lambda_1,\lambda_2\ et\ \lambda_3)$ et des vecteurs propres de la matrice $\boldsymbol{V}$.
  Par définition, les valeurs propres de la matrice $\boldsymbol{V}$ sont les solutions en λ de l'équation
  $$det(V-\lambda I_n)=0$$
  Et les vecteurs propres correspondants sont les éléments du noyau de $A-\lambda I_n$. Donc, nous avons :
  $$(V-\lambda\mathrm{I}_n)=\frac{3}{2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\frac{3}{2}\begin{pmatrix}1-\lambda&0&-1\\0&1-\lambda&-1\\-1&-1&2-\lambda\end{pmatrix}$$

  Et : $\qquad det[\alpha.(V-\lambda I_n)]=\alpha.det(V-\lambda I_n)$

Donc on a : $det(V-\lambda I_3) = (1-\lambda)\begin{vmatrix}(1-\lambda) & -1 \\ -1 & (2-\lambda)\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}0 & 1-\lambda \\ -1 & -1\end{vmatrix}$

$$det(V-\lambda I_3) = (1-\lambda)^2(2-\lambda) - 2(1-\lambda) = -\lambda(3-\lambda)(1-\lambda)$$

Cette dernière équation a pour solution :$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 0$. Et en multipliant chaque valeur propre par $\alpha = \frac{3}{2}$ nous obtenons :

$$\lambda_1 = \frac{3}{2} \times 3 = \frac{9}{2} \quad et \quad \lambda_2 = \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$$

- Nous déterminons après, u_1 le vecteur propre de $\boldsymbol{V}$ associé à $\lambda_1 = \frac{9}{2}$ de norme unitaire 1 (normé) qui dirige le premier axe factoriel $(\boldsymbol{F_1})$ et le vecteur propre u_2 de la même matrice associée à la valeur propre $\lambda_2 = \frac{3}{2}$ de norme 1 qui dirige le deuxième axe factoriel $(\boldsymbol{F}_2)$:

Pour $\lambda_1 = \frac{9}{2}$ nous avons $\left(V - \frac{9}{2} I_3\right) u_1 = 0$ et $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -3 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1 \qquad\qquad -\frac{3}{2} z_1 = 0 \\ \qquad\qquad -3y_1 - \frac{3}{2} z_1 = 0 \\ -\frac{3}{2} x_1 - \frac{3}{2} y_1 - \frac{3}{2} z_1 = 0 \end{cases}$$

Nous avons un système de trois équations linéaires qui admet pour solution $x_1 = -\frac{1}{2} z_1$, $y_1 = -\frac{1}{2}$ et $z_1 = z_1$. Donc le vecteur propre associé à la valeur propre λ_1 est $u_1 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$.

Nous procédons au même calcul avec la deuxième valeur propre $\lambda_2 = \frac{3}{2}$ où $\left(V - \frac{3}{2} I_3\right) u_2 = 0$ et nous trouverons $u_2 = (1, -1{,}0)$ le vecteur propre associé à la deuxième valeur propre λ_2.

Remarque :*il faut que la norme de chaque vecteur qu'elle soit égale à 1, sinon, on divise les composantes de chaque vecteur par la racine carrée de sa norme pour le rendre unitaire.*

Après la normalisation des deux vecteurs on obtient :

$$\boldsymbol{u_1} = (-0{,}40824829;\ -0{,}40824829\,;0{,}81649658\,)$$

$$\boldsymbol{u_2} = (0{,}70710678\,;\ -0{,}70710678\,;\qquad 0 \qquad)$$

Question 3.- Les contributions absolues des axes $\boldsymbol{F}_1$ **et** $\boldsymbol{F}_2$ à l'inertie du nuage :

$$cr\left({F_k}/{I_g}\right) = \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_p} = \frac{\lambda_k}{Trace(V)}$$

$$cr\left({}^{F_1}\!/_{I_g}\right) = \frac{\lambda_1}{Trace(V)} = \frac{{}^{9}\!/_{2}}{6} = \mathbf{0,75} \qquad et \qquad cr\left({}^{F_2}\!/_{I_g}\right) = \frac{\lambda_1}{Trace(V)} = \frac{{}^{3}\!/_{2}}{6} = \mathbf{0,25}$$

<u>La représentation graphique :</u>

Pour représenter les individus dans le nouveau plan, il suffit de calculer les coordonnées des individus dans les nouveaux axes. Pour obtenir y_{ik}, coordonnée de l'unité e_i sur l'axe F_k on projette orthogonalement le vecteur $\overrightarrow{ge_i}$ sur cet axe et on obtient :

$$y_{ik} = \langle \overrightarrow{ge_i}, \overrightarrow{u_i} \rangle = \boldsymbol{Yu^t}$$

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -0{,}40824829 & -0{,}40824829 & 0{,}81649658 \\ 0{,}70710678 & -0{,}70710678 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad \boldsymbol{u^t} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \qquad\quad \boldsymbol{u_1} & \qquad\qquad \boldsymbol{u_2} \end{array} \\ \begin{pmatrix} -0{,}40824829 & 0{,}70710678 \\ -0{,}40824829 & -0{,}70710678 \\ 0{,}81649658 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\boldsymbol{y_{8,3}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0{,}40824829 & 0{,}70710678 \\ -0{,}40824829 & -0{,}70710678 \\ 0{,}81649658 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.2247 & -0.7071 \\ -3.6742 & -0.7071 \\ 3.6742 & -0.7071 \\ 1.2247 & -0.7071 \\ -1.2247 & 2.1213 \\ 1.2247 & 2.1213 \\ -1.2247 & -0.7071 \\ 1.2247 & -0.7071 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{F_1}$	$\boldsymbol{F_1}$
a	-1.2247	-0.7071
b	-3.6742	-0.7071
c	3.6742	-0.7071
d	1.2247	-0.7071
e	-1.2247	2.1213
f	1.2247	2.1213
g	-1.2247	-0.7071
h	1.2247	-0.7071