Chapitre 02 :

Cours 3

1-les révolutions en mathématique et en physique

a- La révolution scientifiques en math.

Depuis les premières civilisations les mathématiques ont était considérés comme un moyen le plus fiable pour l'entendement humain et la compréhension du monde abstrait et sensible toutes fois les mathématiques a connu un changement presque régulier, elle a traversé pratiquement plusieurs révolutions et transformations qui l' ont causé une certaine profondeur et richesse, désormais des transformations qui ont beaucoup influencés sur les fondements depuis Euclide on commençant par le soucis des nombre imaginaire et la crise des fondement.

b-

Euclide est un philosophe, un mathématicien grec ancien, il a publié son premier livre intitulé « les origines » dans lequel il rassembla pratiquement toutes les origines et les recherches mathématiques depuis le 6éme siècle.

- Euclide a fondé sa géométrie sur un groupe d'hypothèses qui sont nécessaires à partir deux que dépende la vérité des résultats mathématiques.
- Chaque hypothèse dépende de l'autre jusqu'en arrivant aux éléments élémentaires clairs, nécessaires, par une construction, ils sont nommés (les principes)
- Euclide distingue entre trois principes

- **Les axiomes :** ce sont des propositions claires pour eux-mêmes.
- **Les postulats :** ce sont des propositions non claires, elles sont peut-être besoin d'un éclaircissement, mais Euclid les considère pour lui claires, il nous demande de les reconnaitre malgré leurs ambigüités.
- **Les définitions :** c'est un ensemble de termes, des limites qui sont nécessaires non définies, pour permettre de définir le reste dont on a besoin pour fonder un système mathématique, si les axiomes sont clairs, les postulats sont doutés notamment Euclide nous demande de les

adopter son argumentation, ou par un motif valide ou une démonstration valide surtout le postulat (du parallèle postulante) qui était interprété comme suivant :

- A partir d'un point à l'extérieur d'une ligne droite on peut dessiner une seule ligne parallèle à la première et à partir de ce postulat, Euclide a construit ou a fondé un ensemble de propositions pour construire des fondements d'une géométrie parmi eux : la totalité des angles d'un triangle sont égales à 180°.Un deuxième exemple de réorganisation effectué par Euclide fut de mettre au point une axiomatique convenable pour exposer la science de la géométrie. Voici ce dont il s'agit. Nous avons dit au paragraphe 2.5.2 que les pythagoriciens avaient observé que la somme des angles d'un triangle vaut deux angles droits. Il s'agissait là néanmoins d'une connaissance empirique, car aucune preuve satisfaisante n'était connue avant le travail d'Euclide. Ainsi Aristote écrit dans la seconde moitié du IVe siècle avant J.-C. que toutes les démonstrations du fait en question connues à son époque comportaient un cercle vicieux. Euclide a tranché le problème en introduisant un postulat spécial pour cela, postulat qui fut donc ajouté en cinquième position dans les demandes de la théorie[1]

Cours 04

1- La géométrie non-euclidienne

a- La géométrie de Lobatchevski :

Lobatchevski est un mathématicien russe au 19ème siècle, selon le russe Lobatchevski, qui est né en (1856-1793), en imaginant le contraire de la proposition ou bien le postulat à partir d'un point externe on peut dessiner plusieurs lignes, donc c'est l'opposition de Euclide, on arrive à des résultats sans contradiction. Depuis l'époque d'Euclide, beaucoup de mathématiciens ont essayé de s'affranchir de cette cinquième demande, souvent appelé « postulat d'Euclide ». Le but était de montrer que cette cinquième demande était une conséquence des quatre autres. En 1795, John Playfair (1748– 1819) montra que le postulat d'Euclide était équivalent à l'énoncé suivant, appelé depuis « postulat des parallèles » : 42 Étant donné une droite et un point hors de cette droite, il est possible de tracer exactement

[1] -Deug Mias 2004–2005, Histoires des mathématiques, UFR de mathématique et d'informatique — Université Louis Pasteur 7, rue René Descartes — 67084 Strasbourg Cedex, p37

une droite passant par ce point et parallèle à la droite. Puis au milieu du 19eme siècle, Carl Friedrich Gauss (1777–1855), János Bolyai (1802–1860) et Nikolai Ivanovitch Lobatchevski (1792–1856) mirent au point la géométrie non-euclidienne, une forme de géométrie satisfaisant aux quatre premières demandes d'Euclide mais pas à la cinquième, puisque dans cette géométrie, la somme des angles d'un triangle est toujours plus petite que deux angles droits. Ils montrèrent que cette nouvelle théorie ne portait pas en elle de contradiction et établirent ainsi l'indépendance de la cinquième demande d'Euclide par rapport aux quatre premières.[2] En somme des introductions différentes mènent vers des résultats différents, désormais La géométrie hyperbolique non-euclidienne vérifia la surface qui n'est pas plane en réalité, à partir d'un point à l'extérieur d'une ligne droite on peut dessiner plusieurs lignes en parallèle à la première qui lui est en parallèle.

b- La géométrie de Riemann (1866-1826) :

Cette géométrie est carrément différente de celle d'Euclide et de Lobatchevski.

