

## ✂–Examen Final de Mathématiques 3–✂

### Exercice 1 (10.00 points) :

1. Calculer l'intégrale indéfinie suivante :

$$I_1 = \int x e^{1-x} dx,$$

et en déduire la nature de l'intégrale impropre suivante :

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{x^3 + x + 3}{x^2 + 1} e^{1-x} dx.$$

2. Déterminer la nature de l'intégrale impropre suivante :

$$I_3 = \int_e^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{\ln(x)} dx.$$

3. Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{e^{-n}}{n^n n!} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 0} \left( \frac{n+1}{2n+3} \right)^{2n}.$$

### Exercice 2 (10.00 points) :

I. Soient  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y \leq 0 \text{ et } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ .

- Tracer le domaine  $D$ .
- Calculer l'intégrale double suivante :

$$I = \int \int_D \frac{x^2 + y^2}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} dx dy.$$

II. Soit  $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ .

1. Calculer l'intégrale triple suivante :

$$I_1 = \int \int \int_{V_1} x^2 dx dy dz.$$

III. Soit  $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq 2, x \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

1. Calculer l'intégrale triple suivante :

$$I_2 = \int \int \int_{V_2} \frac{xz}{x^2 + y^2 + 1} dx dy dz.$$

Une rédaction précise, claire et rigoureuse est requise.

Exo 1 :

①

$$I = \int_0^1 x e^{1-x} dx$$

$$u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$$

$$v(x) = e^{1-x} \Rightarrow v'(x) = -e^{1-x}$$

$$I = \left[ x e^{1-x} - e^{1-x} \right]_0^1 = \left[ (1-1) - (-1) \right] = 1$$

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{x^3 + x + 3}{x^2 + 1} e^{-x} dx \quad (PS = +\infty)$$

la fct  $\frac{x^3 + x + 3}{x^2 + 1} e^{-x}$ , continue et positive

sur  $[0; +\infty[$

$$\text{et } \frac{x^3 + x + 3}{x^2 + 1} e^{-x} \sim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x}$$

$$\text{et } \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ -t e^{-t} - e^{-t} \right]_0^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -x e^{-x} - e^{-x} + e = e \quad (\text{converge})$$

d'après le critère d'équivalence

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3 + x + 3}{x^2 + 1} e^{-x} dx \text{ converge.}$$

pp ①

$$(2) \quad A = \int_e^{+\infty} \frac{x^2+1}{\ln x} dx \quad (PS = +\infty)$$

$x \mapsto \frac{x^2+1}{\ln x}$  ; continue et ~~positive~~ sur  $[e; +\infty[$

et  $\forall x \in [e; +\infty[ : \ln x \leq x$

$$\frac{1}{\ln x} \geq \frac{1}{x}$$

$$\frac{x^2+1}{\ln x} \geq \frac{x^2+1}{x}$$

$$\int_e^{+\infty} \frac{x^2+1}{x} dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_e^x \frac{t^2+1}{t} dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{2} t^2 + \ln t \right]_e^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} x^2 + \ln x - \frac{1}{2} e^2 - 1$$

$= +\infty$  Diverge.

D'après le critère de comparaison  $\int_e^{+\infty} \frac{x^2+1}{x} dx$

Diverge

PP (2)

③

Soit  $u_n = \frac{e^{-n}}{n^n n!}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{-(n+1)}}{(n+1)^{n+1} (n+1)!} \times \frac{n^n n!}{e^{-n}}$$

$$= \frac{\cancel{e^{-n}} \cdot e^{-1}}{(n+1)^{\cancel{n}} \cdot (n+1) \cdot (n+1) \cdot \cancel{(n!)}} \times \frac{\cancel{n^n} \cdot \cancel{n!}}{\cancel{e^{-n}}}$$

$$= \left( \frac{n}{n+1} \right)^n \cdot \frac{e^{-1}}{(n+1)^2}$$

2

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left( \frac{n+1}{n} \right)^n} \cdot \frac{e^{-1}}{(n+1)^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n} \cdot \frac{e^{-1}}{(n+1)^2} = 0 < 1$$

D'après le critère d'Alambert la  
série  $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{-n}}{n^n n!}$  converge.

