Université A. Mira de Bejaia — **Année Universitaire 2024/2025**
Faculté de Technologie — **Session Normale**
Département de Technologie – 1ère Année Tronc Commun Ingénieur

Examen Final de Physique 1

Exercice 1 : (06 points)

On considère un point matériel M en mouvement dans le plan (OXY) muni de la base cartésienne $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Son vecteur position est donné par :

$$\overrightarrow{OM}(t) = (2t+2)\vec{\imath} + \left(\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2}\right)\vec{\jmath}$$

1. Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire de M. Quelle est sa nature ?
2. Calculer les vecteurs vitesse $\vec{v}(t)$ et accélération $\vec{a}(t)$ de M ainsi que leurs modules.
3. Trouver les composante tangentielle a_t et normale a_n de l'accélération de M. En déduire le rayon de courbure R_c de sa trajectoire.
4. Etudier la nature du mouvement de M.
5. Quelle est l'angle β entre les vecteurs vitesse $\vec{v}(t)$ et accélération $\vec{a}(t)$?
6. Donner les composantes du vecteur unitaire $\vec{u}_t$ de la base intrinsèque.

Exercice 2 : (04 points)

Un point matériel M se déplace dans le plan (OXY). Les équations horaires de son mouvement en coordonnées cartésiennes sont données par : $x(t) = t\cos t$; $y(t) = t\sin t$

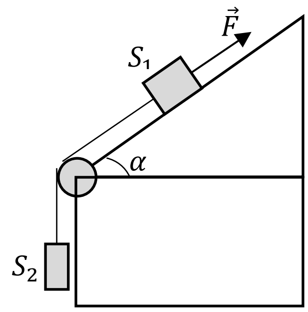
1. Donner les coordonnées polaires (ρ,θ) de M. Déduire l'équation polaire de sa trajectoire (ρ en fonction de θ).
2. Dans la base locale des coordonnées polaires $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\theta)$, écrire le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ et déterminer les vecteurs vitesse $\vec{v}(t)$ et accélération $\vec{a}(t)$ de M ainsi que leurs modules.

Exercice 3 : (03 points)

Io et Europe sont deux lunes de Jupiter. La lune Io suit une orbite circulaire de rayon $R_1 = 4.22\ 10^5\ km$ avec une période $T_1 = 1.77$ jours. La période de la lune Europe est $T_2 = 3.55$ jours. Calculer la masse M_j de Jupiter et le rayon R_2 de l'orbite de la lune Europe. On donne $G = 6.67\ 10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$.

Exercice 4 : (07 points)

Deux corps S_1 et S_2, assimilés à des points matériels, ont les masses suivantes : $m_1 = 5\ kg, m_2 = 3\ kg$. Les corps sont liés par un fil idéal (souple, inextensible et de masse négligeable) passant par une poulie idéale (masse négligeable). Le corps S_1 glisse sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 35°$ par rapport à l'horizontale, sous l'effet d'une force constante $\vec{F}$. Le corps S_1 subit des forces de frottement dont les coefficients statique et cinétique sont respectivement $\mu_s = 0.35$ et $\mu_c = 0.20$ (voir figure ci-contre). On prend $g = 9.81\ m.s^{-2}$.



1. Déterminer la valeur minimale F_{min} de le force F pour que le système reste en équilibre (empêcher S_1 de se déplacer vers le haut).
2. On prend $F = 100\ N$. Calculer l'accélération des deux corps et la tension du fil.

Corrigé de l'examen Final de Physique 1

Exercice 1 : (06 points)

1. L'équation caractéristique de la trajectoire de M :

$$x = 2t + 2 \to t = \frac{x-2}{2} \to y = \frac{1}{8}x^2 \ (\mathbf{0.5})$$

La trajectoire est une parabole $(\mathbf{0.25})$.