Riemann dépassa le postulat du parallèle de Euclide., pour Riemann à partir d'un point externe, on ne peut dessiner aucune ligne en parallèle, car la sphère est ronde et on ne peut pas avoir de lignes en parallèles, si Lobatchevski a considéré que la totalité des angles d'un triangle est inférieur à 180° ou bien moins, Riemann c'est plus de 180°

La surface chez les trois mathématiciens :

Elle est plaine pour Euclide

Elle est concave pour Lobatchevski

Elle est considérée comme parabolique pour Riemann

Ils commencèrent leurs considérations à partir de différentes surfaces et certainement on aura des résultats différents, il n'y a aucune contradiction entre eux, mais chacun suit un système propre à lui.

Cours 5:

1-La théorie des groupes :

a- Problème de la certitude en mathématique

[2] - ibid p38

Les mathématiques sont une science exact et certaine et la source de leur précision et de leur certitude est leur estimation quantitative et le mouvement logique suivi par le mathématicien , en effet la précision de ces résultats ainsi que sa nature abstraite caractérisée par la nécessité et donc elle est la vocation à la fois du philosophe parce qu'il y voit la vérité immuable et du scientifique car à travers elle il a transformé les moyens de la recherche scientifique de l'expression qualitative à l'expression quantitative et de l'expérimentation à l'abstraction et cette position est adoptée par Descartes, Spinoza et Poincaré et ils justifient leur position avec les arguments et les preuves suivants :

Les mathématiques reposent sur un ensemble de principes absolus, dont le premier est constitué par les axiomes, qui sont des principes mentaux qui n'ont pas besoin de preuve pour démontrer leur validité et qui ne connaissent pas de changement, car ils sont fixés depuis des temps immémoriaux, tels que « le tout est plus grand que la partie » « deux valeurs égales d'une troisième valeur sont égales entre elles », comme croyait Descartes. Descartes dit à ce propos : « Je n'accepte rien comme vrai à moins que ce ne soit axiomatique, la norme de la vérité et de la fausseté »

Descartes disait « Quand je commençai à appliquer mon esprit aux disciplines mathématiques, je lus d'abord ce qu'en rapportent les Autorités qu'on lit d'habitude, et je me plaisais surtout à l'Arithmétique et à la Géométrie, parce qu'on les disait être très simples et comme des chemins vers les autres. Mais en aucune des deux ne me tombaient alors entre les mains d'Écrivains, qui me satisfassent pleinement : car certes j'y lisais plusieurs choses à propos des nombres, que j'expérimentais être vraies après en avoir fait les calculs ; à propos des figures aussi, ils en faisaient voir beaucoup en une certaine manière à mes yeux mêmes, et ils les concluaient à partir de certaines conséquences ; mais ils ne semblaient pas montrer à l'esprit pourquoi ces choses étaient ainsi, et comment on les trouvait.[3] Après la géométrie euclidienne, nous avons à discuter et à débattre la certitude en mathématiques, la question de la certitude en mathématiques qui a été remise en cause plusieurs fois, c'est aux mathématiciens de chercher comment mettre de nouveaux fondements afin d'éviter les

[3] -René Descartes, (1966) Règles pour la direction de l'esprit, 6éme édition j-vrin, paris p.13.

erreurs, les contradictions, telle que (une partie est considérée comme égale à une générale), et c'est contradictoire en mathématiques.

Toutes fois les mathématiques étaient en échec et c'est à cause des points de mathématiciens eux-mêmes qui considèrent que la question des principes comme un fondement donc il n'y a aucune différence entre les mathématiques modernes les axiomes, les postulats et les définitions, tous ont un caractère hypothétique basé sur un système des axiomes et des postulats. En somme Les chercheurs ont choisi pour construire ces mathématiques ce que nous appelons l'axiomatique. Toutes fois Le système axiomatique a influencé d'une manière ou d'une autre donc il a changé la pensée des mathématiques.

a-La théorie des groupes :

C'est une théorie mathématique qui s'intéressa désormais aux nombres et aux groupes des nombres leurs descriptions et natures et leurs fonctions, elle a pratiquement trois termes : (le groupe, l'élément, la filiation.)