PP ③

Soit  $u_n = \left( \frac{n+1}{2n+3} \right)^{2n}$

l.i.  $\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{2n+3} \right)^{2n \cdot \frac{1}{n}}$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{2n+3} \right)^2$

$= \frac{1}{4} < 2.$

2

D'après le critère de Cauchy

la série  $\sum_{n \geq 0} \left( \frac{n+1}{2n+3} \right)^{2n}$

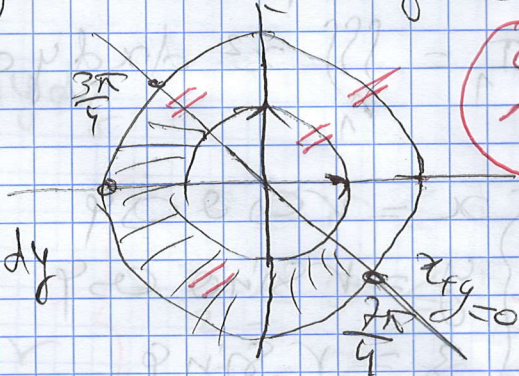
converge.

pp (4)

# Exo 2

I/1) soit:  $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+y \leq 0 \text{ et } 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$

a) trace  $D$



b)  $I = \iint_D \frac{x^2+y^2}{1+\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$|J| = r$$

$$1 \leq r \leq 2$$

$$\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{7\pi}{4}$$

$$I = \iint_D \frac{r^2}{1+\sqrt{r^2}} \times r dr d\theta$$

$$= \iint_D \frac{r^3}{1+r} dr d\theta$$

$$= \int_1^2 \frac{r^3}{1+r} dr \times \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} d\theta$$

$$= \int_1^2 \left( r^2 - r + 1 - \frac{1}{1+r} \right) dr \times \left[ \theta \right]_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}$$

$$= \left[ \frac{1}{3} r^3 - \frac{1}{2} r^2 + r - \ln(1+r) \right]_1^2 \times \pi$$

$$= \pi \left[ \frac{11}{6} + \ln\left(\frac{2}{3}\right) \right]$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{3} \left| \frac{1+r}{r^2-r+1} \right. \\ - \frac{r^2 r^2}{r^2-r+1} \\ - \frac{r^2}{r^2-r+1} \\ + \frac{r^2+r}{r^2-r+1} \\ \hline \frac{1}{r^2-r+1} \\ \frac{1}{r^2-r+1} \\ \frac{1}{r^2-r+1} \\ \frac{1}{r^2-r+1} \end{array}$$

1,5

pp 5

III/2) Seien  $V_1 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0 \}$

$$I_1 = \iiint_{V_1} x^2 \, dx \, dy \, dz$$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \cos \varphi \\ z = r \sin \varphi \end{cases} \quad |\vec{r}| = r^2 \sin \varphi$$

$$\Delta = \left\{ 0 \leq r \leq 1, \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$I = \iiint_{\Delta} r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi \cdot r^2 \sin \varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \int_0^1 r^4 \, dr \times \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \, d\theta \times \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi \, d\varphi$$

$$= \left[ \frac{1}{5} r^5 \right]_0^1 \times \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2\theta)) \, d\theta \times \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \varphi) \cos \varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \left[ \theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \times \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \varphi) \cos \varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{10} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \varphi) \cos \varphi \, d\varphi$$

$$\text{on pose } t = \sin \varphi \Rightarrow dt = \cos \varphi \, d\varphi$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow t = -1$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$$

$$I = \frac{\pi}{10} \int_{-1}^1 (1 - t^2) \, dt$$

$$= \frac{\pi}{10} \left[ t - \frac{1}{3} t^3 \right]_{-1}^1 = \frac{\pi}{10} \left[ \frac{4}{3} \right] = \frac{2\pi}{15}$$

III/

(3)

$$V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 2; x \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$I_2 = \iiint_{V_2} \frac{xz}{x^2 + y^2 + 1} dx dy dz$$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad |J| = r \quad \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq z \leq 2 \end{cases}$$

$$I_2 = \iiint_{\Delta} \frac{r \cos \theta z}{r^2 + 1} r dr d\theta dz$$

$$= \int_0^2 \frac{r^2}{r^2 + 1} dr \times \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \times \int_0^2 z dz$$

$$= \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{r^2 + 1}\right) dr \times [\sin \theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \times \left[\frac{1}{2} z^2\right]_0^2$$

$$= [r - \arctan(r)]_0^2 \times [2] \times [2]$$

$$= \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \times (4)$$

$$= 4 - \pi$$