

Polycopié de cours

Sur le thème

MODÉLISATION

DES ÉCOULEMENTS TURBULENTS

Pour les étudiants :

Master Génie Mécanique Option : Energétique

Par : Dr Faïçal NAIT BOUDA

Table des matières

Chapitre 1 : Propriétés et Concepts de base

<i>1. Définition</i>	<i>1</i>
<i>2. Caractéristiques et propriétés de la turbulence</i>	<i>1</i>
<i>3. Approche de moyennisation (statistique) de la turbulence</i>	<i>3</i>
<i>3.1 Notion de l'écoulement moyen</i>	<i>3</i>
<i>3.2 Décomposition de Reynolds</i>	<i>4</i>
<i>3.3 Equations moyennées</i>	<i>5</i>

Chapitre 2 : Les modèles de turbulence

<i>1. Introduction</i>	<i>8</i>
<i>2. Modèles de fermeture du premier ordre</i>	<i>8</i>
<i>2.1 Hypothèse de Boussinesq : Concept de viscosité turbulente</i>	<i>8</i>
<i>2.2 Modèles à zéro équation : Modèles algébriques</i>	<i>10</i>
<i>2.3 Modèles à une équation</i>	<i>11</i>
<i>2.4 Modèles à deux équations</i>	<i>12</i>
<i>3. Modèles de fermeture du second ordre</i>	<i>14</i>
<i>4. Autres méthodes de résolution de la turbulence</i>	<i>16</i>
<i>4.1 Simulation directe (Direct Numerical Simulation DNS)</i>	<i>16</i>
<i>4.2 Simulation des grandes échelles (Large Eddy Simulation LES)</i>	<i>16</i>

Chapitre 3 : La Modélisation K-epsilon

<i>1. Introduction</i>	<i>17</i>
<i>2. Construction de l'équation de transport de k</i>	<i>17</i>
<i>3. Construction de l'équation de transport de ε</i>	<i>23</i>
<i>4. Modèle k-ε en convection thermique</i>	<i>23</i>
<i>5. Les « lois de paroi » associées au modèle k-ε</i>	<i>24</i>
<i>6. Exemple d'application du modèle k-ε : convection naturelle dans une cavité</i>	<i>27</i>
<i>7. Exemple de code de calcul turbulent : TEAM</i>	<i>34</i>
<i>8. Exemple de résultats turbulents</i>	<i>39</i>
<i>Références bibliographiques</i>	<i>42</i>

Chapitre 1 : Propriétés et Concepts de base

1. Définition :

- Tout d'abord, on rappelle qu'un écoulement est dit *laminaire* lorsqu'il est régulier (qu'il ne présente pas trop de variations spatiales ou temporelles) et bien souvent stationnaire. Il s'agit en fait d'une solution stable des équations de Navier-Stokes, au sens où si on modifie l'écoulement, il retourne vers la solution laminaire. De façon générale, la viscosité stabilise et régularise les écoulements.
- Il y a lieu de signaler aussi qu'il n'existe pas de définition générale et précise de la turbulence en mécanique des fluides à l'état actuel des connaissances. Ce qui peut être affirmé à ce stade est que : *la turbulence est un régime d'écoulement qui commence à naître au-delà d'un seuil d'instabilité de l'écoulement laminaire, essentiellement en raison de la faible importance des effets visqueux comparativement aux autres effets d'entraînement, et après que cette instabilité devient irréversible, plus développée et chaotique.*

Ce qu'il faut surtout retenir est que la plupart des écoulements rencontrés dans la nature ou dans l'industrie sont souvent turbulents.

2. Caractéristiques et propriétés de la turbulence :

La turbulence est caractérisée par différents aspects, dont voici les principaux :

a- l'aspect irrégulier et aléatoire en temps ou en espace :

Les grandeurs telles que la vitesse, la pression et la température varient de façon rapide et aléatoire. Les écoulements turbulents sont donc fortement instationnaires.

b- l'aspect tridimensionnel et rotationnel :

Les écoulements turbulents sont strictement rotationnels et tridimensionnels caractérisés par la présence d'innombrables tourbillons de quelques millimètres de grandeur dans un domaine d'écoulement de plusieurs mètres.

c- la capacité de mélange élevée :

En écoulement laminaire, le transport de quantité de mouvement et de chaleur se fait par convection et par diffusion. En turbulent, les fluctuations des vitesses d'écoulement et de la température dans les trois directions assurent un mélange bien plus efficace.

d- l'aspect dissipatif :

L'énergie des écoulements moyens est dissipée par les contraintes visqueuses. Pour se maintenir, les écoulements turbulents ont besoin d'être fournis en énergie, sinon ils finissent par se relaminariser. Cette source d'énergie peut avoir des origines diverses, la plus fréquente est le cisaillement ou la déformation de l'écoulement moyen ; l'origine peut aussi être des forces extérieures.

Autre caractéristique à signaler est que les nombres adimensionnels caractérisant le régime de l'écoulement (nombre de Reynolds et nombre de Rayleigh, par exemple) sont plus élevés en turbulent que ceux d'un régime laminaire. A titre d'exemple, le régime turbulent est observé pour un écoulement :

→ dans une conduite à : $Re > 4 \cdot 10^3$

→ sur une plaque plane à : $Re > 10^6$

Pour le cas particulier de l'écoulement d'un jet libre le régime turbulent est observé pour des nombres de Reynolds faibles, approximativement à $Re > 10$.

3. Approche de moyennisation (statistique) de la turbulence

En plus de l'approche expérimentale, l'étude des écoulements turbulents peut être menée par des procédures numériques. Néanmoins, le calcul des écoulements turbulents par résolution directe des équations de Navier-Stokes est très délicat et souvent inaccessible à cause des résolutions spatiales très élevées nécessaires dans ce type d'approche.

3.1 Notion de l'écoulement moyen

Toutes les approches pratiques de calcul (résolution numérique) font appel à la notion de grandeur moyenne. La moyenne est, à l'origine, une moyenne d'ensemble (moyenne stochastique), c'est-à-dire qu'elle est prise sur un ensemble d'expériences effectuées dans des conditions identiques. L'hypothèse qu'il est équivalent de considérer une expérience répétée une infinité de fois ou une seule expérience menée à l'infini dans le temps permet le passage à des moyennes temporelles et, par conséquent, un traitement statistique des équations.

Ainsi, au lieu de chercher à déterminer l'évolution spatiale et temporelle des grandeurs instantanées, on s'intéresse essentiellement au *comportement de leurs moyennes temporelles*.

L'importance et l'intérêt de cette procédure résident dans le fait que :

- l'hypothèse de bidimensionnalité dans un écoulement turbulent possède plus de signification et de justification lorsqu'il s'agit d'un écoulement moyenné,
- ce sont les écoulements moyens, représentant les caractéristiques globales des écoulements instationnaires, qui intéressent en premier l'ingénieur.

C'est la raison pour laquelle les études sur la turbulence ce sont orientées vers la modélisation numérique utilisant les modèles statistiques.

Ainsi, afin de transformer les équations de transport de quantité de mouvement et de chaleur en équations moyennées une décomposition des variables instantanées de l'écoulement, dite « *décomposition de Reynolds* », est alors introduite.

3.2 Décomposition de Reynolds

La décomposition de Reynolds permet de transformer les équations de Navier-Stokes et d'énergie en équations moyennées dans le temps, en exprimant chaque variable instantanée

$X(x_i, t)$, $i=1,2,3$, en la somme de :

- sa valeur moyenne temporelle $\bar{X}(x_i)$
- et d'une fluctuation $X'(x_i, t)$ (ou bien : $\tilde{X}(x_i, t)$)

C'est-à-dire : $X(x_i, t) = \bar{X}(x_i) + X'(x_i, t)$

La moyenne temporelle est définie comme suit :
$$\bar{X}(x_i) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} X(x_i, t) dt$$

 $T \rightarrow \infty$

La variable X peut représenter, dans la plupart des cas, l'une des grandeurs suivantes :

- u, v, w : composantes du vecteur vitesse et p : la pression
- et dans le cas du transfert thermique et solutal : la température (T) et la concentration (C).

Lorsqu'on applique la décomposition de Reynolds aux équations instantanées de transport de mouvement, ou équations de Navier-Stokes, et de l'énergie on obtient un système d'équations moyennées.

Cette moyenne vérifie les règles dite de Reynolds :

$$\overline{X'} = 0, \quad \overline{(X + Y)} = \bar{X} + \bar{Y}, \quad \overline{aX} = a \times \bar{X} \quad \text{avec : } a \text{ une constante}$$

$$\overline{(X \times Y)} = \bar{X} \times \bar{Y}, \quad \frac{\partial \bar{X}}{\partial s} = \frac{\partial \bar{X}}{\partial s} \quad \text{avec : } s \text{ variable d'espace ou de temps}$$

➔ Propriété importante à retenir : $\overline{(X \times Y)} = \bar{X} \times \bar{Y} + \overline{X' Y'}$

Ce traitement appliqué aux équations de transport de mouvement et d'énergie qui décrivent le mouvement détaillé instantané du fluide, fait apparaître des termes inconnus supplémentaires de type $\overline{X' Y'}$ provenant des termes nonlinéaires des équations.