2. Les vecteurs vitesse et accélération de M ainsi que leurs modules :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = (2)\vec{\imath} + (t+1)\vec{\jmath} \ (\mathbf{0.5});\ \ v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{t^2 + 2t + 5} \ (\mathbf{0.5})$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\jmath} \ (\mathbf{0.5});\ \ a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 1 \ (\mathbf{0.5})$$

3. Les composantes tangentielle et normale de l'accélération de M :

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+5}} \ (\mathbf{0.5});\ \ a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \frac{2}{\sqrt{t^2+2t+5}} \ (\mathbf{0.5})$$

$$R_c = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(t^2+2t+5)^{\frac{3}{2}}}{2} \ (\mathbf{0.5})$$

4. La nature du mouvement de M : $\vec{a}.\vec{v} = t + 1 > 0$ $(\mathbf{0.5})$. Le mouvement de M est accéléré $(\mathbf{0.25})$.
5. L'angle entre les vecteurs vitesse et accélération :

$$\cos\beta = \frac{\vec{a}.\vec{v}}{a.v} = \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+5}} \ (\mathbf{0.5})$$

6. Les composantes de $\vec{u}_t$:

$$\vec{u}_t = \frac{\vec{v}}{v} = \left(\frac{2}{\sqrt{t^2+2t+5}}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+5}}\right)\vec{\jmath} \ (\mathbf{0.5})$$

Exercice 2 : (04 points)

1. Les coordonnées polaires (ρ, θ) de M :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = t \ (\mathbf{0.5})\ ;\ \ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = t \ (\mathbf{0.25})$$

L'équation polaire de la trajectoire : $\rho = \theta$ $(\mathbf{0.25})$

2. Les vecteurs position $\overrightarrow{OM}(t)$, vitesse $\vec{v}(t)$ et accélération $\vec{a}(t)$ dans la base locale des coordonnées polaires $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$ ainsi que leurs modules :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \rho\vec{e}_\rho = t\vec{e}_\rho \ (\mathbf{0.5})$$

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta = \vec{e}_\theta \;\mathbf{(0.25)}$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{e}_\rho + t\vec{e}_\theta \;\mathbf{(0.5)};\;\; v = \sqrt{v_\rho^2 + v_\theta^2} = \sqrt{1+t^2}\;\mathbf{(0.5)}$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\rho = -\vec{e}_\rho \;\mathbf{(0.25)}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -t\vec{e}_\rho + 2\vec{e}_\theta \;\mathbf{(0.5)}\;;\;\; a = \sqrt{a_\rho^2 + a_\theta^2} = \sqrt{4+t^2}\;\mathbf{(0.5)}$$

<u>Exercice 3 : (03 points)</u>

En se basant sur les données de Io et en utilisant le PFD, nous avons :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \rightarrow \vec{F}_g = M_{Io}\vec{a}\;\mathbf{(0.5)}$$

Lĕtudiant peut utiliser directement la 3ième loi de Kpler sans passer par la démonstration de cette dernière.

Le mouvement de Io est circulaire uniforme ($\vec{a} = \vec{a}_n$). Par conséquent :

$$F_g = M_{Io}a_n \rightarrow G\frac{M_j M_{Io}}{R_1^2} = M_{Io}a_n = M_{Io}\frac{v_1^2}{R_1} = M_{Io}\omega_1^2 R_1 = M_{Io}\frac{4\pi^2}{T_1^2}R_1\;\mathbf{(01)}$$

D’où la masse de Jupiter :

$$M_j = \frac{4\pi^2 R_1^3}{G T_1^2} = 1.90\;10^{27}\;kg\;\mathbf{(0.5)}$$

En se basant sur les données d’Europe, nous obtenons également :

$$M_j = \frac{4\pi^2 R_2^3}{G T_2^2}\;\mathbf{(0.5)}$$

Ce qui donne le rayon de l’orbite de la lune Europe :

