# Corrigé De L'Examen De Mathématiques(I)

## Corrigé de l'exercice1(06pts)

On a les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad v_n = u_n - n$$

**1.** Calcul de $u_1, u_2$ et $u_3$ (01.5pts)

■ $u_1 = \dfrac{2}{3}u_0 + \dfrac{1}{3}(0) + 1 = \dfrac{2}{3}(2) + 1 = \dfrac{4}{3} + 1 = \dfrac{7}{3}$.

■ $u_2 = \dfrac{2}{3}u_1 + \dfrac{1}{3}(1) + 1 = \left(\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{7}{3}\right) + \dfrac{1}{3} + 1 = \dfrac{14}{9} + \dfrac{1}{3} + 1 = \dfrac{26}{9}$.

■ $u_3 = \dfrac{2}{3}u_2 + \dfrac{1}{3}(2) + 1 = \left(\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{26}{9}\right) + \dfrac{2}{3} + 1 = \dfrac{52}{27} + \dfrac{2}{3} + 1 = \dfrac{97}{27}$.

**2.** Montrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique(02pts)

Il suffit de vérifier que $v_{n+1} = qv_n$.

On a: $v_n = u_n - n$, donc $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1)$. Ainsi:

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1 = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}(u_n - n) = \frac{2}{3}v_n.$$

D'où $(v_n)$ est géométrique. (01.5pts)

Sa raison $q = \frac{2}{3}$ et son premier terme $v_0 = u_0 - 0 = 2$. (0.5pts)

**3.** L'expression de $v_n$, puis de $u_n$, en fonction de $n$(01pts)

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant géométrique alors : (0.5pts)

$$v_n = v_0 \times q^n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

On a : $v_n = u_n - n$, nous donne $u_n = v_n + n$. Et par conséquent : (0.5pts)

$$u_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + n.$$

**4.** La limite (01.5pts)

■ $\lim v_n = \lim 2\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ ■ $\lim u_n = \lim\left(2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n\right) = +\infty$.

---

## Corrigé de l'exercice2(06pts)

**I.** Résolution de l'inéquation avec la fonction exponentielle (03pts):

$$-5e^{2x} + 2e^x + 3 \geq 0 \qquad (*)$$

Il est clair que le domaine de définition de l'inéquation $(*)$ est $\mathcal{D}_{inq} = ]-\infty, +\infty[$.

En posant $X = e^x$, on a $X \in ]0, +\infty[$ et l'inéquation $(*)$ peut s'écrire sous la forme : (0.5pts)

$$-5X^2 + 2X + 3 \geq 0 \qquad (**)$$

La résolution de l'inéquation $(**)$ nous amène à étudier le signe de :

$$f(X) = -5X^2 + 2X + 3.$$

On a $f$ est définie sur $]0, +\infty[$.

De plus $f(X) = 0$, nous donne l'équation $-5X^2 + 2X + 3 = 0$.

## Corrigé De L'Examen De Mathématiques(I)

Son discriminant $\Delta = 64$. Il existe donc deux solutions : (0.5pts)

$$X_1 = \frac{-2-8}{-10} = 1 \in ]0,+\infty[ \text{ et } X_2 = \frac{-2+8}{-10} = -\frac{3}{5} \notin ]0,+\infty[.$$

Et on a le tableau suivant : (0.5pts)

| $X$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $signe\ de\ f$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

Du tableau, on déduit les solutions de l'inéquation $(**)$ sont : (0.5pts)

$$S^{**} = ]0,1]$$

Et par conséquent, les solution $S^*$ de l'inéquation $(*)$ sont les $x$ telle que :

$$e^x \in S^{**} = ]0,1] \Leftrightarrow x \in ]-\infty,0]$$

Par conséquent : $S^* = ]-\infty,0]$. (01pts)

---

**II.** Résolution de l'équation avec la fonction logarithme(03pts):

$$\ln(x^2 - x) - \ln 6 = 0 \qquad (*)$$

L'équation $(*)$ est définie si et seulement si $x^2 - x > 0$. Et ceci nous amène à étudier le signe de $f(x) = x^2 - x$ qui est définie sur $\mathbb{R}$.

De plus, $f(x) = 0$ nous donne l'équation : $x^2 - x = 0$ dont les solutions $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Et on a le tableau :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $signe\ de\ f$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Et on déduit le domaine de définition de l'équation $(*)$ est $\mathcal{D}_{eq} = ]-\infty,0[ \cup ]1,+\infty[$. (01pts)

De plus, on peut écrire l'équation $(*)$ sous la forme :

$$\ln(x^2 - x) = \ln 6$$

Ce qui implique : $x^2 - x = 6$. Et on obtient cette nouvelle équation : (0.5pts)

$$x^2 - x - 6 = 0 \qquad (**)$$

Son $\Delta = 25 > 0$. Il existe deux solutions : $x_1 = 3 \in \mathcal{D}_{eq}, x_2 = -2 \in \mathcal{D}_{eq}$. (01pts)

Et par conséquent, l'équation $(*)$ admet deux solutions : $x_1 = 3,\ x_2 = -2$. (0.5pts)

---

**Corrigé de l'exercice3(08pts)**

**I.** La recherche des extremums de la fonction $f$ en utilisant le teste de la deuxième dérivée dans le cas où : (04pts)

$$f(x) = \frac{x^2}{2} e^{-2x}$$

Il est clair que $f$ est définie sur $\mathbb{R}$. Et sa dérivée première est donné par : (01pts)

$$f'(x) = xe^{-2x} + (-2e^{-2x})\frac{x^2}{2} = (-x^2 + x)e^{-2x}.$$

Et sa deuxième dérivée est : (01pts)

$$f''(x) = (-2x+1)e^{-2x} + (-2e^{-2x})(-x^2 + x) = (2x^2 - 4x + 1)e^{-2x}.$$

Les points critiques de $f$ sont donnés par l'équation : $f'(x) = 0$.

Qui est équivalente à : $(-x^2 + x)e^{-2x} = 0$.

Sa résolution nous donne : $-x^2 + x = 0$, ou bien : $x(-x + 1) = 0$.

Et on obtient deux solutions : $x_1 = 0, x_2 = 1$.

Finalement, $f$ admet deux points critiques : $x_1 = 0, x_2 = 1$. (01pts)

Et le test de ces points critiques se fait comme suit : (01pts)

- $f''(0) = 1 > 0$, donc $f(0) = 0$ est un minimum local.
- $f''(1) = -e^{-2} < 0$, donc $f(1) = e^{-2}$ est un maximum local.

---

**II.** Calcul de la première dérivée(04pts) :

- $f(x) = (\ln x)^2 - e^{\sqrt{x^2+2x}} \Longrightarrow f'(x) = 2\dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}e^{\sqrt{x^2+2x}}$.
- $f(x) = \ln(x^2 + 1) - (x^2 - 4)^3 \Longrightarrow f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - 6x(x^2 - 4)^2$.