3.3 Equations moyennées

On rappelle les équations de mouvement d'un écoulement incompressible de fluide newtonien (Equations de Navier-Stokes) s'écrivent, sous une forme indicelle, comme suit (i,j=1,2,3) :

Equation de continuité :
$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{ou encore :} \quad u_{i,i} = 0$$

Equations de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_j u_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]$$

ou encore :
$$u_{i,t} + (u_j u_i)_{,j} = -\frac{1}{\rho} p_{,i} + [\nu (u_{i,j} + u_{j,i})]_{,j}$$

Equations de l'énergie :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad \text{ou sous la forme :} \quad T_{,t} + u_j T_{,j} = \left(\frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)_{,j}$$

En introduisant la décomposition de Reynolds dans l'équation de continuité, comme suit :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0$$

Puis, en moyennant cette équation :
$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} + 0$$

On obtient :
$$\rightarrow \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{ou bien sous la forme :} \quad \bar{u}_{i,i} = 0$$

Dans les équations de quantité de mouvement, on procède de la même manière :

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial t} + \frac{\partial [(\bar{u}_j + u'_j) (\bar{u}_i + u'_i)]}{\partial x_j} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\bar{P} + P')}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial (\bar{u}_j + u'_j)}{\partial x_i} \right) \right] \end{aligned}$$

En moyennant l'équation on aboutit à :

$$\frac{\partial(\overline{u_i + u'_i})}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{u_i \overline{u_j} + u'_i u'_j + \overline{u_i} u'_j + \overline{u_j} u'_i})}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\overline{P} + P')}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \left(\frac{\partial(\overline{u_i + u'_i})}{\partial x_j} + \frac{\partial(\overline{u_j + u'_j})}{\partial x_i} \right) \right]$$

Ou bien :

$$\frac{\partial(\overline{u_i + u'_i})}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{u_i \overline{u_j} + u'_i u'_j + \overline{u_i} u'_j + \overline{u_j} u'_i})}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\overline{P} + P')}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \left(\frac{\partial(\overline{u_i + u'_i})}{\partial x_j} + \frac{\partial(\overline{u_j + u'_j})}{\partial x_i} \right) \right]$$

Ce qui donne, au final, les trois équations (pour $i=1,2,3$) de quantité de mouvement moyennées, dans le cas d'un écoulement permanent en moyenne (d'où la disparition de la dérivée temporelle):

$$\overline{u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) - \overline{u'_i u'_j} \right]$$

Ou bien sous la forme suivante :

$$\overline{u_j} \overline{u_{i,j}} = -\frac{1}{\rho} \overline{P}_{,i} + \left[v \left(\overline{u_{i,j}} + \overline{u_{j,i}} \right) - \overline{u'_i u'_j} \right]_{,j}$$

Les termes $-\left(\overline{u'_i u'_j}\right)$ sont appelés « *contraintes de Reynolds* », par analogie aux contraintes visqueuses avec lesquelles elles sont en sommation, est forment ainsi un tenseur symétrique dit « *tenseur de contrainte de Reynolds* ». Il en résulte évidemment 6 termes inconnus supplémentaires.

Le système d'équations moyennées décrivant l'écoulement turbulent, appelées équations de Navier-Stokes moyennées de Reynolds ou *RANS* (*Reynolds Averaged Navier Stokes*), s'écrit alors sous la forme suivante avec l'écriture indicielle :

$$\overline{u_{i,j}} = 0$$

$$\overline{u_j \overline{u_{i,j}}} = -\frac{1}{\rho} \overline{P_{,i}} + \left[\nu \left(\overline{u_{i,j}} + \overline{u_{j,i}} \right) - \overline{u'_i u'_j} \right]_{,j}$$

Dans le cas d'un écoulement de convection thermique, le terme de poussée qui est rajouté au second membre des équations de Navier-Stokes s'écrira dans les équations moyennées précédentes sous la forme : $-\overline{g_j} \beta (\overline{T} - \overline{T_0}) \delta_{ij}$

Dans ce cas toujours, l'équation de l'énergie moyennée est obtenue de la même manière :

$$\overline{\frac{\partial(\overline{T} + T')}{\partial t}} + (\overline{u_j} + \overline{u'_j}) \frac{\partial(\overline{T} + T')}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu}{Pr} \frac{\partial(\overline{T} + T')}{\partial x_j} \right)$$

D'où, l'équation moyennée de l'énergie :

$$\overline{u_j} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu}{Pr} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j} - \overline{T' u'_j} \right) \quad \text{ou bien sous la forme :} \quad \overline{u_j \overline{T}_{,j}} = \left(\frac{\nu}{Pr} \overline{T}_{,j} - \overline{T' u'_j} \right)_{,j}$$

Les termes $-\left(\overline{T' u'_j}\right)$ sont appelés les *flux thermiques turbulents*, par analogie aux flux de diffusion thermique avec lesquels ils sont sommés. Trois autres termes inconnus font leur apparition dans le ca convectif.

On voit ainsi apparaitre des inconnues supplémentaires dans le système d'équations :

- $-\overline{u'_i u'_j}$ → les contraintes de Reynolds
- $-\overline{T' u'_i}$ → flux thermique turbulent

⇒ Il se pose alors le problème de fermeture des équations.

Pour toute autre grandeur transportable Φ , on obtient l'équation moyennée suivante :

$$\left(\overline{\rho u_j \Phi} \right)_{,j} = \left(\Gamma \overline{\Phi}_{,j} - \overline{\rho u_j \Phi'} \right)_{,j} + \overline{S}$$

Le terme $-\overline{\rho u'_j \Phi'}$ est un flux de diffusion turbulent.

Chapitre 2 : Les modèles de turbulence

1. Introduction

La décomposition de Reynolds a permis d'écrire un certain nombre d'équations pour les inconnues du problème qui sont des valeurs moyennes. Cependant, on introduit dans chaque équation des inconnues supplémentaires. Il s'agit alors de fermer le problème en introduisant des modèles pour les inconnues supplémentaires.

On distingue deux grandes classes de modèles :

- Les modèles du *premier ordre* ou modèles à viscosité turbulente basés sur l'hypothèse, dite de Boussinesq, qui consiste à modéliser directement les contraintes de Reynolds à l'aide du concept de *viscosité turbulente*, par analogie aux contraintes visqueuses.
- Les modèles du *second ordre* qui consistent à calculer directement les tensions de Reynolds moyennant leurs équations de transport.

2. Modèles de fermeture du premier ordre

2.1 Hypothèse de Boussinesq : Concept de viscosité turbulente

En constatant, du point de vue mathématique, que les termes supplémentaires dans les équations moyennées sont rajoutés aux termes de dissipation visqueuse et en considérant, du point de vue physique, que l'interaction entre le champ moyenné et le champ fluctuant se réduit à un terme de dissipation appelé *viscosité turbulente* μ_t , en suivant une approche analogue à celle développée pour exprimer le terme de contraintes visqueuses dans le cas de fluide Newtonien, les contraintes de Reynolds (R_{ij}) peuvent être modélisées par la relation de Boussinesq suivante :

$$R_{ij} = -\overline{\rho u'_i u'_j} = \mu_t \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right] - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

Où k est l'énergie cinétique turbulente définie par :

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} = \frac{1}{2} (\overline{u'_1 u'_1} + \overline{u'_2 u'_2} + \overline{u'_3 u'_3})$$

Le terme $\frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}$, qui s'annule pour les termes extra-diagonaux du tenseur de Reynolds, est rajouté à l'expression des contraintes de Reynolds afin d'éviter d'avoir une *Trace nulle* ($\overline{u'_i u'_i} = 0$), ce qui est physiquement incorrecte puisque la Trace du tenseur de Reynolds est égale à deux fois l'énergie cinétique de turbulence k .

On vérifie comme suit :

$$R_{11} = -\overline{\rho u'_1 u'_1} = \mu_t \left[\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} \right] - \frac{2}{3} \rho k$$

$$R_{22} = -\overline{\rho u'_2 u'_2} = \mu_t \left[\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} \right] - \frac{2}{3} \rho k$$

$$R_{33} = -\overline{\rho u'_3 u'_3} = \mu_t \left[\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} \right] - \frac{2}{3} \rho k$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Tr}(R_{ii}) &= R_{11} + R_{22} + R_{33} = -\rho (\overline{u'_1 u'_1} + \overline{u'_2 u'_2} + \overline{u'_3 u'_3}) \\ &= \mu_t \left[2 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} + 2 \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} \right] - 3 \cdot \frac{2}{3} \rho k \\ &= 2 \mu_t \left[\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} \right] - 2 \rho k \end{aligned}$$

$$\text{Or : } \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} = 0 \text{ (continuité)} \Rightarrow (\overline{u'_1 u'_1} + \overline{u'_2 u'_2} + \overline{u'_3 u'_3}) = 2k,$$

$$\text{c.à.d : } k = \frac{1}{2} (\overline{u'_1 u'_1} + \overline{u'_2 u'_2} + \overline{u'_3 u'_3}), \Rightarrow \text{ce qui doit être trouvé.}$$

La viscosité turbulente μ_t n'est pas une propriété du fluide mais une propriété de l'écoulement. Elle est supposée due aux collisions entre les tourbillons (qui sont une

caractéristique de la turbulence), tout comme la viscosité moléculaire μ résulte de l'échange de quantité de mouvement après collisions des molécules.

Après analyse des échelles des grandeurs liées la viscosité turbulente, une approximation raisonnable de celle-ci peut s'écrire comme suit:

$$\mu_t \equiv (\text{const.}) \rho \cdot V \cdot L$$

Ou bien, pour le cas incompressible : $\nu_t \equiv (\text{const.}) V \cdot L$

où : V est une *échelle de vitesse* et L est une *échelle de longueur*

Beaucoup de modèles de turbulence se basent sur le concept de viscosité turbulente. La finesse dans la définition des échelles de vitesse et de longueur permet de différencier ces modèles entre eux. Le nombre d'équations dites *de fermeture* renseigne sur le raffinement du modèle.

Les modèles reposant sur ce concept consistent donc à proposer explicitement des relations algébriques ou bien établir des équations de transport pour ces deux nouvelles variables caractérisant la turbulence k et ν_t .

Ces modèles se distinguent entre eux par le nombre d'équations de fermetures utilisées pour définir les échelles de vitesse et de longueur.