$$R_2 = \sqrt[3]{\frac{G M_j T_2^2}{4\pi^2}} = 6.71\;10^5\;km\;\mathbf{(0.5)}$$

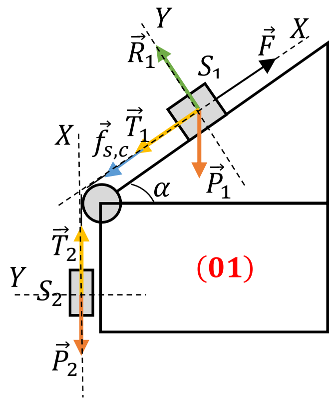
<u>Exercice 4 : (07 points)</u>

1. La valeur minimale F_{min} pour que le système reste en équilibre :

$$\text{Equilibre : } \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \rightarrow \begin{cases} (m_1) :\; \vec{P}_1 + \vec{R}_1 + \vec{T}_1 + \vec{F} + \vec{f}_s = \vec{0} \\ (m_2) :\; \vec{P}_2 + \vec{T}_2 = \vec{0} \end{cases}\;\mathbf{(0.5)}$$

La projection de ces deux équations vectorielles dans le repère cartésien (XY) donne :

$$(m_1) : \begin{cases} (OX) : F - P_{1x} - T_1 - f_s = 0\;(1) \\ (OY) : R - P_{1y} = 0\;(2) \end{cases}\;\mathbf{(0.5)};\;\; (m_1) : \begin{cases} (OX) : T_2 - P_2 = 0\;(3) \\ 0 = 0 \end{cases}\;\mathbf{(0.25)}$$



Les composante du poids : $P_{1x} = m_1 g \sin\alpha$; $P_{1y} = m_1 g \cos\alpha$

La force de frottement statique : $\begin{cases} f_s = \mu_s R \\ R = P_{1y} \end{cases} \rightarrow f_s = \mu_s m_1 g \cos\alpha$ **(0.5)**

La tension du fil : $\begin{cases} (1):\ T_1 = F - P_{1x} - f_s \\ (3):\ T_2 = P_2 \end{cases}$

Fil inextensible et de masse négligeable : $T_1 = T_2$ **(0.25)**

Ce qui donne l'expression de F_{min} :

$$F_{min} = (m_1(\sin\alpha + \mu_s \cos\alpha) + m_2)g = 71.63\ N \ \mathbf{(0.5)}$$

2. On prend $F = 100\ N$. Calculer l'accélération des deux corps et la tension du fil.

Le système va se mettre en mouvement car $F > F_{min}$

$$PFD : \sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \rightarrow \begin{cases} (m_1):\ \vec{P}_1 + \vec{R}_1 + \vec{T}_1 + \vec{F} + \vec{f}_s = m_1 \vec{a}_1 \\ (m_2):\ \vec{P}_2 + \vec{T}_2 = m_1 \vec{a}_2 \end{cases} \mathbf{(0.5)}$$

La projection de ces deux équations vectorielles dans le repère cartésien (XY) donne :

$$(m_1): \begin{cases} (OX) : F - P_{1x} - T_1 - f_s = m_1 a_1\ (1) \\ (OY) : R - P_{1y} = 0\ (2) \end{cases} \mathbf{(0.5)};\ \ (m_1): \begin{cases} (OX) : T_2 - P_2 = m_2 a_2\ (3) \\ 0 = 0 \end{cases} \mathbf{(0.25)}$$

La force de frottement cinétique : $\begin{cases} f_c = \mu_c R \\ R = P_{1y} \end{cases} \rightarrow f_c = \mu_c m_1 g \cos\alpha$ **(0.5)**

La tension du fil : $\begin{cases} (1):\ T_1 = F - P_{1x} - f_c - m_1 a_1 \\ (3):\ T_2 = P_2 + m_2 a_2 \end{cases}$

Fil inextensible et de masse négligeable : $\begin{cases} T_1 = T_2 \\ a_1 = a_2 = a \end{cases}$ **(0.5)**

Ce qui donne l'expression de l'accélération :

$$a = \frac{F - (\sin\alpha + \mu_c \cos\alpha) m_1 g - m_2 g}{m_1 + m_2} \mathbf{(0.5)} = 4.30\ m.s^{-2}\ \mathbf{(0.25)}$$

Par conséquent, la tension du fil est donnée par :

$$T = T_2 = T_2 = P_2 + m_2 a = m_2(a + g) = 42.33\ N\ \mathbf{(0.5)}$$

N.B : La note attribuée aux questions comportant plusieurs parties doit être répartie équitablement entre ces dernières.