Université A. Mira de Béjaia | **$1^{\text{ère}}$ année ST**
Faculté de Technologie | **Année universitaire**
Département de Technologie | **Février 2025**

Corrigé de la série de TD n°1 de Maths 2

Intégrales et calcul des primitives

Exercice n°1

Calculons les primitives suivantes :

$$a) \int \frac{4x-4}{x^2-2x+3}\,dx = 2\int \frac{2x-2}{x^2-2x+3}\,dx$$
$$= 2\ln\left|x^2-2x+3\right| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

En utilisant la formule :

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C.$$

$$b) \int \frac{1+\ln x}{x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) dx$$
$$= \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{\ln x}{x}\,dx$$
$$= \int \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{2}\int 2\frac{\ln x}{x}\,dx$$
$$= \ln|x| + \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

En utilisant les formules :

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C, \quad \int f'(x)f^n(x)\,dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C.$$

$$c) \int \cos(5x+2)dx = \frac{1}{5}\int 5\cos(5x+2)dx$$
$$= \frac{1}{5}\sin(5x+2) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$d) \int (2x-2)\sqrt{x^2-2x+3}\,dx = \int (2x-2)\left(x^2-2x+3\right)^{\frac{1}{2}}\,dx$$
$$= \frac{(x^2-2x+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$
$$= \frac{2}{3}\left(x^2-2x+3\right)^{\frac{3}{2}} + C.$$

En utilisant la formule :
$$\int f'(x)f^n(x)\,dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C.$$
$$\text{e)} \quad \int \sin x\, e^{\cos x}\,dx = -\int -\sin x\, e^{\cos x}\,dx$$
$$= -e^{\cos x} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$
L'utilisation de la formule :
$$\int f'(x)e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + C.$$
$$\text{f)} \quad \int 6x(3x^2+4)^3\,dx = \frac{(3x^2+4)^4}{4} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$
En utilisant la formule :
$$\int f'(x)f^n(x)\,dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C.$$

Exercice n°2

En utilisant l'intégration par parties, calculons les primitives suivantes :
$a)$ $\int (2x+1)e^{2x}dx.$
On pose
$$u(x) = (2x+1) \Rightarrow u'(x) = 2,$$
$$v'(x) = e^{2x} \Rightarrow v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$$
donc
$$\int (2x+1)e^{2x}dx = (2x+1)\frac{1}{2}e^{2x} - \int e^{2x}dx$$
$$= \frac{1}{2}(2x+1)e^{x} - \frac{1}{2}e^{2x} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$
b) $\int x^2 \sin x\,dx.$
On pose
$$u(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad u'(x) = 2x$$
$$v'(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad v(x) = -\cos x$$
L'intégration par parties donne :
$$\int x^2 \sin x\,dx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx$$
Nous calculons maintenant $\int x\cos x\,dx$ par intégration par parties :
$$u(x) = x \quad \Rightarrow \quad u'(x) = 1$$
$$v'(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad v(x) = \sin x$$
Ce qui donne :

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx$$
$$\int x\cos x\,dx = x\sin x + \cos x$$

En remplaçant dans l'expression de $\int x^2 \sin x\,dx$, on obtient :

$$\int x^2 \sin x\,dx = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$$

c) $\int (x+1)\sqrt{2x+1}dx$.
On pose

$$u(x) = (x+1) \Rightarrow u'(x) = 1$$
$$v'(x) = \sqrt{2x+1} \Rightarrow v(x) = \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}$$

et l'on intègre par parties, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\int (x+1)\sqrt{2x+1}dx &= (x+1)\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}dx \\
&= \frac{(x+1)}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\int (2x+1)^{\frac{3}{2}}dx \\
&= \frac{(x+1)}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6}\int 2(2x+1)^{\frac{3}{2}}dx \\
&= \frac{(x+1)}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6}\frac{2}{5}(2x+1)^{\frac{5}{2}} + c, c \in \mathbb{R} \\
&= \frac{(x+1)}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{15}(2x+1)^{\frac{5}{2}} + c, c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