2.2 Modèles à zéro équation : Modèles algébriques

Ces modèles ne font appel à aucune équation de transport de la turbulence. Ce type de modèles est surtout destiné aux écoulements où il n'y a qu'un seul gradient de vitesse significatif qui est normal à la direction de l'écoulement, comme c'est le cas par exemple de l'écoulement de couche limite. Le modèle algébrique le plus connu est celui proposé par Prandtl (1925) dit de « *longueur de mélange* » qui consiste à représenter l'échelle de vitesse V

comme étant : le produit du gradient de vitesse prépondérant , soit : $\left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|$, et de l'échelle de longueur qui est la *longueur de mélange* l_m .

Ce qui conduit à une vitesse caractéristique de la forme : $V = l_m \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|$

D'où, l'expression de la viscosité turbulente : $\mu_t = (\text{cons.}) \rho l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|$

La longueur de mélange l_m est introduite par analogie au *libre parcours moyen* rencontré dans la théorie cinétique des gaz. Ainsi, on peut dire que c'est le libre parcours moyen des petits tourbillons. Elle est déterminée par des relations empiriques allant d'une simple relation linéaire à des expressions plus complexes selon le type d'écoulement étudié.

Ci-dessous, quelques relations donnant la longueur de mélange pour certains écoulements :

→ Écoulement parallèle à une paroi plane : $l_m = 0.41 y$

→ Écoulement en conduite : $\frac{l_m}{R} = 0.14 - 0.08 \left(1 - \frac{y}{R}\right)^2 - \left(1 - \frac{y}{R}\right)^4$

Avec : R rayon de la conduite et y la distance à la paroi

→ Jet : a) *Plan* : $l_m = 0.09 \delta_{0.5}$; b) *Rond* : $l_m = 0.075 \delta_{0.5}$

Avec : $\delta_{0.5}$ épaisseur de vitesse moitié (distance à l'axe où : $U(x, \delta) = 0.5 U(x, 0)$)

D'autres types de relations sont aussi proposés dans la littérature pour le cas d'écoulement de couche limite se développant dans un écoulement turbulent sur une plaque plane.

L'inconvénient pour ce type de modèle est qu'il est limité aux écoulements simples et ne peut être utilisé pour les écoulements avec recirculation, par exemple, et en plus la distribution de l_m n'est pas universelle même pour des écoulements simples. Ainsi, les modèles de turbulence basés sur cette notion n'ont pas un degré de généralité élevé.

2.3 Modèles à une équation

Afin de mieux prendre en compte l'effet de transport et l'historique de l'écoulement turbulent, on préfère généralement se tourner vers les modèles qui consistent à résoudre les équations de transport des quantités caractérisant la turbulence.

➤ La viscosité turbulente ν_t qui apparaît dans la relation de Boussinesq en est la première de ces quantités. On s'intéresse alors à la construction d'une équation de transport pour la viscosité turbulente.

⇒ C'est le cas du **modèle à une équation de Spalart-Allmaras**. L'équation de transport est établie sous des hypothèses empiriques et des analyses dimensionnelles. Ce modèle requiert une certaine finesse pour capturer un champ de gradient de vitesse avec un modèle algébrique. Le modèle à une équation de Spalart-Allmaras est largement utilisé dans les applications de l'industrie aérospatiale.

➤ L'énergie cinétique de la turbulence k est l'autre quantité turbulente, étant donné qu'elle représente la mesure de l'intensité des fluctuations, dont une équation de transport est introduite dans ce type de modèles. Pour cela, on remplace dans l'expression de la viscosité turbulente l'échelle de vitesse par la racine carrée de k .

⇒ La viscosité turbulente est définie dans ce cas par :
$$\mu_t = (\text{const.}) \rho k^{1/2} l_m$$

De la même manière que pour le modèle algébrique de Prandtl, l_m est déterminée par des expressions algébriques. Pour fermer le système d'équations, on construit l'équation de transport de k à partir des équations de Navier-Stokes. On obtient ainsi **le modèle à une équation k - l_m** .

La difficulté des modèles à une équation et du modèle de la longueur de mélange réside surtout dans la description de l_m .

2.4 Modèles à deux équations

La difficulté de trouver des expressions algébriques universelles pour l'échelle de longueur L d'une part et, d'autre part, parce qu'une longueur caractéristique de l'écoulement est sujette aux processus de transport et à l'historique de cet écoulement, ceci amène à introduire une équation de transport supplémentaire d'une grandeur turbulente qui sera liée à l'échelle de longueur L .

2.4.1 Le Modèle k - ε

La grandeur turbulente liée à L la plus largement adoptée et pour laquelle une équation de transport peut être construite, est le *taux de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence* ε .

On a dans ce cas :

- L'échelle de longueur définie par : $L = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$
- L'échelle de vitesse est définie par : $V = k^{1/2}$

La viscosité turbulente est alors : $\mu_t = c_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon}$

C'est la relation de Kolmogorov-Prandtl, c_μ est une constante empirique.

La grandeur ε , appelée taux de dissipation de l'énergie cinétique, est définie par l'expression:

$$\rho\varepsilon = \mu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}$$

Le modèle k - ε conçu par B. E Launder et D. B Spalding (1972) est devenu le plus populaire des modèles de turbulence pour sa simplicité et la possibilité de l'utiliser pour différents types d'écoulement.

Néanmoins, ce modèle présente, sous sa version standard, un défaut majeur au voisinage des parois : il ne prédit pas correctement cette zone en raison des faibles intensités turbulentes qui la caractérisent. Une version améliorée a été introduite plus tard corrigeant cet inconvénient

par l'utilisation des « lois de paroi » permettant de bien simuler la zone proche paroi qui aussi une zone de faibles nombres de Reynolds (*Low-Re*).

2.4.2 Le Modèle $k-\omega$

Le premier modèle de turbulence à deux-équations est celui proposé par Kolmogorov (1942). Ce modèle, qui est connu sous le nom de *modèle $k-\omega$* , fait intervenir une équation de transport de la fréquence ω en plus de celle de k . On peut définir la fréquence ω par le rapport entre k et ε . Une version plus élaborée de ce modèle par le traitement de la zone proche paroi a été mise en œuvre plus tard par Wilcox (1988). Malgré que le *modèle $k-\omega$* n'est pas très populaire comme l'est le *modèle $k-\varepsilon$* , il possède plusieurs avantages :

- des performances bonnes pour les écoulements transitoires et ceux avec recirculations.
- très stable numériquement et converge rapidement par rapport au *modèle $k-\varepsilon$* .
- moins compliquée et plus économique en temps, notamment sa version *low-Re*, pour le traitement du voisinage de paroi, par rapport au *modèle $k-\varepsilon$ avec lois de paroi* étant donné qu'elle ne fait pas appel au calcul de distance à la paroi (Y^+) et d'autres grandeurs aussi.

→ Le principal inconvénient du *modèle $k-\omega$* est qu'il est très sensible à la condition aux limites sur ω sur les frontières libre dans le cas des écoulements cisailés libres.

On peut dire, en résumé, que le *modèle $k-\varepsilon$* prédit bien loin des parois et le *modèle $k-\omega$* prédit bien proche des parois. Une combinaison des deux modèles a permis d'introduire un nouveau modèle dit *SST (Shear Stress Transport)*.

3. Modèles de fermeture du second ordre

L'autre approche pour la fermeture du système d'équations moyennées est de déterminer directement les *tensions de Reynolds* sans utiliser le concept de viscosité turbulente et ceci en écrivant explicitement leurs équations de transport.

La procédure pour l'obtention de ces équations est la suivante :

- En soustrayant aux équations de quantité de mouvement instantanées les équations de quantité de mouvement moyen on obtiendra les équations de transports pour les fluctuations.
- En multipliant scalairement chaque équation de transport des fluctuations par les fluctuations et en prenant la moyenne on obtient les équations de transport des contraintes de Reynolds :

$$\begin{aligned} \bar{u}_j \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} = & -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{u'_i p'}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u'_j p'}}{\partial x_i} \right) - \left(\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial \overline{u'_i u'_j u'_k}}{\partial x_k} \\ & + \nu \frac{\partial^2 \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k \partial x_k} + 2\nu \frac{\partial \overline{u'_i} \partial \overline{u'_j}}{\partial x_k \partial x_k} \end{aligned}$$

Les termes du second membre désignent :

$$\Pi_{ij} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{u'_i p'}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u'_j p'}}{\partial x_i} \right) : \text{ Terme de Corrélation vitesse-pression}$$

$$P_{ij} = -\left(\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right) : \text{ Terme de Production}$$

$$T_{ij} = -\frac{\partial \overline{u'_i u'_j u'_k}}{\partial x_k}, \quad D_{ij} = \nu \frac{\partial^2 \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k \partial x_k} : \text{ Terme de Transport turbulent et de Diffusion visqueuse}$$

$$\varepsilon = 2\nu \frac{\partial \overline{u'_i} \partial \overline{u'_j}}{\partial x_k \partial x_k} : \text{ Terme de Dissipation turbulente}$$

Il y aura donc six équations supplémentaires dans ce cas, d'où la lourdeur de résolution et le long temps de calcul que peut présenter ce type de modèle. Par contre, il donne des résultats très satisfaisants comparativement aux modèles basés sur la viscosité turbulente.

4. Autres méthodes de résolution de la turbulence :

4.1 Simulation directe (Direct Numerical Simulation DNS)

Afin d'éviter de modéliser les équations, on peut choisir de résoudre numériquement les équations instantanées de Navier-Stokes. L'ennui c'est que cela n'est possible qu'à la condition de choisir un maillage qui soit plus resserré que la taille des plus petits tourbillons. Il faut alors résoudre un grand nombre de fois les équations instantanées dans tout le champ de l'écoulement afin d'en extraire des moyennes, seules exploitables par l'ingénieur. Ainsi, à un maillage très fin, on associe un grand nombre de résolutions. Une telle méthode demande un ordinateur très puissant doté de beaucoup de mémoire et reste à l'heure actuelle du domaine de la recherche pour des configurations géométriques simples. L'avantage est néanmoins de permettre de véritables « expériences » numériques utiles à la modélisation.