Ce qui est important dans cette théorie c'est la méthode axiomatique et la relation entre les termes et la théorie des groupes avec la révolution et la relation entre les termes mais chaque élément devrait être clair et particulier par rapport à un autre élément ainsi la filiation,
Une autre notion importante dans cette théorie des groupes.

b-Les restrictions pour les théories des groupes :

Lorsqu'on fait une comparaison entre les nombres, on va distinguer une chose, c'est qu'il y a les nombres naturels qui se composent de deux groupes : (des nombres pairs et des nombres impairs.) après l'analyse de ces nombres, on va constater qu'il y'a les nombres infinis dans les trois groupes soit pour les nombres naturels, pairs et impairs.

c-Les nombres qui dépassent l'infini :

Cantor nous parle d'un type spécial de nombres, ceux qui dépassent l'infini et les nombres transcendantaux (les véritables nombres.)
Quand on compare les nombres naturels et les transcendantaux, il ne nous reste rien dans les nombres naturels et ce qu'on peut comparer avec les nombres transcendantaux, et ça, en

vérité, c’est une ruine et un échec pour les nombres naturels, s’ils sont considérés comme infinis, les nombres transcendantaux dépassent l’infini.

La conclusion :

Des fondements dans lesquels la mathématique est fondé aujourd’hui à eu plusieurs critiques : quel est le destin des mathématiques après ces restrictions ?

Quelles sont les solutions proposées par les logistes et les mathématiciens pour dépasser ces obstacles épistémologiques ?

Cours 06 :

1- Bertrand Russel et la théorie du type :

La théorie des types que Bertrand Russell proposa en 1908 ne se voulait pas une solution ad hoc au problème des contradictions, elle prétendait plutôt être la solution naturelle, celle que tout le monde reconnaîtra comme la solution attendue. En fait, il s'agit d'une théorie philosophique qui concrétise un projet grandiose : réduire les mathématiques à la logique. Le présent texte se propose d'examiner les thèses russelliennes et Ia dynamique de leur évolution de 1903 à 1907, c'est-à-dire des Principles à la naissance de la théorie des types [4].

Russel a essayé de résoudre le problème des groupes à travers la théorie du type.

La théorie du type qui est considérée comme une méthode qui classe les choses et qui fait la distinction entre les groupes de plusieurs niveaux, Russel a construit pratiquement un système détaillé, fondé sur la distinction logique, et entre les fondements chaque niveau représente un type.

Donc, nous avons le premier niveau : les paires qui sont défini comme les éléments du groupe ensuite, le prédicat, qui veut dire la catégorie, puis, le prédicat des prédicats, qui veut dire les catégories des catégories.

Les problèmes de la théorie du groupe ont été traité par l’intuitionniste mathématicien Hollande Brauner et quelques mathématiciens tels que Weyl et Heyting qui refusent et

---

[4] -François Lepage, la naissance de la théorie des types, philosophiques, vol.xi, numéro 2, octobre 1984, volume 11, numéro 2, octobre 1984 égalité, justice et différence URI : https://id.erudit.org/iderudit/203258ar DOI : https://doi.org/10.7202/203258ar, p01.

opposent la tendance logiste et axiomatique dans lequel on peut résumer le rapproche dans deux points : la nature des sujets et le tiers exclu.

a-La nature des sujets mathématiques :

Les intuitionnistes considèrent que les problèmes de la théorie des groupes c'est à cause des groupes d'infini et pour éviter ça, il faut revoir la question de l'infini, car celui qui s'habitue avec l'évidence et l'intuition dans les recherches mathématiques il va sentir les nausées et quand on lui demande de sentir l'infini ce n'est plus une idée claire mais facile de l'imaginer, en effet on peut dire aussi que le sujet mathématique existe, c'est une expression vide de sens, son existence dépend de la perception d'abord, pour s'en sortir de ce problème, il faut s'éloigner de ce concept complexe des mathématiques afin d'éviter le labyrinthe (qui veut dire un chemin sans impasse, , il considère aussi les concepts mathématiques comme des structures rationnelles percevables avec l'intuition du temps et du lieu, selon Kant.

b-Les problèmes du tiers exclu :