d) $\int x^3\ln(3x)dx$.
On pose

$$u(x) = \ln(3x) \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$$
$$v'(x) = x^3 \Rightarrow v(x) = \frac{x^4}{4}$$

et l'on intègre par parties, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\int x^3\ln(3x)dx &= \frac{x^4}{4}\ln(3x) - \int \frac{x^4}{4}\frac{1}{x}dx \\
&= \frac{x^4}{4}\ln(3x) - \frac{1}{4}\int x^3dx \\
&= \frac{x^4}{4}\ln(3x) - \frac{1}{16}x^4 + c, c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Exercice n°3

En effectuant un changement de variable, calculer :

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Posons $x=\sqrt{t}$ alors $x=t^2$, d'où $dx=2t\,dt$.

L'intégrale devient :

$$\int \frac{1-t}{t}2t\,dt = 2\int(1-t)\,dt = t-\frac{t^2}{2}+c, c\in\mathbb{R}$$

b. Calcul de l'intégrale :

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

Posons $t=\cos x$, d'où $dx=\frac{-dt}{\sin x}$. L'intégrale devient :

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int \frac{-dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{1+t^2} = -\arctan x + c.$$

c) $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$.

Posons $t=e^x+1 \Longrightarrow dt=e^x dx$, on obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{e^x+1}dx &= \int \frac{e^x}{t}\frac{dt}{e^x}\\ &= \int \frac{1}{t}dt\\ &= \ln|t|+c \quad = \ln|e^x+1|+c, c\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

.

Exercice n°4

Calculer les primitives des fractions rationnelles suivantes :

Calcul de l'intégrale :

$$\int \frac{2x-1}{(x-1)(x+2)}\,dx.$$

On décompose la fraction en fractions partielles :

$$\frac{2x-1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2} = \frac{(A+B)x+(2A-B)}{(x-1)(x+2)}$$

Par identification on a :

$$A+B=2,$$
$$2A-B=-1.$$

En résolvant ce système, nous trouvons $A=\frac{1}{3}$ et $B=\frac{5}{3}$.

Nous avons donc :

$$\frac{2x-1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1/3}{x-1}+\frac{5/3}{x+2}.$$

L'intégrale devient :

$$\int \frac{2x-1}{(x-1)(x+2)}\,dx. = \int \left(\frac{1/3}{x-1} + \frac{5/3}{x+2}\right) dx = \frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{5}{3}\ln|x+2| + C.$$

b) $\int \frac{x^3+4x^2+6x-3}{x^2+2x+1}\,dx.$

1-ère étape : Effectuer la division euclidienne :

$$\frac{x^3+4x^2+6x-3}{x^2+2x+1} = x+2+\frac{x-5}{x^2+2x+1}$$

2-ème étape : Décomposer $\frac{x-5}{x^2+2x+1}$ en fractions simples :

$$\begin{aligned}\frac{x-5}{x^2+2x+1} &= \frac{x-5}{(x+1)^2}\\ &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}\\ &= \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2}\\ &= \frac{Ax+(A+B)}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{aligned} A &= 1,\\ A+B &= -5 \quad \Rightarrow \quad B=-6.\end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{x-5}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{-6}{(x+1)^2}.$$

Ainsi,

$$\frac{x^3+4x^2+6x-3}{x^2+2x+1} = x+2+\frac{1}{x+1}+\frac{-6}{(x+1)^2}.$$

3-ème étape : Intégrer :

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+4x^2+6x-3}{x^2+2x+1}\,dx &= \int \left(x+2+\frac{1}{x+1}+\frac{-6}{(x+1)^2}\right) dx\\ &= \int (x+2)\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx - 6\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x+1| - 6\cdot\frac{-1}{x+1} + c, \quad c\in\mathbb{R}\\ &= \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x+1| + \frac{6}{x+1} + c, \quad c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

c) $\int \frac{x+4}{x^2+2x+5}dx$.
On a :

$$x^2+2x+5=(x+1)^2+4$$

En posant : $x+1=2t$ (et donc $dx=2dt$), on obtient :

$$\begin{aligned}\int \frac{x+4}{x^2+2x+5}dx &= \int \frac{2t+3}{4\left(t^2+1\right)}2dt \\ &= \int \frac{4t}{4\left(t^2+1\right)}dt+\frac{3}{2}\int \frac{1}{t^2+1}dt \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)+\frac{3}{2}\arctan t+c \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+2x+5}{4}\right)+\frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+c, c\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Exercice n°5

Intégrons les fonctions trigonométriques suivantes :

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^\pi \cos^3 x dx \\ &= \int_0^\pi \cos^2 x\cos x dx \\ &= \int_0^\pi \left(1-\sin^2 x\right)\cos x dx \\ &= \int_0^\pi \cos x dx-\int_0^\pi \sin^2 x(\cos x)dx\end{aligned}$$

Calculons $\int \sin^2(x)\cos(x)\mathrm{d}x$.
On pose $t=\sin(x), dt=\cos(x)\mathrm{d}x$. Donc

$$\int \sin^2(x)\cos(x)\mathrm{d}x=\int t^2\ \mathrm{d}t=\frac{1}{3}t^3+c=\frac{1}{3}\sin^3(x)+c.$$

Alors $I_1=[\sin x]_0^\pi-\frac{1}{3}[\sin^3 x]_0^\pi=0$.

$I_2=\int_0^\pi \sin^2 x\cos^2 x dx$.
On utilise les deux formules suivantes :

$$\cos(2x)=2\cos^2(x)-1\Rightarrow\cos^2(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x)$$

et

$$\cos(2x)=1-2\sin^2(x)\Rightarrow\sin^2(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)$$

d'où

$$\begin{aligned}
\sin^2 x \cos^2 x &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)\right) \\
&= \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))\frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \\
&= \frac{1}{4}\left(1 - \cos^2(2x)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4x)\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4x)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4x)\right) \\
&= \frac{1}{8}(1 - \cos(4x))
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^2 x dx &= \int_0^{\pi} \frac{1}{8}(1 - \cos(4x))dx \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{\pi} (1 - \cos(4x))dx \\
&= \left[\frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin(4x)\right)\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

Calculons l'intégrale suivante :

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 4x \cos 3x \, dx.$$

On utilise l'identité :

$$\sin B \cos A = \frac{1}{2}\left[\sin(A + B) + \sin(A - B)\right].$$

On a

$$\sin 4x \cos 3x = \frac{1}{2}\left[\sin(7x) + \sin(x)\right].$$

Ainsi,

$$I = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left[\sin(7x) + \sin x\right] dx.$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[-\frac{1}{7}\cos 7x\right]_{\substack{\frac{\pi}{2}\\ 7}}^{\pi} + \left[-\cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) = \frac{4}{7}.$$

$$I_4 = \int_0^{\pi} \cos^6 x \sin^3 x \, dx$$

on a

$$\int \cos^6 x \sin^3 x \, dx = \int \cos^6 x \sin^2 x \sin x \, dx = \int \cos^6 x (1 - \cos^2) x \sin x \, dx$$

On pose $t = \cos x$ d'où $dt = -\sin x dx$ Alors :

$$\int \cos^6 x (1 - \cos^2) x \sin x \, dx = - \int t^6 (1 - t^2) dt = \frac{1}{9} t^9 - \frac{1}{7} t^7 + c$$

donc

$$I_4 = \left[\frac{1}{9} \cos^9 x - \frac{1}{7} \cos^7 x \right]_0^{\pi} = \frac{2}{63} + \frac{2}{63} = \frac{4}{63}$$