4.2 Simulation des grandes échelles (Large Eddy Simulation LES)

Lorsqu'il n'est plus possible de résoudre directement toutes les structures d'un écoulement on peut avoir recours à la « Large Eddy Simulation » (LES) : qui consiste à ne résoudre que les plus grandes échelles de l'écoulement. Les grandes échelles porteuses d'énergie sont a priori bien calculées. La non-résolution directe des petites échelles nécessite donc la modélisation de leurs effets sur l'écoulement. Le modèle correspondant est appelé *modèle de sous-maille*. L'aspect dissipatif est introduit par une viscosité supplémentaire appelée *viscosité de sous-maille*. Ainsi, d'une part, on modélise les équations à l'échelle de la maille et, d'autre part, on résout en tout point et à chaque instant les équations instationnaires sur l'ensemble du domaine. On fait donc en quelque sorte une *DNS* filtrée au niveau sous-maille.

Chapitre 3 : La Modélisation K-epsilon

1. Introduction

La conception du modèle k- ϵ revient incontestablement à B.E. Launder et D.B. Spalding aux débuts des années soixante-dix. L'avènement d'un modèle moins complexe et plus accessible au numéricien, comme l'est le modèle k- ϵ , paraissait indispensable afin d'espérer réaliser quelques avancées notables dans le domaine aussi complexe qu'est la turbulence.

2. Construction de l'équation de transport de k:

Les étapes pour la construction de l'équation de transport de k se présentent comme suit :

- 1- On multiplie l'équation du mouvement moyen par la composante \bar{u}_i de la vitesse moyenne.
- 2- En posant : $\bar{k} = \frac{1}{2} \bar{u}_i \bar{u}_i$, comme étant l'énergie cinétique du mouvement moyen turbulent, à ne pas confondre avec l'énergie cinétique de turbulence k définie auparavant, on obtient l'équation de transport de \bar{k} .
- 3- D'autre part, en multipliant les équations de Navier-Stokes par la composante instantanée u_i et en moyennant les équations résultantes on aboutit à une équation de type transport de $(k + \bar{k})$.
- 4- En soustrayant l'équation de transport de \bar{k} de celle trouvée à la troisième étape, on obtient une première écriture de l'équation de k avec un terme de diffusion qui nécessite une modélisation.

- 5- Ce terme est alors modélisé d'une manière analogue à l'approximation de Boussinesq.
- 6- On retrouve alors l'équation de transport de k sous sa forme finale.

Détails de la démonstration de l'équation de k :

- Les équations du mouvement moyen s'écrivent :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \overline{u'_i u'_j} \right]$$

- On multiplie l'équation par \bar{u}_i :

$$\bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_i \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\bar{u}_i \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \overline{u'_i u'_j} \right]$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_i}{2 \partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_i}{2 \partial x_j} = -\bar{u}_i \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \overline{u'_i u'_j} \right]$$

- On pose $\bar{k} = \frac{1}{2} \bar{u}_i \bar{u}_i$: l'énergie cinétique de l'écoulement moyen, on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} = -\bar{u}_i \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \overline{u'_i u'_j} \right]}$$

- D'autre part, on multiplie l'équation de Navier-Stokes instantané par u_i :

$$u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_j u_i}{\partial x_j} = -u_i \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]$$

- En effectuant la décomposition de Reynolds comme suit:

$$\begin{aligned}
 & (\bar{u}_i + u'_i) \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial t} + (\bar{u}_i + u'_i) \frac{\partial(\bar{u}_j + u'_j)(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} \\
 & = -(\bar{u}_i + u'_i) \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{P} + P')}{\partial x_i} \\
 & + (\bar{u}_i + u'_i) \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \left(\frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\bar{u}_j + u'_j)}{\partial x_i} \right) \right]
 \end{aligned}$$

→ En développant les termes on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \left[\bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial u'_i}{\partial t} + u'_i \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + u'_i \frac{\partial u'_i}{\partial t} \right] \\
 & + \left[\bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_j \bar{u}_i}{\partial x_j} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_j u'_i}{\partial x_j} + \bar{u}_i \frac{\partial u'_j \bar{u}_i}{\partial x_j} + \bar{u}_i \frac{\partial u'_j u'_i}{\partial x_j} \right] \\
 & + \left[u'_i \frac{\partial \bar{u}_j \bar{u}_i}{\partial x_j} + u'_i \frac{\partial \bar{u}_j u'_i}{\partial x_j} \right. \\
 & \left. + u'_i \frac{\partial u'_j \bar{u}_i}{\partial x_j} + u'_i \frac{\partial u'_j u'_i}{\partial x_j} \right] \\
 & = - \left[\bar{u}_i \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \bar{u}_i \frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial x_i} + u'_i \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + u'_i \frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial x_i} \right] \\
 & + \left[\bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \left(\frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\bar{u}_j + u'_j)}{\partial x_i} \right) \right) \right. \\
 & \left. + u'_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \left(\frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\bar{u}_j + u'_j)}{\partial x_i} \right) \right) \right]
 \end{aligned}$$

→ En moyennant l'équation ci-dessus comme suit :

$$\begin{aligned} & \left[\overline{u_i} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \overline{u_i} \frac{\partial u'_i}{\partial t} + u'_i \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + u'_i \frac{\partial u'_i}{\partial t} \right] + \left[\overline{u_i} \frac{\partial \overline{u_j} \overline{u_i}}{\partial x_j} + \overline{u_i} \frac{\partial u'_j \overline{u_i}}{\partial x_j} + \overline{u_i} \frac{\partial u'_j u'_i}{\partial x_j} + \overline{u_i} \frac{\partial \overline{u_j} u'_i}{\partial x_j} \right] \\ & + \left[u'_i \frac{\partial u'_j \overline{u_i}}{\partial x_j} + u'_i \frac{\partial \overline{u_j} \overline{u_i}}{\partial x_j} + u'_i \frac{\partial u'_j u'_i}{\partial x_j} + u'_i \frac{\partial \overline{u_j} u'_i}{\partial x_j} \right] \\ & = - \left[\overline{u_i} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \overline{u_i} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial x_i} + u'_i \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + u'_i \frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial x_i} \right] \end{aligned}$$

$$+ \left[\overline{u_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \left(\frac{\partial (\overline{u_i} + u'_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial (\overline{u_j} + u'_j)}{\partial x_i} \right) \right) + u'_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \left(\frac{\partial (\overline{u_i} + u'_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial (\overline{u_j} + u'_j)}{\partial x_i} \right) \right) \right]$$

→ On aboutit à l'équation:

$$\begin{aligned} & \overline{u_i} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \overline{u'_i} \frac{\partial u'_i}{\partial t} + \overline{u_j} \overline{u_i} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \overline{u_i} \frac{\partial u'_j u'_i}{\partial x_j} + \overline{u'_j u'_i} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \overline{u'_i} \frac{\partial u'_j u'_i}{\partial x_j} + \overline{u_j} u'_i \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \\ & = - \overline{u_i} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} - \overline{u'_i} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial x_i} + \overline{u_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \right] + \overline{u'_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \right] \end{aligned}$$

→ Ou encore :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \overline{u_i} \overline{u_i}}{2 \partial t} + \frac{\partial \overline{u'_i} u'_i}{2 \partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial \overline{u_i} \overline{u_i}}{2 \partial x_j} + \overline{u_j} \frac{\partial \overline{u'_i} u'_i}{2 \partial x_j} + \overline{u_i} \frac{\partial u'_j u'_i}{\partial x_j} + \overline{u'_j u'_i} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_i u'_j u'_i}{2 \partial x_j} \\ & = - \overline{u_i} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} - \overline{u'_j} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial x_j} + \overline{u_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \right] + \overline{u'_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \right] \end{aligned}$$

→ Sachant que : $k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$ et $\bar{k} = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i}$, on obtient :

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} + \bar{u}_i \frac{\partial \overline{u'_j u'_i}}{\partial x_j} + \overline{u'_j u'_i} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\overline{\partial u'_i u'_j u'_i}}{2 \partial x_j} =$$

$$\bar{u}_i \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} - \overline{u'_j \frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial x_j}} + \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] + \overline{u'_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \right]}$$

→ En retranchant, de cette équation, l'équation de l'énergie cinétique moyenne \bar{k} retrouvée plus haut (en encadré), on aboutit à la première écriture de l'équation de k :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} + \overline{u'_j u'_i} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\overline{\partial u'_i u'_j u'_i}}{2 \partial x_j}$$

$$= -\overline{u'_j \frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial x_j}} + \overline{u'_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \right]}$$

Ou bien :

$$\rho \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho \frac{\overline{u'_i u'_j u'_i}}{2} + \overline{u'_j P'} \right] - \overline{\rho u'_j u'_i} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \overline{u'_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)}$$

Le dernier terme de l'équation précédente est développé comme suit :

$$\overline{u'_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)} = \overline{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u'_i u'_i}{2 \partial x_j} \right)} - \overline{\mu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - \overline{\mu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}$$

→ Ce qui transforme l'équation en :

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \\ &= - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho \frac{\overline{u'_i u'_j u'_i}}{2} + u'_j P' \right] - \overline{\rho u'_j u'_i} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \\ & \quad - \mu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \end{aligned}$$

- Le premier terme du second membre (entre crochets) de l'équation est modélisé d'une manière analogue à l'approximation de Boussinesq, par l'expression :

$$- \left[\rho_0 \frac{\overline{u'_i u'_j u'_i}}{2} + u'_j P' \right] = \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j}$$

Où : la constante σ_k est une constante empirique

- On définit, respectivement, le terme de production et le terme de dissipation :

$$P_k = - \overline{\rho u'_j u'_i} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \left[\mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$$

$$\rho \varepsilon = \mu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}$$

- D'où l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente k :

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial(\rho k)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \rho \varepsilon$$

- En prenant en compte l'hypothèse de stationnarité en moyenne et l'incompressibilité on aura :

$$\rho \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \rho \varepsilon$$

3. Construction de l'équation de transport de ε

Une équation de transport exacte pour ε peut être déduite des équations de Navier-Stokes. Cependant, une telle équation contiendrait un nombre considérable de termes à modéliser et dont les caractéristiques sont inconnues. Ainsi, l'équation de transport pour le taux de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence, ε , est obtenue après avoir approché les termes de production et de dissipation sur des bases essentiellement empiriques. L'équation de transport standard correspondante s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + \frac{\varepsilon}{k} (C_{1\varepsilon} P_k - C_{2\varepsilon} \rho \varepsilon)$$

où : $C_{1\varepsilon}$, $C_{2\varepsilon}$ et σ_ε sont des constantes empiriques.

