Chapitre 7

Lois usuelles de probabilités

1 Lois de probabilités discrètes

1.1 Loi de Bernoulli

Une expérience aléatoire ayant deux résultats possibles (succès et échec) est appelée experience de Bernoulli.
Si A est l'événement succès et $\overline{A}$ est l'événement échec, on a :

$$\begin{aligned} p(A) &= p,\ 0 \leq p \leq 1; \\ p(\overline{A}) &= 1 - p = q,\ 0 \leq q \leq 1. \end{aligned}$$

On dit que X suit une loi de Bernoulli de probabilité p, et on note

$$X \rightsquigarrow \text{Bernoulli}(p)$$

Espérance mathématique

La variable aléatoire X prend deux valeurs possibles $\{0; 1\}$: 0 en cas d'échec et 1 en cas de réussite et son espérance mathématique est :

$$E(X) = p.$$

En effet,

$$E(X) = \sum_{i=0}^{1} x_i p(X = x_i) = 0.q + 1.p = p.$$

Variance

La variance de cette variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli(p) est :

$$V(X) = p.q$$

En effet,

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X)^2) \\ &= \sum_{i=0}^{1} x_i^2 p(X = x_i) - (E(X)^2) \\ &= (0^2 q + 1^2 p) - p^2 \\ &= p - p^2 \\ &= p(1-p) = p.q \end{aligned}$$

Écart type

L'écart type est

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{p.q}.$$

La loi de Bernoulli(p) se résume dans le tableau 7.1 :

k	0	1		$E(X) = p$
$p(X = k)$	$p(X = 0) = q$	$p(X = 1) = p$		$V(X) = p.q$
	$0 \leq q \leq 1$	$0 \leq p \leq 1$		$\sigma(X) = \sqrt{p.q}$

TABLE 7.1 – Loi de Bernoulli(p).

Exemple 7.1. On jette un dé équilibré et on s'intéressera au résultat "avoir le chiffre 2". A : "obtenir le chiffre 2 sur la surface supérieure du dé".

$$\begin{aligned} A = \{2\} \quad &\text{et} \quad \overline{A} = \{1, 3, 4, 5, 6\}; \\ p(A) = p = \frac{1}{6} \quad &\text{et} \quad p(\overline{A}) = 1 - p = q = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Le jet d'un dé} \quad \text{est} \quad & \text{une expérience de Bernoulli;} \\ \text{avec} \quad & p = \frac{1}{6} \text{ et } q = \frac{5}{6}; \\ & E(X) = p = \frac{1}{6}; \\ & V(X) = p.q = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}; \\ & \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{p.q} = \frac{\sqrt{5}}{6}. \end{aligned}$$

1.2 Loi Binomiale

Soit une expérience de Bernoulli répétée n fois dans les mêmes conditions et de manières indépendantes (X_1, X_2, ... , X_n). La loi Binomiale, notée $\mathcal{B}(n,p)$, $X = \sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + X_2 + ... + X_n$ modélise le nombre de succès obtenus lors de la répétition indépendante de plusieurs expériences aléatoires identiques (avec p la probabilité du succès et $q = 1-p$ la probabilité de l'échec).
La variable aléatoire X correspond au nombre de succès, si on a k succès on aura $(n-k)$ échecs et la probabilité d'avoir k succès dans une experience aléatoire répétée n fois, est :

$$p(X=k) = C_n^k.p^k.q^{(n-k)},$$

avec $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.
Il est facile de démontrer que l'on a bien une loi de probabilité, car :

$$\sum_{k=0}^{n} p(X=k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{(n-k)} = (p+q)^n = 1, \text{ car } p+q=1.$$

Remarque 7.1. Le développement du binôme de Newton $(p+q)^n$ permet d'obtenir l'ensemble des probabilités pour une distribution binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ avec n et p des valeurs données.

Espérance mathématique

L'espérance mathématique de la distribution binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ est :

$$E(X) = n.p$$

En effet,

$$\begin{aligned}
E(X) &= E(\sum_{i=1}^{n} X_i) \text{ où chaque } X_i \text{ est une v.a. de Bernoulli} \\
&= E(X_1 + X_2 + ... + X_n) \\
&= E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np.
\end{aligned}$$

Variance

La variance de cette variable aléatoire qui suit une loi de binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ est :

$$V(X) = n.p.q$$

En effet,

$$\begin{aligned}
V(X) &= V(\sum_{i=1}^{n} X_i) \text{ où chaque } X_i \text{ est une v.a. de Bernoulli}\\
&= V(X_1 + X_2 + ... + X_n)\\
&= V(X_1) + V(X_2) + ... + V(X_n)\\
&= \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} pq = npq.
\end{aligned}$$

Écart type

L'écart type est

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n.p.q}.$$

La loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ se résume dans le tableau 7.2 :

Réalisations	$k = 0, 1, 2, ..., n$		$E(X) = np$
Probabilité d'avoir k réussites	$p(X = k) = C_n^k.p^k.q^{(n-k)}$		$V(X) = npq$
avec	$0 \leq p \leq 1$ et $0 \leq q \leq 1$		$\sigma(X) = \sqrt{npq}$

Table 7.2 – Loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Exemple 7.2. On reprend l'exemple du dé et on refait l'expérience du jet 5 fois (on jette le dé 5 fois). On s'intéressera au nombre de fois, où on obtient un 2.
A : "obtenir un 2 sur la surface supérieure du dé".
$p(A) = p = \frac{1}{6}$ et $p(\overline{A}) = q = 1 - p = \frac{5}{6}$.
X suit une loi Binomiale $\mathcal{B}(n,p) = \beta(5, \frac{1}{6})$.

$$p(X = k) = C_n^k.p^k.q^{(n-k)} = C_5^k.(\frac{1}{6})^k.(\frac{5}{6})^{(5-k)}.$$

1. Quelle est la probabilité d'obtenir :
   (a) deux fois le chiffre 2 ?
   (b) au moins trois fois le chiffre 2 ?
2. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Solution :

1. La probabilité d'obtenir :

(a) deux fois le chiffre 2 est :

$$p(X=2)=C_5^2(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^{(5-2)}=10\times 0,028\times 0,58=0,16.$$

(b) au moins trois fois le chiffre 2 est :

$$\begin{aligned}
p(X\geq 3) &= p(X=3)+p(X=4)+p(X=5)\\
&= 1-p(X<3)\\
&= 1-[p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)]\\
&= 1-[C_5^0(\frac{1}{6})^0(\frac{5}{6})^{(5-0)}+C_5^1(\frac{1}{6})^1(\frac{5}{6})^{(5-1)}+C_5^2(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^{(5-2)}]\\
&= 1-[0,4+0,4+0,16]=0,036.
\end{aligned}$$

2. Calcul de $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$:

$$\begin{aligned}
E(X) &= np=5\times\frac{1}{6}=\frac{5}{6}.\\
V(X) &= npq=5\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{36}.\\
\sigma(X) &= \sqrt{V(X)}=\frac{5}{6}.
\end{aligned}$$

Théorème 7.1. *Si $X\rightsquigarrow\mathcal{B}(n,p)$ et $Y\rightsquigarrow\mathcal{B}(m,p)$ sont deux variables aléatoires indépendantes de même probabilité p, alors leurs somme $X+Y$ est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale :*

$$X+Y\rightsquigarrow\mathcal{B}(n+m,p).$$

1.3 Loi de Poisson

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de poisson (appelée aussi loi des événements rares ou de petits nombres) de paramètre réel λ, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, si elle prend des valeurs entières dont les probabilités de réalisation sont :

$$\forall k\in\mathbb{N},\ p(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ e=2,718...$$

Paramètres de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$:

Espérance mathématique : $E(X)=\lambda$.
Variance : $V(X)=\lambda$.
Écart type : $\sigma(X)=\sqrt{\lambda}$.

Exemple 7.3. Une centrale téléphonique reçoit en moyenne 300 appels par heure. Quelle est la probabilité que durant une minute, la centrale reçoit exactement deux appels ?
Solution :
Les appels dans cette centrale suivent une loi de poisson de paramètre $\lambda = \frac{300}{60} = 5$ appels par minutes en moyenne.

$$\begin{aligned} p(X=2) &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-5}\frac{5^2}{2!} \\ &= 0,08422. \end{aligned}$$

1.4 Table de la loi de Poisson

A l'intersection de la colonne λ et de la ligne k, figure la probabilité pour que la variable de Poisson Y de paramètre λ soit égale à la valeur entière k : $p(Y=k) = e^{-\lambda}.\frac{\lambda^k}{k!}$

Probabilités individuelles $P_\lambda(k) = P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

k \ λ	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
0	0,980	0,961	0,942	0,923	0,905	0,861	0,819	0,779	0,741	0,705	1,000	1,000	1,000
1	0,020	0,038	0,057	0,074	0,090	0,129	0,164	0,195	0,222	0,247	0,000	0,000	0,000
2	0,000	0,001	0,002	0,003	0,005	0,010	0,016	0,024	0,033	0,043	0,000	0,000	0,000
3	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,002	0,003	0,005	0,000	0,000	0,000
4	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
7	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
8	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
9	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
11	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
12	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
13	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
14	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

FIGURE 7.1 – Table de la loi de Poisson.

Exemple 7.4. Sur une autoroute, il y a en moyenne deux accidents par semaine.
Quelle est la probabilité qu'il y aura cinq accidents durant un week-end ?
Solution : La loi de X du nombre d'accidents sur cette route suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2$ et la probabilité qu'il y aura cinq accidents durant un week-end est

$$p(X=5) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-2}\frac{2^5}{5!} = 0,0361.$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	0,368	0,135	0,050	0,018																
1	0,368	0,271	0,149	0,073	0,034	0,015														
2	0,184	0,271	0,224	0,147	0,084	0,045	0,022	0,011												
3	0,061	0,180	0,224	0,195	0,140	0,089	0,052	0,029	0,015											
4	0,015	0,090	0,168	0,195	0,175	0,134	0,091	0,057	0,034	0,019	0,010									
5		0,036	0,101	0,156	0,175	0,161	0,128	0,092	0,061	0,038	0,022	0,013								
6		0,012	0,050	0,104	0,146	0,161	0,149	0,122	0,091	0,063	0,041	0,025	0,015							
7			0,022	0,060	0,104	0,138	0,149	0,140	0,117	0,090	0,065	0,044	0,028	0,017	0,010					
8				0,030	0,065	0,103	0,130	0,140	0,132	0,113	0,089	0,066	0,046	0,030	0,019	0,012				
9				0,013	0,036	0,069	0,101	0,124	0,132	0,125	0,109	0,087	0,066	0,047	0,032	0,021	0,014			
10					0,018	0,041	0,071	0,099	0,119	0,125	0,119	0,105	0,086	0,066	0,049	0,034	0,023	0,015		
11						0,023	0,045	0,072	0,097	0,114	0,119	0,114	0,101	0,084	0,066	0,050	0,036	0,025	0,016	0,011
12						0,011	0,026	0,048	0,073	0,095	0,109	0,114	0,110	0,098	0,083	0,066	0,050	0,037	0,026	0,018
13							0,014	0,030	0,050	0,073	0,093	0,106	0,110	0,106	0,096	0,081	0,066	0,051	0,038	0,027
14								0,017	0,032	0,052	0,073	0,090	0,102	0,106	0,102	0,093	0,080	0,065	0,051	0,039
15									0,019	0,035	0,053	0,072	0,088	0,099	0,102	0,099	0,091	0,079	0,065	0,052
16									0,011	0,022	0,037	0,054	0,072	0,087	0,096	0,099	0,096	0,088	0,077	0,065
17										0,013	0,024	0,038	0,055	0,071	0,085	0,093	0,096	0,094	0,086	0,076
18											0,015	0,026	0,040	0,055	0,071	0,083	0,091	0,094	0,091	0,084
19												0,016	0,027	0,041	0,056	0,070	0,081	0,089	0,091	0,089
20													0,018	0,029	0,042	0,056	0,069	0,080	0,087	0,089
21													0,011	0,019	0,030	0,043	0,056	0,068	0,078	0,085
22														0,012	0,020	0,031	0,043	0,056	0,068	0,077
23															0,013	0,022	0,032	0,044	0,056	0,067
24																0,014	0,023	0,033	0,044	0,056
25																	0,015	0,024	0,034	0,045
26																	0,010	0,016	0,025	0,034
27																		0,011	0,017	0,025
28																			0,012	0,018
29																				0,013
30																				

FIGURE 7.2 – Table de la loi de Poisson pour k variant de 0 à 30.

1.5 L'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson

Considérons une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$. Si n tend vers l'infini et p tend vers 0 ($n \to +\infty$ et $p \to 0$), la loi binomiale converge vers une loi de Poisson.
En pratique, si $n > 25$ et $np < 5$, alors la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ est approchée par la loi de poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda = np$.

Exemple 7.5. Des observations ont montré que la probabilité qu'un homme soit atteint d'une maladie M est $p = 0,1$. En considérant 40 hommes pris au hasard, soit k le nombre d'hommes touchés par la maladie et X la variable aléatoire qui compte le nombre d'hommes malades.

1. Quelle est la loi que suit la v.a. X ? Donner sa loi de distribution $p(X = k)$.
2. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
3. Par quelle loi peut-on approcher la loi de X ?
4. Calculer $p(X = 2)$ et $p(X = 5)$.

Solution :

1. X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(40; 0.1)$:
$$p(X = k) = C_{40}^{k}.(\frac{1}{10})^{k}.(\frac{9}{10})^{(40-k)}$$
2. Calcul de $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$:
$$\begin{aligned} E(X) &= np = 40 \times \frac{1}{10} = 4. \\ V(X) &= npq = 40 \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} = 3,6. \\ \sigma(X) &= \sqrt{V(X)} = 1,89. \end{aligned}$$
3. Cette loi binomiale $\mathcal{B}(40; 0.1)$ est approchée par une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$:
$(n = 40 > 25$ et $np = 4 < 5) \Rightarrow$ Binomiale $\mathcal{B}(40; 0.1) \rightsquigarrow$ Poisson $\mathcal{P}(\lambda), \lambda = np = 4$.
$$p(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-4}\frac{4^k}{k!}.$$
4. Calcul de $p(X = 2)$ et $p(X = 5)$:
$$p(X = 2) = e^{-4}\frac{4^2}{2!} = 0,14653.$$
$$p(X = 5) = e^{-4}\frac{4^5}{5!} = 0,15629.$$

2 Lois de probabilités continues

2.1 Loi Normale

En théorie des probabilités et en statistique, la loi normale est l'une des lois de probabilité les plus adaptées pour modéliser des phénomènes naturels issus de plusieurs événements aléatoires. Elle est en lien avec de nombreux objets mathématiques dont le mouvement brownien, le bruit blanc gaussien ou d'autres lois de probabilité. Elle est également appelée loi gaussienne, loi de Gauss ou loi de Laplace-Gauss des noms de Laplace (1749-1827) et Gauss (1777-1855), deux mathématiciens, astronomes et physiciens qui l'ont étudiée.

Soit X une variable aléatoire. On dit que X suit une loi normale ou Laplace-Gauss de paramètres m (ou μ) et σ ($m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$), si sa densité de probabilité est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2},$$

avec $x \in \mathbb{R}$, $E(X) = m$ et σ est l'écart type de la v.a. X.

La courbe de cette densité de probabilité est appelée courbe de Gauss ou courbe en cloche. La figure 7.3 donne une illustration de quelque densités de probabilités en variant leurs paramètres correspondants (m et σ) et l'aire sous la courbe est toujours égale à 1.

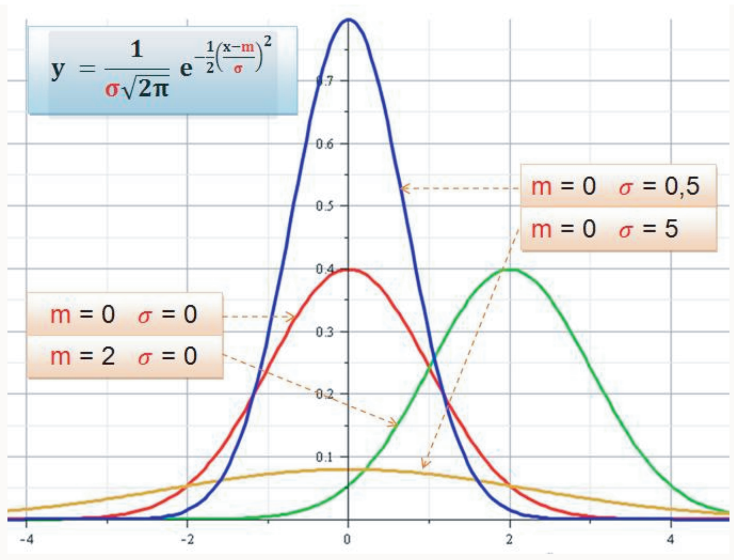
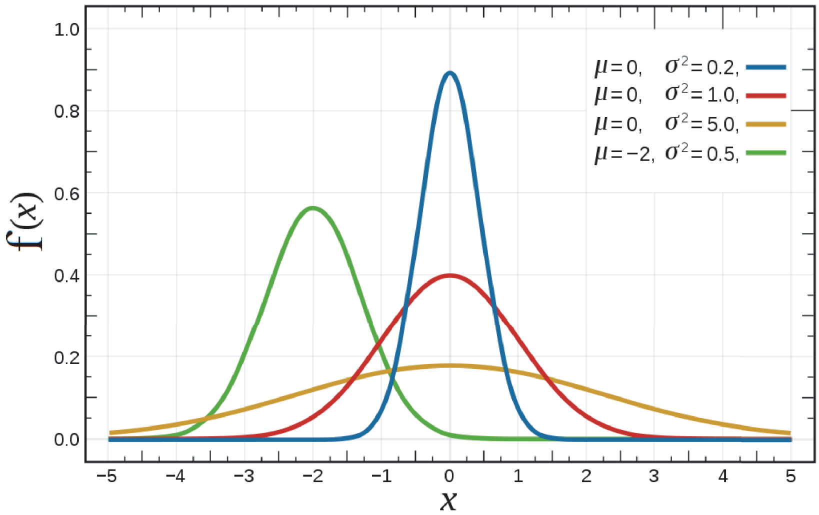


FIGURE 7.3 – Illustration de lois normales avec variations de m et σ.

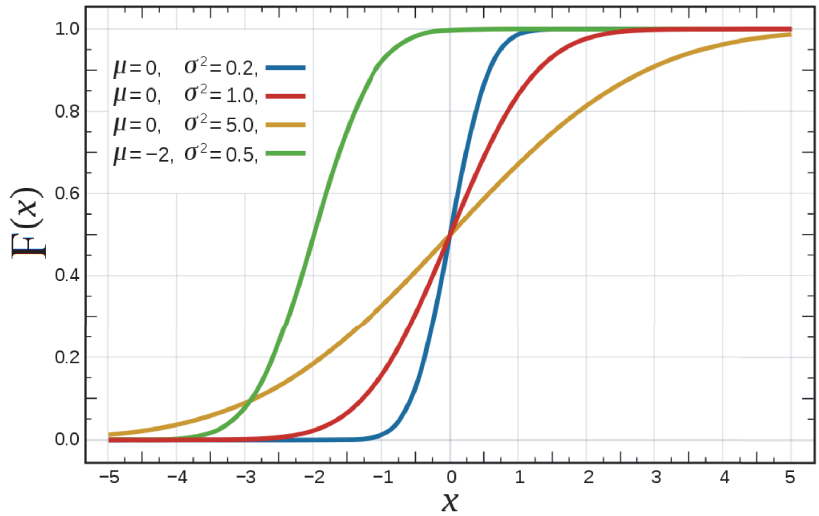
Fonction de répartition

La fonction de répartition F de la loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma)$ est :

$$F(x) = p(X \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-1}{2}(\frac{t-m}{\sigma})^2} dt.$$



(a) Densités de probabilités



(b) Fonctions de répartitions

FIGURE 7.4 – Fonctions de répartition de la loi Normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ avec variation des paramètres μ et σ. La courbe en couleur rouge est associée à la loi Normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

2.2 Loi Normale centrée réduite

Dans la pratique, on rencontre très souvent la loi normale. Afin d'éviter le calcul numérique de la fonction de répartition pour chaque application, on utilisera la loi normale centrée réduite, dont les valeurs existent et sont tablées.

Définition 7.1. Variable aléatoire centrée réduite

1. Une variable aléatoire centrée est une v.a. dont l'espérance est nulle $E(X) = 0$.
2. Une variable aléatoire réduite est une v.a. dont l'écart type $\sigma(X) = 1$ $(V(X) = 1)$.
3. La variable aléatoire $\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ est une v.a. centrée réduite.
   En effet,

$$\begin{aligned} E(\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}) &= \frac{1}{\sigma(X)}(E(X)-E(X)) = 0; \\ V(\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}) &= \frac{1}{\sigma^2(X)}(V(X)) = \frac{\sigma^2(X)}{\sigma^2(X)} = 1. \end{aligned}$$

Théorème 7.2. *Soit X une variable aléatoire continue suivant une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$. Si on applique le changement de variable $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ et le changement de bornes correspondantes $z = \frac{x-m}{\sigma}$, on a :*

$$F_X(x) = p(X \leq x) = p(\frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{x-m}{\sigma}) = p(Z \leq z) = F_Z(z).$$

La variable aléatoire Z suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

$$\textit{Si } X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma) \textit{ alors } Z = \frac{X-m}{\sigma} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Densité de probabilité de Z

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}z^2}, \; z \in \mathbb{R}.$$

Fonction de répartition de Z

$$F_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{\frac{-1}{2}t^2} dt.$$

Propriété 7.1. *Si la variable aléatoire Z suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$, alors :*

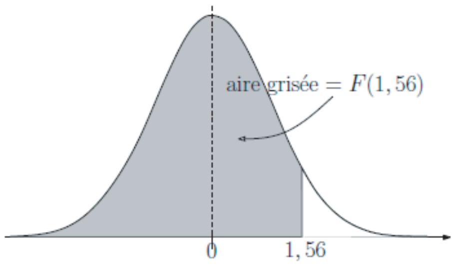
1. $f(z) = f(-z)$;
2. $\int_{-\infty}^{0} f(t)dt = \int_{0}^{+\infty} f(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \frac{1}{2}$;
3. $\forall z \in \mathbb{R}_+$, *on a* $\int_{-\infty}^{-z} f(t)dt = \int_{z}^{+\infty} f(t)dt$;
4. $\forall z \in \mathbb{R}_+$, *on a* $F_Z(-z) = 1 - F_Z(z)$.

Exemple 7.6. On suppose qu'une certaine variable aléatoire Z suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Pour quelle proportion d'individus on a $Z \leq 1,56$?
2. Pour quelle proportion d'individus on a $Z \geq 1,49$?
3. Calculer $p(Z \leq -1,1)$.

Solution

1. Calcul de $p(Z \leq 1,56)$:



La valeur de $p(Z \leq 1,56) = F(1,56)$ sera déduite à partir de la table de la loi normale centrée réduite ; pour cela on cherche 1,56 dans la table :
Donc $p(Z \leq 1,56) = 0,9406$.

	...	0.06	...
$\vdots$		$\vdots$	
1,5	...	0,9406	...
$\vdots$			

Pour 94,06% des individus, la variable aléatoire Z est inférieure à 1,56.

2. Calcul de $p(Z \geq 1,49)$:

$$\begin{aligned} p(Z \geq 1,49) &= 1 - p(Z \leq 1,49) \\ &= 1 - F(1,49). \end{aligned}$$

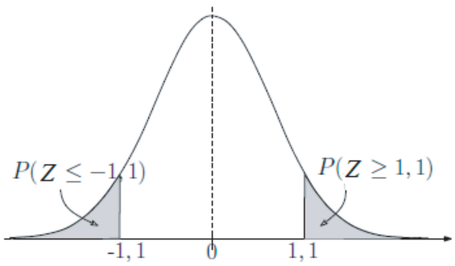
On cherche 1,49 dans la table :
Donc $p(Z \leq 1,49) = 0,9319$, alors $p(Z \geq 1,49) = 1 - 0,9319 = 0,0681$.

	...	...	0.09
$\vdots$			$\vdots$
1, 4	...	...	0, 9319
$\vdots$			

3. Si de plus on veut connaître $p(1,49 \leq Z \leq 1,56$, alors :

$$\begin{aligned} p(1,49 \leq Z \leq 1,56 &= F(1,56) - F(1,49) \\ &= 0,9406 - 0,9319 = 0,0087. \end{aligned}$$

4. On cherche $p(Z \leq -1.1)$, c'est-à-dire $F(-1,1)$.



On sait que $p(Z \leq -1.1) = F(-1,1) = 1 - F(1,1) = 1 - 0,8643 = 0,1357$.
Autrement dit, $p(Z \leq -1,1) = p(Z \geq 1,1) = 1 - 0,8643 = 0,1357$.

Exemple 7.7. Soit X une variable aléatoire continue suivant une loi normale d'une moyenne $m = 2$ et d'un écart type $\sigma = 0,16$.
Quelle est la probabilité d'avoir $1,94 \leq X \leq 2,02$?
Solution

$$X \rightsquigarrow \mathcal{N}(2;0.16) \Rightarrow Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0;1)$$

$$\begin{aligned} p(1,94 \leq X \leq 2,02) &= p(\frac{1,94-2}{0,16} \leq Z \leq \frac{2,02-2}{0,16}) \\ &= p(-0,375 \leq Z \leq 0,125) \\ &= p(Z \leq 0,125) - p(Z \leq -0,375) \\ &= F_Z(0,125) - F_Z(-0,375) = F_Z(0,125) - [1 - F_Z(0,375)] \\ &= 0,5497 - [1 - 0,6462] = 0,1959. \end{aligned}$$

2.3 L'approximation de la loi binomiale par une loi de normale

Théorème 7.3. *Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p, i.e. $\mathcal{B}(n;p)$, alors*

$$p(X=k) \simeq \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}(\frac{k-m}{\sigma})^2} \text{ quand } n \to +\infty, \text{ c'est à dire } \mathcal{N}(m;\sigma),$$

avec $m = E(X) = n.p$ et $\sigma^2 = V(X) = n.p.q$, avec $q = 1 - p$.

Remarque 7.2. On considère que l'approximation est valable si pour $n > 25$, on a à la fois $np > 5$ et $nq > 5$.

En résumé, on a :

Si $n > 25$,
$np > 5$, alors la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p) \rightsquigarrow$ loi Normale $\mathcal{N}(m;\sigma)$
$nq > 5$, avec $m = np$ et $\sigma = \sqrt{n.p.q}$.

Exemple 7.8. Reprenons l'exemple 7.5, en considérant 100 hommes au lieu de 40. rappelons que la probabilité qu'un homme soit atteint d'une maladie M est $p = 0,1$ et la probabilité qu'il ne soit pas atteint de cette maladie est $q = 1 - p = 0,9$. Soit k le nombre d'hommes touchés par la maladie et X la variable aléatoire qui compte le nombre d'hommes malades.

1. Quelle est la loi que suit la v.a. X ? Donner sa loi de distribution $p(X = k)$.
2. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
3. Par quelle loi peut-on approcher la loi de X ?
4. