

Examen Final de Physique 1

Exercice 1 : (06 points)

On considère un point matériel M en mouvement dans le plan (OXY) muni de la base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j})$. Son vecteur position est donné par :

$$\overrightarrow{OM}(t) = (2t + 2)\vec{i} + \left(\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2}\right)\vec{j}$$

1. Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire de M . Quelle est sa nature ?
2. Calculer les vecteurs vitesse $\vec{v}(t)$ et accélération $\vec{a}(t)$ de M ainsi que leurs modules.
3. Trouver les composante tangentielle a_t et normale a_n de l'accélération de M . En déduire le rayon de courbure R_c de sa trajectoire.
4. Etudier la nature du mouvement de M .
5. Quelle est l'angle β entre les vecteurs vitesse $\vec{v}(t)$ et accélération $\vec{a}(t)$?
6. Donner les composantes du vecteur unitaire $\vec{u}_t$ de la base intrinsèque.

Exercice 2 : (04 points)

Un point matériel M se déplace dans le plan (OXY) . Les équations horaires de son mouvement en coordonnées cartésiennes sont données par : $x(t) = t \cos t$; $y(t) = t \sin t$

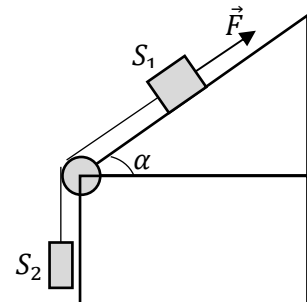
1. Donner les coordonnées polaires (ρ, θ) de M . Déduire l'équation polaire de sa trajectoire (ρ en fonction de θ).
2. Dans la base locale des coordonnées polaires $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$, écrire le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ et déterminer les vecteurs vitesse $\vec{v}(t)$ et accélération $\vec{a}(t)$ de M ainsi que leurs modules.

Exercice 3 : (03 points)

Io et Europe sont deux lunes de Jupiter. La lune Io suit une orbite circulaire de rayon $R_1 = 4.22 \cdot 10^5 \text{ km}$ avec une période $T_1 = 1.77$ jours. La période de la lune Europe est $T_2 = 3.55$ jours. Calculer la masse M_j de Jupiter et le rayon R_2 de l'orbite de la lune Europe. On donne $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$.

Exercice 4 : (07 points)

Deux corps S_1 et S_2 , assimilés à des points matériels, ont les masses suivantes : $m_1 = 5 \text{ kg}$, $m_2 = 3 \text{ kg}$. Les corps sont liés par un fil idéal (souple, inextensible et de masse négligeable) passant par une poulie idéale (masse négligeable). Le corps S_1 glisse sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 35^\circ$ par rapport à l'horizontale, sous l'effet d'une force constante $\vec{F}$. Le corps S_1 subit des forces de frottement dont les coefficients statique et cinétique sont respectivement $\mu_s = 0.35$ et $\mu_c = 0.20$ (voir figure ci-contre). On prend $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$.



1. Déterminer la valeur minimale F_{min} de la force F pour que le système reste en équilibre (empêcher S_1 de se déplacer vers le haut).
2. On prend $F = 100 \text{ N}$. Calculer l'accélération des deux corps et la tension du fil.

Corrigé de l'examen Final de Physique 1

Exercice 1 : (06 points)

1. L'équation caractéristique de la trajectoire de M :

$$x = 2t + 2 \rightarrow t = \frac{x-2}{2} \rightarrow y = \frac{1}{8}x^2 \quad (0.5)$$

La trajectoire est une parabole (0.25).

2. Les vecteurs vitesse et accélération de M ainsi que leurs modules :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = (2)\vec{i} + (t+1)\vec{j} \quad (0.5); \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{t^2 + 2t + 5} \quad (0.5)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{j} \quad (0.5); \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 1 \quad (0.5)$$

3. Les composantes tangentielle et normale de l'accélération de M :

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{t+1}{\sqrt{t^2 + 2t + 5}} \quad (0.5); \quad a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \frac{2}{\sqrt{t^2 + 2t + 5}} \quad (0.5)$$

$$R_c = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(t^2 + 2t + 5)^{\frac{3}{2}}}{2} \quad (0.5)$$

4. La nature du mouvement de M : $\vec{a} \cdot \vec{v} = t + 1 > 0$ (0.5). Le mouvement de M est accéléré (0.25).
5. L'angle entre les vecteurs vitesse et accélération :

$$\cos \beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{a \cdot v} = \frac{t+1}{\sqrt{t^2 + 2t + 5}} \quad (0.5)$$

6. Les composantes de $\vec{u}_t$:

$$\vec{u}_t = \frac{\vec{v}}{v} = \left(\frac{2}{\sqrt{t^2 + 2t + 5}} \right) \vec{i} + \left(\frac{t+1}{\sqrt{t^2 + 2t + 5}} \right) \vec{j} \quad (0.5)$$

Exercice 2 : (04 points)

1. Les coordonnées polaires (ρ, θ) de M :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = t \quad (0.5); \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) = t \quad (0.25)$$

L'équation polaire de la trajectoire : $\rho = \theta$ (0.25)

2. Les vecteurs position $\vec{OM}(t)$, vitesse $\vec{v}(t)$ et accélération $\vec{a}(t)$ dans la base locale des coordonnées polaires $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$ ainsi que leurs modules :

$$\vec{OM}(t) = \rho \vec{e}_\rho = t \vec{e}_\rho \quad (0.5)$$

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta = \dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad (0.25)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad (0.5); \quad v = \sqrt{v_\rho^2 + v_\theta^2} = \sqrt{1 + t^2} \quad (0.5)$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\rho = -\dot{\theta} \vec{e}_\rho \quad (0.25)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\dot{\theta} \vec{e}_\rho + 2\dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad (0.5); \quad a = \sqrt{a_\rho^2 + a_\theta^2} = \sqrt{4 + t^2} \quad (0.5)$$

Exercice 3 : (03 points)

En se basant sur les données de Io et en utilisant le PFD, nous avons :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \rightarrow \vec{F}_g = M_{Io}\vec{a} \quad (0.5)$$

Le mouvement de Io est circulaire uniforme ($\vec{a} = \vec{a}_n$). Par conséquent :

$$F_g = M_{Io}a_n \rightarrow G \frac{M_j M_{Io}}{R_1^2} = M_{Io}a_n = M_{Io} \frac{v_1^2}{R_1} = M_{Io} \omega_1^2 R_1 = M_{Io} \frac{4\pi^2}{T_1^2} R_1 \quad (01)$$

D'où la masse de Jupiter :

$$M_j = \frac{4\pi^2 R_1^3}{G T_1^2} = 1.90 \cdot 10^{27} \text{ kg} \quad (0.5)$$

En se basant sur les données d'Europe, nous obtenons également :

$$M_j = \frac{4\pi^2 R_2^3}{G T_2^2} \quad (0.5)$$

Ce qui donne le rayon de l'orbite de la lune Europe :

$$R_2 = \sqrt[3]{\frac{G M_j T_2^2}{4\pi^2}} = 6.71 \cdot 10^5 \text{ km} \quad (0.5)$$

Exercice 4 : (07 points)

1. La valeur minimale F_{min} pour que le système reste en équilibre :

$$\text{Equilibre : } \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \rightarrow \begin{cases} (m_1) : \vec{P}_1 + \vec{R}_1 + \vec{T}_1 + \vec{F} + \vec{f}_s = \vec{0} \\ (m_2) : \vec{P}_2 + \vec{T}_2 = \vec{0} \end{cases} \quad (0.5)$$

La projection de ces deux équations vectorielles dans le repère cartésien (XY) donne :

$$(m_1) : \begin{cases} (OX) : F - P_{1x} - T_1 - f_s = 0 \quad (1) \\ (OY) : R - P_{1y} = 0 \quad (2) \end{cases} \quad (0.5); \quad (m_2) : \begin{cases} (OX) : T_2 - P_2 = 0 \quad (3) \\ 0 = 0 \end{cases} \quad (0.25)$$

Les composante du poids : $P_{1x} = m_1 g \sin \alpha$; $P_{1y} = m_1 g \cos \alpha$

La force de frottement statique : $\begin{cases} f_s = \mu_s R \\ R = P_{1y} \end{cases} \rightarrow f_s = \mu_s m_1 g \cos \alpha$ (0.5)

La tension du fil : $\begin{cases} (1) : T_1 = F - P_{1x} - f_s \\ (3) : T_2 = P_2 \end{cases}$

Fil inextensible et de masse négligeable : $T_1 = T_2$ (0.25)

Ce qui donne l'expression de F_{min} :

$$F_{min} = (m_1(\sin \alpha + \mu_s \cos \alpha) + m_2)g = 71.63 \text{ N} \quad (0.5)$$

2. On prend $F = 100 \text{ N}$. Calculer l'accélération des deux corps et la tension du fil.

Le système va se mettre en mouvement car $F > F_{min}$

$$PFD : \sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \rightarrow \begin{cases} (m_1) : \vec{P}_1 + \vec{R}_1 + \vec{T}_1 + \vec{F} + \vec{f}_s = m_1 \vec{a}_1 \\ (m_2) : \vec{P}_2 + \vec{T}_2 = m_2 \vec{a}_2 \end{cases} \quad (0.5)$$

La projection de ces deux équations vectorielles dans le repère cartésien (XY) donne :

$$(m_1) : \begin{cases} (OX) : F - P_{1x} - T_1 - f_s = m_1 a_1 \quad (1) \\ (OY) : R - P_{1y} = 0 \quad (2) \end{cases} \quad (0.5); \quad (m_2) : \begin{cases} (OX) : T_2 - P_2 = m_2 a_2 \quad (3) \\ 0 = 0 \end{cases} \quad (0.25)$$

La force de frottement cinétique : $\begin{cases} f_c = \mu_c R \\ R = P_{1y} \end{cases} \rightarrow f_c = \mu_c m_1 g \cos \alpha$ (0.5)

La tension du fil : $\begin{cases} (1) : T_1 = F - P_{1x} - f_c - m_1 a_1 \\ (3) : T_2 = P_2 + m_2 a_2 \end{cases}$

Fil inextensible et de masse négligeable : $\begin{cases} T_1 = T_2 \\ a_1 = a_2 = a \end{cases}$ (0.5)

Ce qui donne l'expression de l'accélération :

$$a = \frac{F - (\sin \alpha + \mu_c \cos \alpha)m_1 g - m_2 g}{m_1 + m_2} \quad (0.5) = 4.30 \text{ m.s}^{-2} \quad (0.25)$$

Par conséquent, la tension du fil est donnée par :

$$T = T_2 = T_2 = P_2 + m_2 a = m_2(a + g) = 42.33 \text{ N} \quad (0.5)$$

N.B : La note attribuée aux questions comportant plusieurs parties doit être répartie équitablement entre ces dernières.