4. Modèle k- ε en convection thermique

Il est à noter que ce modèle k- ε a été conçu initialement pour des écoulements purement dynamiques, puis étendu aux problèmes de convection thermique turbulente. Dans ce cas, en plus des contraintes des Reynolds, les flux thermiques turbulents sont modélisés ainsi :

$$-\rho \overline{u_i' T'} = \frac{\mu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i}$$

où : σ_t est le nombre de Prandtl turbulent.

Les équations de k et de ε seront alors légèrement modifiées du fait de l'introduction d'un terme production (ou de génération) supplémentaire dû à l'effet de poussée (« buoyancy effect ») défini par l'expression :

$$G_k = g_i \beta \frac{\mu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \delta_{ij}$$

Dans le cas de la convection forcée, le terme G_k n'existe pas dans les équations de transport de k et de ε , il intervient en convection naturelle et en convection mixte. Ce terme G_k qui est proportionnel au gradient de température génère un mouvement secondaire qui contribue à l'accroissement de l'intensité de la turbulence.

5. Les « lois de paroi » associées au modèle k- ε

L'application du modèle k- ε à l'étude des écoulements turbulents est basée sur l'hypothèse que ces écoulements sont totalement turbulents, on ne peut donc appliquer le modèle qu'aux régions où cette hypothèse est vérifiée. Or, près d'une paroi solide, la partie proche paroi de la couche limite est essentiellement laminaire à cause de l'effet prépondérant des contraintes visqueuses. Les grandeurs turbulentes, k et ε notamment, sont théoriquement nulles et numériquement très faibles dans ces régions. Par conséquent, le modèle k- ε n'est plus valable et ne peut être appliqué dans ces endroits.

Afin de remédier à cette lacune du modèle k- ε standard on a pensé à une autre approche qui consiste à imposer des conditions aux limites aux premiers nœuds du maillage et non plus aux niveaux des parois. Ceci s'explique par le fait que l'attention est portée, avec cette approche, sur la contrainte tangentielle à la paroi et non plus à la vitesse elle-même (laquelle est nulle à la paroi). Les lois de paroi ou « wall-functions » sont utilisées alors pour fournir les conditions aux limites pour les contraintes aux niveaux des parois, nécessaires à la résolution de l'équation de quantité de mouvement; la diffusion de la quantité de mouvement est représentée d'ailleurs par la contrainte à la paroi.

Ces lois sont déterminées expérimentalement après analyse de la couche limite dans un écoulement turbulent. En effet, la couche limite en écoulement turbulent peut être caractérisée en utilisant deux grandeurs adimensionnelles, une vitesse u^+ et une distance normale à la paroi y^+ , définies par :

$$u^+ = \frac{u_w}{u^*} \quad \text{et} \quad y^+ = \frac{\rho y_w u^*}{\mu}$$

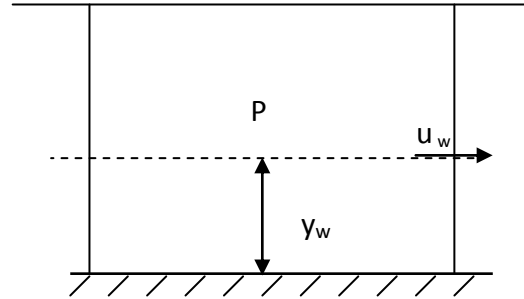


Figure 3.1 : Volume de contrôle près de la paroi

Où : u_w et y_w sont, respectivement, la composante de la vitesse moyenne parallèle à la paroi au voisinage de celle-ci et la distance normale à la paroi de cette composante de vitesse (voir figure). La grandeur u^* est la vitesse de frottement définie en fonction de la contrainte tangentielle à la paroi, τ_w , par l'expression :

$$u^* = \sqrt{\tau_w / \rho}$$

La relation entre u^+ et y^+ est déterminée expérimentalement comme étant une loi

logarithmique définie comme suit : $u^+ = \frac{1}{\chi} \ln(Ey^+)$ pour : $y^+ > 7$

Avec : $\chi=0.41$ est la constante de Van Karman, et E une constante empirique égale à 9,7.

En considérant que dans une couche de fluide très mince près de la paroi un équilibre local de l'énergie de turbulence prévaut et en appliquant la loi logarithmique universelle ci-dessus, la contrainte à la paroi peut s'exprimer par la relation :

$$\tau_w = - \frac{\rho C_\mu^{1/4} k_w^{1/2} u_w}{u^+}$$

$$\text{avec : } y^+ = \rho C_\mu^{1/4} k_w^{1/2} y_w / \mu$$

Ainsi, la contrainte tangentielle à la paroi joue le rôle de condition aux limites pour les équations de mouvement. Il faut noter qu'au moment où le modèle k-ε n'est valable que dans les régions où règne la turbulence, on doit faire en sorte que la première ligne de grille adjacente à la paroi demeure à une distance $y^+ > 7$. Si, durant la résolution, la valeur de y^+ est inférieure à 7, la relation laminaire $u^+ = y^+$ est alors employée.

Les conditions aux limites pour les équations de l'énergie cinétique et le taux de dissipation sont obtenues en considérant que la turbulence est en équilibre local près de la paroi. Cette hypothèse d'équilibre local implique que le transport de la turbulence est négligeable et par conséquent le taux local de génération de l'énergie cinétique turbulente est équilibré par le

taux local de dissipation :

$$\rho \varepsilon = -\rho \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

L'énergie cinétique près de la paroi, k_w , est obtenue par la résolution directe de son équation correspondante après avoir introduit les modifications suivantes:

- La diffusion de l'énergie cinétique k à travers la paroi est considéré nulle.
- Les termes de production, P, et de dissipation, ε, dans un volume de contrôle 'Vol' sont modifiés, en prenant en compte la contrainte à la paroi, comme suit :

$$P = \iint_{Vol} \mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 dv = \tau_t \frac{u_w}{y_w} Vol$$

$$- \iint_{Vol} \rho \varepsilon dv = - \iint_{Vol} \rho \frac{k_w^2}{\tau_w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = - \frac{\rho C_\mu^{3/4} k_w^{3/2} u^+}{y_w} Vol$$

Pour l'équation de transport correspondant à ε , les conditions aux limites aux niveaux des parois sont déduites de l'observation que l'échelle de longueur $\frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$ varie linéairement avec y près de la paroi ce qui donne :

$$\varepsilon_w = \frac{C_\mu^{3/4} k_w^{3/2}}{\chi y_w}$$

6. Exemple d'application du modèle k- ε :

« Convection naturelle turbulente dans une cavité »

Hypothèses et position du problème :

Les hypothèses du problème sont :

- Le fluide est visqueux, newtonien et incompressible.
- L'écoulement turbulent pleinement développé et est bidimensionnel et permanent en moyenne.
- La masse volumique est considérée constante sauf dans le terme dû à la poussée thermique

Le problème physique, comme représenté sur la figure ci-dessous, consiste en une cavité rectangulaire, remplie de fluide, dont la paroi inférieure horizontale est chauffée alors que la paroi supérieure est refroidie. Les deux parois verticales sont adiabatiques.

