Université A. Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie

$1^{\text{ère}}$ année Ingénieurs ST+TM
Année universitaire
2024 / 2025

Examen d'Algèbre 01 : Session normale

Exercice n°1 :(06 pts)

On définit sur $\mathbb{Z}^2$ la relation binaire $\mathcal{R}$ suivante :

$\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{Z}^2 : (a,b)\mathcal{R}(c,d) \Longleftrightarrow \exists k,k' \in \mathbb{Z} : (a-c=2k) \wedge (b-d)=2k'$.

1. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}^2$.
2. Donner les classes d'équivalences des éléments $(0,0)$ et $(1,0)$.

Exercice n°2 :(07 pts)

(1) On considère l'application f définie par :

$$f : \mathbb{R}-\{1\} \longrightarrow A$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{ax+b}{x-1}.$$

Comment doit-on choisir les réels a et b et l'ensemble A pour que f soit bijective ?.

(2) On considère l'application g définie par :

$$g : \mathbb{R}-\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

a.Montrer que g est injective.
b.Calculer $g^{-1}(\{2\})$. g est-elle surjective ?.
c.Déterminer l'ensemble A pour que $g : \mathbb{R}-\{1\} \longrightarrow A$,soit bijective. Donner l'application réciproque g^{-1}.

Exercice n°3 :(05 pts)

Soit P le polynôme défini par :

$$P(z) = z^3 + iz^2 - iz + 1 + i.$$

1. Calculer $P(-1-i)$.
2. Résoudre l'équation $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Questions cours :(02 pts)

1.Une relation binaire non symétrique, est-elle automatiquement antisymétrique ?Justifier.
2.Donner les racines quatrièmes de l'unité (sans calculs).

Bon courage

Université A. MIRA-Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie

Janvier 2025
1ere année Ingénieurs

Corrigé de l'examen d'Algbre 01

Exercice 1. *(06 pts)*
I. On définit sur $\mathbb{Z}^2$ la relation binaire $\Re$ par :

$$\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{Z}^2 : \quad (a,b)\Re(c,d) \Leftrightarrow \exists k,k' \in \mathbb{Z} : (a-c=2k) \wedge (b-d=2k').$$

1. *Montrons que $\Re$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}^2$.*
a) Réflexivité de $\Re$.
Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. Comme $a-a=0=2.0$ et $b-b=0=2.0$, donc $(a,b)\Re(a,b)$, d'où $\Re$ est réflexive.
b) antisymétrie de $\Re$
Soient $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $(a,b)\Re(c,d)$ alors:
$\exists k,k' \in \mathbb{Z}$ *tels que:* $\left\{\begin{array}{l} a-c=2.k \\ \text{et} \\ b-d=2.k' \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} c-a=2.(-k) \\ \text{et} \\ d-b=2.(-k') \end{array}\right. \Longrightarrow (c,d)\Re(a,b)$ *d'où $\Re$ est symétrique.*
c) Transitivité de $\Re$
Soient $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $(a,b)\Re(c,d)$ et $(c,d)\Re(e,f)$. alors $\exists k,k',k'',k''' \in \mathbb{Z}$ tels que
$\left\{\begin{array}{l} a-c=2k \wedge b-d=2k' \\ \text{et} \\ c-e=2k'' \wedge d-f=2k''' \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a-c=2k \wedge c-e=2k'' \\ \text{et} \\ b-d=2k' \wedge d-f=2k''' \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a-e=2(k+k'') \\ \text{et} \\ b-f=2(k'+k''') \end{array}\right. \Longrightarrow$
$(a,b)\Re(e,f)$ d'où $\Re$ est transitive.
Conclusion: de a), b) et c), $\Re$ est une relation d'équivalence.

2. *Les classes d'équivalence:*

$$\begin{array}{rcl} \overline{(0,0)} & = & \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : (a,b)\Re(0,0)\} \\ & = & \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : a-0=2k \wedge b-0=2k'/k,k' \in \mathbb{Z}\} \\ & = & \{(2k,2k') \in \mathbb{Z}^2/k,k' \in \mathbb{Z}\}. \\ \overline{(1,0)} & = & \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : (a,b)\Re(1,0)\} \\ & = & \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : a-1=2k \wedge b-0=2k'/k,k' \in \mathbb{Z}\} \\ & = & \{(2k+1,2k') \in \mathbb{Z}^2/k,k' \in \mathbb{Z}\}. \end{array}$$

Exercice 2. *(07 pts)*

1. Soit l'application $f : \mathbb{R}-\{1\} \longrightarrow \mathbb{A}$ définie par $f(x) = \dfrac{ax+b}{x-1}$.
a. f est injective $\Longleftrightarrow \forall x_1,x_2 \in \mathbb{R}-\{1\} : f(x_1)=f(x_2) \Longrightarrow x_1=x_2$.
Soient $x_1,x_2 \in \mathbb{R}-\{1\}$:

$$\begin{array}{rcl} f(x_1)=f(x_2) & \Longrightarrow & \dfrac{ax_1+b}{x_1-1} = \dfrac{ax_2+b}{x_2-1} \\ & \Longrightarrow & (ax_1+b)(x_2-1) = (ax_2+b)(x_1-1) \\ & \Longrightarrow & (a+b)x_1 = (a+b)x_2 \end{array}$$

donc f est injective $\Longrightarrow a+b \neq 0$.
b. f surjective $\Longleftrightarrow \forall y \in \mathbb{A}, \exists x \in \mathbb{R}-\{1\} : f(x)=y$.
Soit $y \in \mathbb{A}$

$$y = \frac{ax+b}{x-1} \Longrightarrow yx - y = ax + b \Longrightarrow x(y-a) = y+b.$$

par suite,

$$x = \frac{y+b}{y-a}.$$

Donc f est surjective $\Longleftrightarrow \mathbb{A} = \mathbb{R} - \{a\}$.
finalement f est bijective $\Longleftrightarrow (a+b \neq 0) \wedge \mathbb{A} = \mathbb{R} - \{a\}$.

2. Soit l'application $g : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$.
a) Montrons que : g est injective:

$$\begin{aligned} g(x_1) = g(x_2) &\Longrightarrow \frac{2x_1+1}{x_1-1} = \frac{2x_2+1}{x_2-1} \\ &\Longrightarrow (2x_1+1)(x_2-1) = (2x_2+1)(x_1-1) \\ &\Longrightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

donc g est injective.

b. *Calculons $g^{-1}(\{2\})$.*

$$\begin{aligned} g^{-1}(\{2\}) &= \{x \in \mathbb{R} - \{1\} / g(x) \in \{2\}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} - \{1\} / g(x) = 2\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} - \{1\} / \frac{2x+1}{x-1} = 2\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} - \{1\} / \, 2x+1 = 2x-2\} \\ &= \varnothing. \end{aligned}$$

g n'est pas surjective car, car $\nexists x \in \mathbb{R} - \{1\} / g(x) = 2$.

c. *g surjective* $\Longleftrightarrow \forall y \in \mathbb{A}, \exists x \in \mathbb{R} - \{1\} : g(x) = y$.
Soit $y \in \mathbb{A}$

$$y = \frac{2x+1}{x-1} \Longrightarrow yx - y = 2x + 1 \Longrightarrow x(y-2) = y+1.$$

par suite,

$$x = \frac{y+1}{y-2}.$$

Donc g est surjective $\Longleftrightarrow \mathbb{A} = \mathbb{R} - \{2\}$.
L'application réciproque g^{-1}:

$$g^{-1} : \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1\}$$
$$g^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-2}$$

Exercice 3. *(5 pts)*
Soit P le polynome suivant:

$$P(z) = z^3 + iz^2 - iz + 1 + i.$$

1. Calcul de $P(-1-i)$:
$P(-1-i) = (-1-i)^3 + i(-1-i)^2 - i(-1-i) + 1 + i$, *Apres calculs on trouve* $P(-1-i) = 0$.
2. Résolution de l'équation $P(z) = 0$:
d'apres la question précédente $(-1-i)$ est une racine de $P(z)$ alors on peut l'écrire sous la

forme:

$$P(z) = (z + (1 + i))(Az^2 + Bz + C).$$

Apres calculs on obtient: $A = C = 1, B = -1$
Alors $P(z)$ *il s'écrit :*

$$P(z) = (z + (1 + i))(z^2 - z + 1).$$

Par suite,
$P(z) = 0$: *si et seulement si* $(z + (1 + i)) = 0$ *ou* $z^2 - z + 1 = 0$*.......(E)*
Résolution de l'équation (E):
On a $\Delta = -3 = (\pm i\sqrt{3})^2$ *alors les solutions de* $P(z) = 0$ *sont :* $S = \{-1 - i, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\}$.

Les questions de cours:
1. Une relation binaire qui n'est pas symetrique, n'est pas automatiquement antisymtrique, car il existe des relations qui sont symetriques et antisymetriques a la fois comme l'egalite dans $\mathbb{R}$, et il existe aussi celles qui ne sont ni symetriques ni antisymetriques comme la divisibilite dans $\mathbb{Z}$.
2. Les racines quatriemes de l'unite sont: $\{1, -1, i, -i\}$.