La logique classique suit le principe de non-contradiction avec le principe de la troisième exclu tandis que le principe de non-contradiction dans sa forme générale stipule que deux jugements contradictoires ne peuvent pas être vrais en même temps, le principe du troisième exclu affirme que deux jugements contradictoires ne peuvent pas être faux en même temps. Si X est B est un jugement faux, alors X n'est pas B est nécessairement vrai, ou si X n'est pas B est un jugement faux, alors X et B sont nécessairement vrai. En d'autres termes, nous pouvons exprimer le principe du tiers exclu de la manière suivante : entre la vérité et la fausseté, entre l'affirmation et la négation, il n'y a pas de place pour une troisième possibilité. Dans l'optique de Wittgenstein, les lois logiques sont des règles que nous suivons n nécessairement ´ lorsque nous faisons des énonces sur la réalité é. Elles sont de ce fait vide de sens et ne ´ peuvent faire l'objet d'une vérification la manière d'un ` énoncé empirique. Par exemple, ´ voici une illustration de la règle logique du syllogisme ` $A\&(A \Rightarrow B) \Rightarrow B$. Considérons ´ A =Ce champignon est une amanite tue-mouches. B =Ce champignon est veineux. Supposons que l'on se trouve en présence d'une amanite tue-mouches qui n'est pas ´ vénéneuse. Alors on conclurait que la proposition ´ $A \Rightarrow B$, a savoir que les amanites ` tue-mouches sont vénéneuses, est incorrecte. On ne conclurait pas que la règle logique ` du syllogisme est fausse ![5]

Il convient de noter que le débat sur la question de savoir s'il faut exclure ou laisser une place à cette troisième possibilité entre la vérité et la fausseté est antérieur à l'émergence des formes logique à valeurs multiples, et antérieur à la critique des principes du raisonnement mathématique par les mathématiciens eux-mêmes au début du siècle ; John Stuart Mill qu'entre la vérité et la fausseté, il y a toujours une place pour une troisième possibilité, qu'il nomma comme l'absence de sens. y a-t-il une troisième possibilité à côté du « oui ou non » exigé par le principe du tiers éxclu qui permet le « oui et non » ou le ni oui ni non ? C'est une question déroutante que la logique conventionnelle rejette d'emblée et ne trouve pas de place pour la discussion. Elle exclut les deux réponses, et si quelqu'un se trouve conduit à l'une d'elles, l'opinion est que la question a été mal posée et qu'il s'est laissé glisser dans un choix entre deux positions à la fois corrompues et inacceptables ; par conséquent, toute question à laquelle l'esprit est confronté l'oblige à y répondre positivement ou négativement, pour sa à la qualification de vraie et à l'accepter ou de fausse et à l'écarter, poussé par l'opposition catégorique entre la vérité et le mensonge, et entre la validité et la dépravation. On retrouve ici la dichotomie du positif et du négatif qui constitue la trame de l'entendement et de la pensée en général.

Les intuitionnistes refusent catégoriquement le tiers exclu qui se présenta comme un problème pour la théorie des groupes il est inutile dans plusieurs situations car parfois les propositions ne pourront être confirmées ni niées, en fait certains groupes aussi contienne des éléments qui ne sont pas facile de savoir leurs rôles dans un groupe clairement ce qui rend désormais le tier exclu non applicable. Enfin l'intuitionnisme a réussi à déconstruire les règles de la logique aristotélicienne dans le domaine des mathématiques.

Cours 7 :

1/ L'axiomatique :

[5] - http://people.maths.ox.ac.uk/rossler/mypage/pdf-files/wittgenstein-tiers-exclu.pdf

L'Axiomatique est système ou un certain ordre dépend d'un ensemble de principes ou bien un ensemble d'axiomes quand peut considérer comme une base afin de construire des théories scientifiques et des branches de connaissance , en effet c'est une possible structure qui tente à résoudre certains problèmes en mathématiques tels que la théorie du groupe sans sacrifier de rien ainsi les mathématiques classiques comme l'intuition qui faisait des complications comme la typologie de Russel, en outre l'axiomatique exige le respect des conditions de la méthode axiomatique. En fait l 'axiomatique est le seul moyen pour résoudre le problème de la théorie des nombres à travers l'application de la méthode axiomatique. En outre le respect de ces conditions, notamment au début des éléments élémentaire qui déterminent la notion des groupes, sans construire des groupes opposants au même temps elle permet la construction originale et que ces éléments devraient être inclus en elles et que les attributs sont insuffisants pour valider un groupe, donc ce sont juste des éléments qui aident à distinguer entre les groupes, les groupes existants a priori.

a- L'importance de la méthode axiomatique :

La méthode axiomatique est essentielle dans plusieurs domaines de la connaissance notamment en mathématique, la logique et la physique car elle garantit un cadre bien ordonné et systématique pour construire des théories, en revanche elle est clair et bien organisé car elle détermine d'une façon apriori ses axiomes clairement ainsi ses fondements constantes sans oublier sa déduction logique qui est une caractéristique particulière, nous avons aussi la production efficace , la vérification aussi la force de l'argumentation et de la déduction, en outre l'axiomatique adopta une méthode exacte et productive, elle permet pratiquement l'éloignement des caractéristiques des êtres mathématiques et de les relier avec d'autres notions et les significations qu'elles donnent pour les concepts mathématiques qui sont formulés, en somme ses notions mathématiques servent à fonder un système mathématique d'une manière solide.