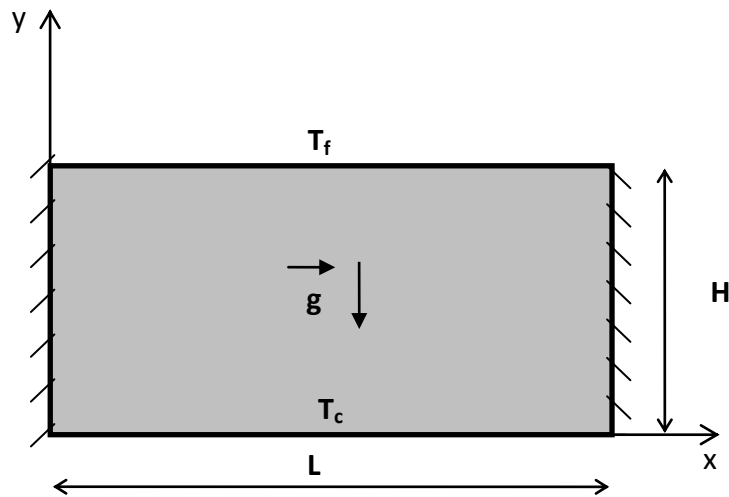


Figure 3.2 : Géométrie de l'exemple étudié

Equations de base de l'écoulement

En prenant en compte les hypothèses ci-dessus, on peut écrire les équations de base instantanées de convection naturelle comme suit:

- Equation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

- Equations de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + g\beta(T - T_f)$$

- Equation de l'énergie:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

Mise en œuvre du modèle k-ε

En moyennant les équations de mouvement et celle de l'énergie on obtient les équations régissant l'écoulement moyen de convection naturelle turbulente :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0$$

$$\bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \overline{u'_i u'_j} \right) + \delta_{i2} \beta (\bar{T} - \bar{T}_f) g$$

$$\bar{u}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{v}{Pr} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} - \overline{T' u'_j} \right)$$

Le modèle à deux équations de fermeture k-ε est alors adopté, donnant lieu au système fermé ci-dessus :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(v + v_t) \left(2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(v + v_t) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right]$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(v + v_t) \left(2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[(v + v_t) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right] + g \beta (\bar{T} - \bar{T}_f)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{v}{Pr} + \frac{v_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{v}{Pr} + \frac{v_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right]$$

$$\bar{u} \frac{\partial k}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] + P_k + G_k - \varepsilon$$

$$\bar{u} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(v + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(v + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right] + (C_{\varepsilon 1} (P_k + C_{\varepsilon 3} G_k) - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) \frac{\varepsilon}{k}$$

:

Avec :

$$P_k = v_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad \text{et} \quad G_k = -\frac{v_t}{\sigma_t} g \beta \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}$$

Les constantes empiriques prennent des valeurs qui diffèrent selon la version du modèle choisie. Pour la version standard du modèle k-ε, ces constantes prennent les valeurs suivantes : $C_{\varepsilon 1} = 1.44$, $C_{\varepsilon 2} = 1.92$, $C_\mu = 0.09$, $\sigma_t = 0.9$, $\sigma_k = 1$, $\sigma_\varepsilon = 1.3$.

La constante $C_{\varepsilon 3}$ est généralement donnée par l'expression : $C_{\varepsilon 3} = \tanh \left| \frac{\bar{v}}{\bar{u}} \right|$, de telle sorte qu'elle prend la valeur 0 pour un écoulement horizontal et 1 pour un écoulement vertical . Par contre, si on utilise les « lois de paroi » sa valeur est de 0.7 .

Mise sous forme adimensionnelle

Les équations sont adimensionnées grâce aux grandeurs de références recommandées pour le cas de la convection naturelle à grands nombre de Rayleigh (Ra). Les grandeurs de références pour la longueur, les vitesses, les quantités turbulentes et la température sont, respectivement, définies comme suit:

$$L_r = H; \quad V_r = \frac{v}{H} \frac{Ra^{1/2}}{Pr}; \quad K_r = V_r^2; \quad \varepsilon_r = \frac{v}{H^2} V_r^2 \quad \text{et} \quad \Delta T = (T_c - T_f)$$

On aboutit alors à l'écriture finale des équations sous forme adimensionnelle (les grandeurs adimensionnelles sont écrites en majuscules en omettant le signe ' '):

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\text{Pr}}{\text{Ra}^{1/2}} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(1 + v_t \right) \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} \left(1 + v_t \right) \frac{\partial U}{\partial Y} \right] +$$

$$\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}^{1/2}} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(1 + v_t \right) \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} \left(1 + v_t \right) \frac{\partial V}{\partial X} \right] - \frac{\partial P}{\partial X}$$

$$U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = \frac{\text{Pr}}{\text{Ra}^{1/2}} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(1 + v_t \right) \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} \left(1 + v_t \right) \frac{\partial V}{\partial Y} \right] +$$

$$\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}^{1/2}} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(1 + v_t \right) \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial}{\partial Y} \left(1 + v_t \right) \frac{\partial V}{\partial Y} \right] - \frac{\partial P}{\partial Y} + \text{Pr} \theta$$

$$U \frac{\partial K}{\partial X} + V \frac{\partial K}{\partial Y} = \frac{\text{Pr}}{\text{Ra}^{1/2}} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(1 + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial K}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} \left(1 + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial K}{\partial Y} \right] +$$

$$\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}^{1/2}} \left(P_k + G_k - \varepsilon \right)$$

$$U \frac{\partial \varepsilon}{\partial X} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial Y} = \frac{\text{Pr}}{\text{Ra}^{1/2}} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(1 + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} \left(1 + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial Y} \right] +$$

$$\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}^{1/2}} \left[\left(C_{\varepsilon 1} \left(P_k + C_{\varepsilon 3} G_k \right) - C_{\varepsilon 2} \varepsilon \right) \frac{\varepsilon}{K} \right]$$

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Ra}^{1/2}} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(1 + \frac{1}{\text{Pr}} \frac{v_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial \theta}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} \left(1 + \frac{1}{\text{Pr}} \frac{v_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right]$$

avec :

$$v_t = C_\mu \frac{\text{Ra}}{\text{Pr}^2} \frac{K^2}{\varepsilon}, \quad G_k = -\text{Pr} \frac{v_t}{\sigma_t} \frac{\partial \theta}{\partial Y}$$

et

$$P_k = v_t \left[2 \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right)^2 \right]$$

Les équations sans dimensions se présente sous la forme générale suivante :

$$U \frac{\partial \Phi}{\partial X} + V \frac{\partial \Phi}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} \left(\Gamma_{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\Gamma_{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right) + S$$

Le terme source S est linéarisé par l'expression proposée par S. V. Patankar :

$$S_{\Phi} = S_c + S_p \Phi$$

Afin d'être en conformité avec les règles édictées par S.V. Patankar et en évitant ainsi toute possibilité d'instabilité numérique, les termes de production dans les équations de k et ε sont introduits dans le terme S_c (donnant un S_c positif) et les termes de dissipation dans le terme S_p (donnant un S_p négatif).

Le tableau ci-dessous donne les expressions de Γ et S pour chaque variable Φ:

	Φ	Γ	S
Eq. de continuité	1 (P)	1	0
Eq. de quantité de mvt. en U	U	$\frac{Pr}{Ra^{0.5}} (1 + \nu_t)$	$\frac{Pr}{Ra^{0.5}} \frac{\partial}{\partial X_j} \left[(1 + \nu_t) \frac{\partial U_j}{\partial X} \right] - \frac{\partial P}{\partial X}$
Eq. de quantité de mvt. en V	V	$\frac{Pr}{Ra^{0.5}} (1 + \nu_t)$	$\frac{Pr}{Ra^{0.5}} \frac{\partial}{\partial X_j} \left[(1 + \nu_t) \frac{\partial U_j}{\partial Y} \right] - \frac{\partial P}{\partial Y} + Pr\theta$
Eq. de l'énergie	θ	$\frac{1}{Ra^{0.5}} \left(1 + \frac{\nu_t}{\sigma_t Pr} \right)$	0

Eq. de l'énergie cinét. turb.	K	$\frac{Pr}{Ra^{0.5}} \left(1 + \frac{v_t}{\sigma_k} \right)$	$\frac{Pr}{Ra^{0.5}} (P_k + G_k - \varepsilon)$
Eq. du taux de dissip. de l'éne. cinét. turb.	ε	$\frac{Pr}{Ra^{0.5}} \left(1 + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right)$	$\frac{Pr}{Ra^{0.5}} (C_{\varepsilon 1} (P_k + C_{\varepsilon 3} G_k) - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) \frac{\varepsilon}{K}$

Conditions aux limites :

→ Les conditions aux limites thermiques sont définies simplement par :

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 & \text{parois adiabatiques} \\ \theta = 1 \text{ et } \theta = 0 & \text{respectivement, paroi chaude et paroi froide} \end{cases}$$

→ Avec le modèle k-ε standard les grandeurs U, V et K aux niveaux des parois solides vérifient les conditions de Dirichlet : U=V=K=0.

Si les lois de parois sont employées, les conditions aux limites correspondantes font intervenir la contrainte visqueuse (voir §.5 de ce chapitre).

La définition des conditions aux parois introduit la difficulté du choix des conditions aux limites pour le taux de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence ε. Ceci peut s'expliquer par la complexité de l'équation de transport de ε dans laquelle on trouve des

termes comme: $\frac{\varepsilon^2}{k}$ et $\frac{k^2}{\varepsilon}$ qui sont couplés entre eux. Une faible perturbation risque ainsi de

déstabiliser le processus itératif.

Dans ce cas ε à la paroi est exprimé pour le modèle k-ε standard de différentes manières parmi lesquelles on a:

$$\varepsilon_p = \infty \text{ et } \varepsilon_p = 2\nu \left(\frac{\partial k^{1/2}}{\partial n} \right)^2 ,$$

Où n désigne la direction normale à la paroi.

La seconde expression est de plus en plus utilisée, elle s'écrit en adimensionnel comme suit :

$$\varepsilon_p = 2 \left(\frac{\partial K^{1/2}}{\partial n} \right)^2$$

7. Exemple de code de calcul turbulent : TEAM

7.1 Présentation globale du code de calcul TEAM

TEAM (Turbulent Elliptic Algorithm-Manchester, Huang & Leschziner, 1983) est un code de calcul pour la simulation des écoulements turbulents bidimensionnels et permanents disposant du modèle k- ε , avec lois de paroi, comme modèle de fermeture des équations de la turbulence. il est basé sur la méthode des volumes finis, utilise un système décalé de grille et l'algorithme SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) de Patankar pour la correction de la pression.

Deux schémas de convection sont disponibles ; PLDS (Power Law Differencing Scheme) et QUICK (Quadratic Upwind Interpolation for Convection Kinematics). En général, on utilise le schéma QUICK pour toutes les variables ou bien une combinaison QUICK pour les équations de quantité de mouvement et PLDS pour les équations turbulentes (K et ε).

Le système discret est résolu avec une méthode itérative ligne-par-ligne (line-by-line) associé à l'algorithme TDMA (Tri-Diagonal Matrix Algorithm) qui transforme le système tri-diagonal en un système triangulaire supérieur, l'algorithme TDMA est aussi connu sous le nom de l'algorithme de Thomas.

7.2 Structure du code de calcul TEAM

Le code peut se divisé en trois parties :

- ❖ Le programme principal contient les séquences suivantes :
 - Déclaration des variables et des paramètres globaux apparaissant dans le code.
 - Appel des sous-programmes SET, GRID, INIT et INLET dans la subroutine USER.
 - Actualisation du coefficient de diffusion.
 - Appel de chaque subroutine de calcul de chaque variable du problème
 - Test de convergence.
 - Appel du sous-programme OUTF dans la subroutine USER
- ❖ La subroutine USER, c'est la partie susceptible de subir des modifications propres à chaque problème et qui est répartie en plusieurs sous-programmes contenant :
 - Le sous-programme SET : choix de la précision des calculs, choix du schéma de convection, critère de divergence, l'affichage à l'écran...
 - Le sous-programme GRID : définition du maillage ; uniforme ou non uniforme.
 - Le sous-programme INIT : initiation des variables du problème comme le nombre de Rayleigh, Reynolds ou et de Prandtl.
 - Le sous-programme INLET : définition ou lecture des champs initiaux.
 - Le sous-programme MODU, MODV, MODP, MODTE, MODED et MODT : définition des conditions aux limites pour chaque variable U, V, P, K, ϵ et T respectivement.
 - Le sous-programme OUTF : sauvegarde des résultats.
- ❖ Partie invariable, contenant les subroutines suivante :
 - Subroutine GEOM permettant de définir les différents paramètres géométriques.

- Subroutine de calcul des variables U, V, P, K, ϵ et T.
- Subroutine LISOLV résolvant le système d'équations par la méthode LBL-TDMA.

Le code TEAM utilise deux schéma de convection ; Quick et PLDS

Le schéma Quick : ce schéma est plus précis, mais moins stable et converge lentement par rapport au schéma PLDS, l'utilisation de ce schéma pour le cas de la cavité différentiellement chauffée pour les variables k et ϵ conduit à la divergence du système.

Le schéma PLDS : ce schéma est généralement utilisé pour les variables turbulentes k et ϵ .

7.3 Illustration du Programme TEAM

```

PROGRAM TEAM
PARAMETER (NX=80,NY=80)
CHARACTER*36 HEDU,HEDV,HEDP,HEDT,HEDK,HEDE,HEDVIS
COMMON
+/ALL/NI,NJ,NIM1,NJM1,NIM2,NJM2,GREAT,TINY
+/GEOMX/X(NX),XU(NX),SXCX(NX),UXCV(NX),FX(NX),UCVI(NX),UCVIP(NX)
+/GEOMY/IND,Y(NY),YV(NY),SYCV(NY),VYCV(NY),FY(NY),VCVJ(NY)
+ ,VCVJP(NY),RV(NY),R(NY),RSYCV(NY),RVYCV(NY)
+/VAR1/U(NX,NY),V(NX,NY),P(NX,NY),PP(NX,NY),T(NX,NY),
+ DU(NX,NY),DV(NX,NY),DEN(NX,NY),VIS(NX,NY)
+/VAR2/DENSIT,VISCOS,PRANTDL
+/UVEL/RESORU,NSWPU,URFU
+/VVEL/RESORV,NSWPV,URFV
+/PCOR/RESORM,NSWPP,URFP
+/TEMP/RESORT,NSWPT,URFT
+/HEADS/HEDU,HEDV,HEDP,HEDT,HEDK,HEDE,HEDVIS
COMMON
+/COEF/AP(NX,NY),AN(NX,NY),AS(NX,NY),AE(NX,NY),AW(NX,NY)
+ ,SU(NX,NY),SP(NX,NY)
+/COEFU/APU(NX,NY),ANU(NX,NY),ASU(NX,NY),AEU(NX,NY),AWU(NX,NY)
+ ,SUU(NX,NY),SPU(NX,NY)
+/COEFV/APV(NX,NY),ANV(NX,NY),ASV(NX,NY),AEV(NX,NY),AWV(NX,NY)
+ ,SUV(NX,NY),SPV(NX,NY)

```

```

+/OTHR1/NITER,MAXIT,URFVIS,URFDEN,IMON,JMON,IPREF,JPREF,SORMAX
+ ,FLOWIN,XMONIN,SMPW(NX)
+ /TKE/TE(NX,NY),RESORK,NSWPK,URFPK,URFK
+ /TED/ED(NX,NY),RESORE,NSWPE,URFE
+ /TURB1/PK(NX,NY),GK(NX,NY),CMU,C1,C2,C3,CAPPA,ELOG,PRED,PRTE

OPEN(6,FILE='OUTP1.dat',status='UNKNOWN')
OPEN(3,FILE='Yplus.dat',status='UNKNOWN')
OPEN(7,FILE='glrestb1.dat',status='UNKNOWN')
OPEN(8,FILE='rtbr1.dat',status='UNKNOWN')
OPEN(9,FILE='isotb1.dat',status='UNKNOWN')
OPEN(10,FILE='isocb1.dat',status='UNKNOWN')
OPEN(11,FILE='isovb1.dat',status='UNKNOWN')
OPEN(12,FILE='isokb1.dat',status='UNKNOWN')
OPEN(13,FILE='isoedb1.dat',status='UNKNOWN')
OPEN(15,FILE='posrestb.dat',status='UNKNOWN')
OPEN(18,FILE='veli05.dat',status='UNKNOWN')
OPEN(19,FILE='temi05.dat',status='UNKNOWN')
OPEN(17,FILE='visti05.dat',status='UNKNOWN')
OPEN(20,FILE='enei05.dat',status='UNKNOWN')
OPEN(21,FILE='nusxtb1.dat',status='UNKNOWN')

C === SET SWITCHES
CALL SET

C === GRID SPECIFICATIONS
CALL GRID

C === INITIALIZE FIELDS
CALL INIT

C === INLET CONDITIONS
CALL INLET

C === INITIAL OUTPUT
CALL OUTPI

C *** START ITERATION
10 NITER=NITER+1

C === EDDY VISCOSITY FIELD
CALL PROPS

C === VELOCITIES AND PRESSURES

```



```

CALL CALCU
CALL CALCV
CALL CALCP1
CALL CALCP2
C === TURBULENCE PARAMETERS
CALL CALCTE
CALL CALCED
C === TEMPERATURE
CALL CALCT
CALL NUSSELT
C === MONITORING AND TERMINATION CHECKS

SORCE=AMAX1(RESORU,RESORV,RESORM,RESORT,RESORK,RESORE)
WRITE(6,311)RESORU,RESORV,RESORM,RESORT,RESORK,RESORE,SORMAX
TVIS=VIS(IMON,JMON)-VISCOS
WRITE(6,312)NITER,U(IMON,JMON),V(IMON,JMON),P(IMON,JMON),
+ T(IMON,JMON),TE(IMON,JMON),ED(IMON,JMON),TVIS,SORCE
IF(SORCE.GE.1.E+30.AND.NITER.GT.300)STOP
IF(SORCE.LE.SORMAX) GO TO 20
IF(NITER.EQ.MAXIT)then
GO TO 20
ENDIF
GO TO 10
20 CONTINUE
C *** END ITERATION
CALL STREAM
CALL VELMAX
CALL TURBMAX
C === FINAL OUTPUT
CALL OUTP
STOP
311 format(/,7x,7(1pe12.3))
312 format(/,I6,1x,8(1pe12.3),/,10x,'-----')
END

```

8. Exemple de résultats turbulents

Le problème de convection naturelle turbulente en cavité rectangulaire, donnée comme exemple plus haut et résolu par le moyen du code de calcul TEAM, donne lieu à des résultats turbulents représentés essentiellement par la *viscosité turbulente* (voir figures 3.3 et 3.4) et l'*énergie cinétique de turbulence* (voir figures 3.5 et 3.6) :

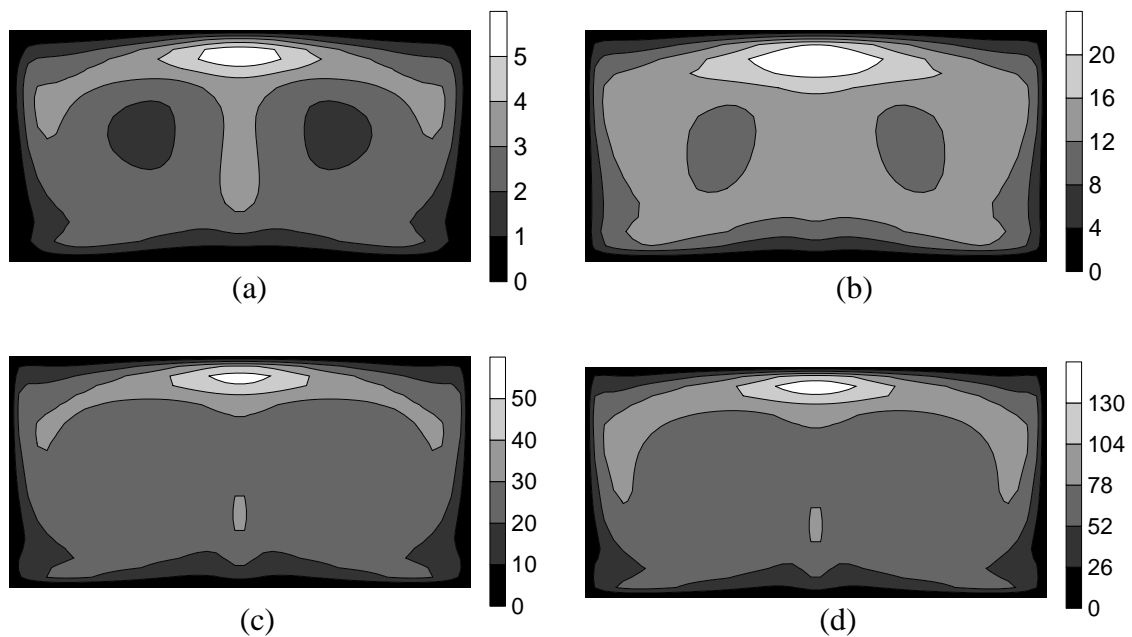


Figure 3.3 : Viscosité turbulente : (a) $Ra= 10^6$, (b) $Ra= 10^7$, (c) $Ra= 10^8$, (d) $Ra= 10^9$

On remarque que les valeurs maximales de la viscosité turbulente se situent à mi-largeur au voisinage de la paroi froide, correspondant à l'arrivée d'un courant de fluide chaud provoquant l'intensification des fluctuations de vitesse.

Aussi, l'évolution de la viscosité turbulente à mi-hauteur, qu'on présente sur la figure ci-dessous, montre des maximums au centre de la cavité et au voisinage des parois verticales, indiquant également l'existence de fluctuations importantes dans ces endroits.

Très proche des parois, les valeurs sont très faibles en raison évidemment de la prépondérance des effets visqueux par rapport aux fluctuations turbulentes.

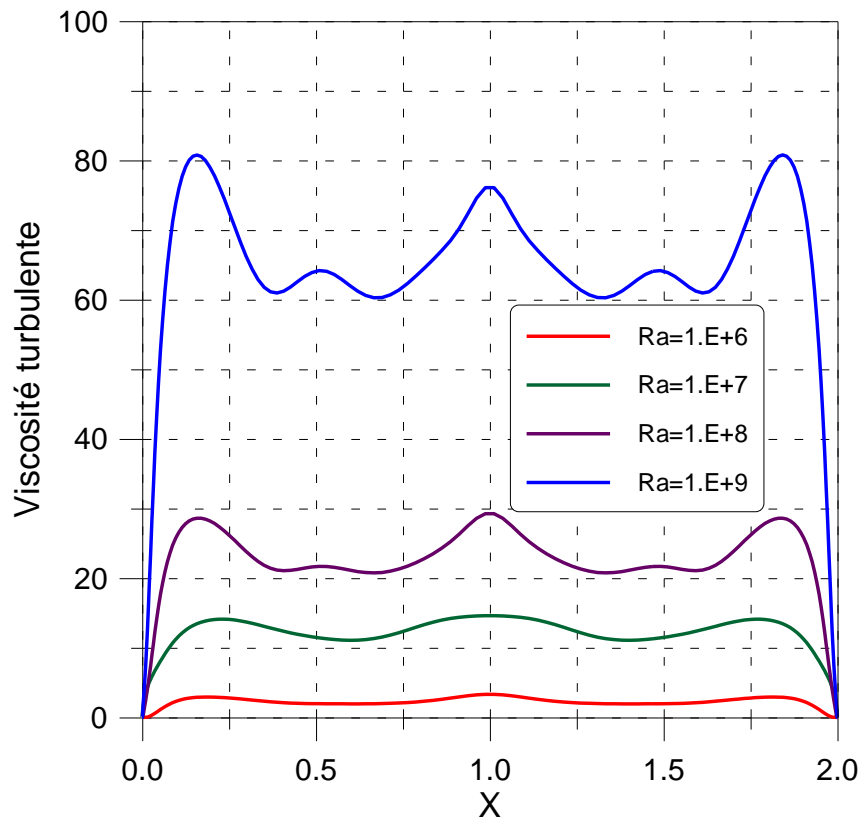


Figure 3.4 : Profils de la viscosité turbulente en $Y=0.5$ pour différents

L'accroissement de l'intensité de la turbulence avec l'allongement de la cavité ($AL=L/H$) est visible à partir de la figure suivante. Comme pour la viscosité turbulente les valeurs maximales de l'énergie cinétique turbulente sont situées à mi-largeur près de la paroi supérieure froide de la cavité rectangulaire :

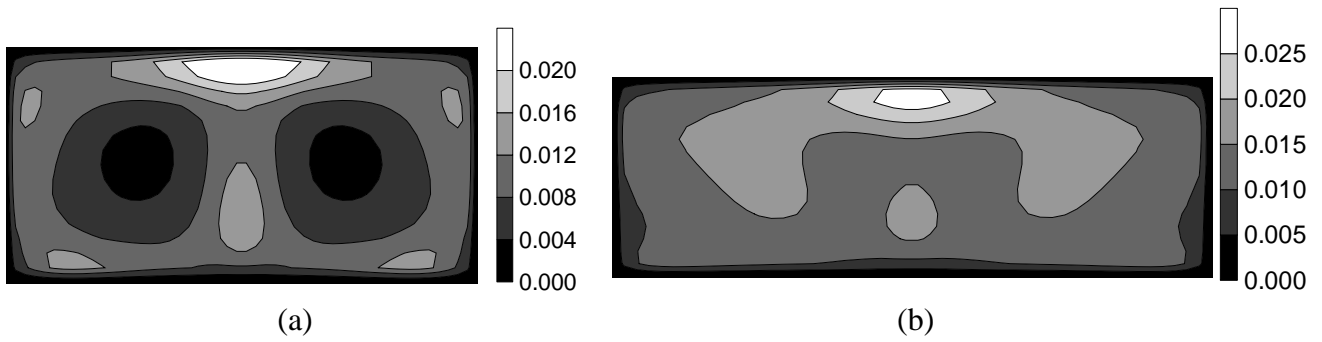


Figure 3.5 : Energie cinétique de turbulence ($Ra=10^7$) : (a) $AL=2$, (b) $AL=3$

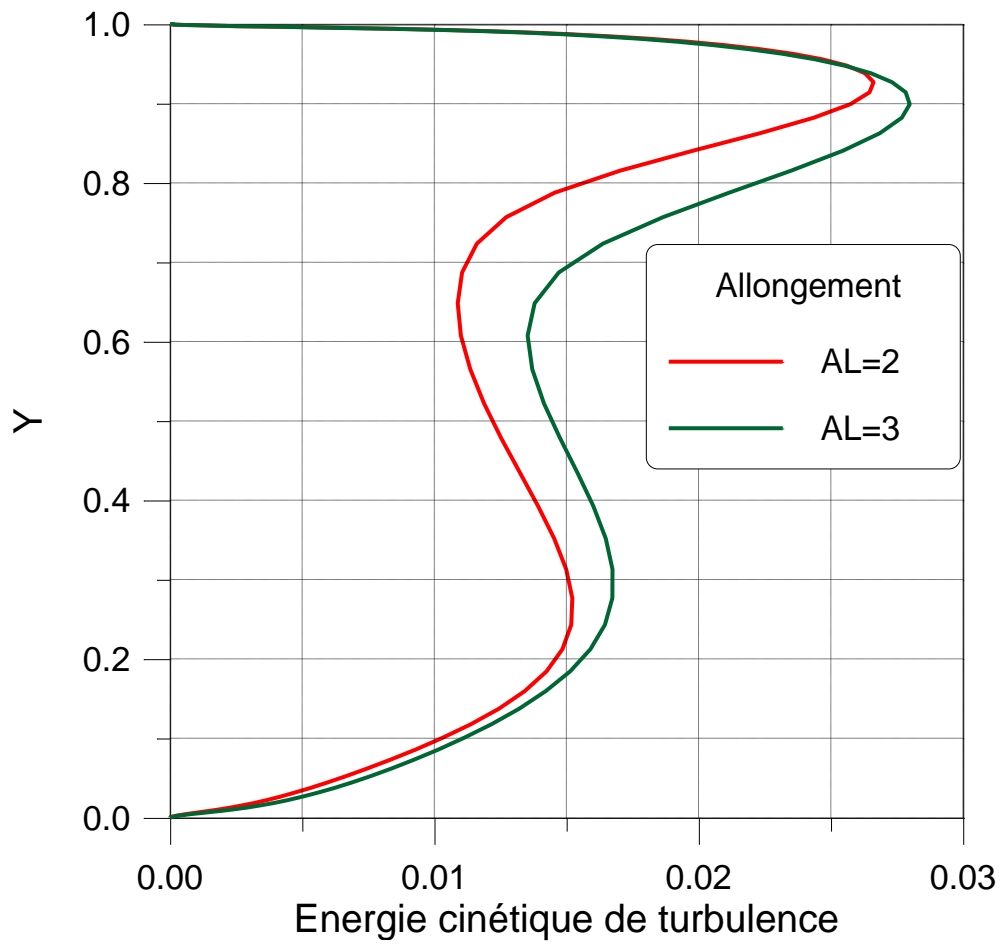


Figure 3.6 : Evolution de l'énergie cinétique de turbulence

Références bibliographiques

- H. TENNEKES and J.L. LUMLEY, « *A First Course in Turbulence* »;
The MIT Press, 1972.

- P. G. HUANG, B. E. LAUNDER and M. A. LESCHZINER , *Guide du code TEAM*;
UMIST, Manchester , UK, 1984.

- S. RAMADHANI, « *Tow-Equation and Second-Moment turbulent models for convective heat transfer* » ; in : *Advances in numerical heat transfer* (edited by W. J. Minkowycz and E. M. Sparrow), Vol. 1, pp. 171-199, 1997.

- R. SCHIESTEL, « *Modélisation et simulation des écoulements turbulents* »;
Editions Hermès, Paris, 1993.

- S. Xin , « *Simulations numériques de convection naturelle turbulente* », Thèse de Doctorat,
Université Paris VI, 1993.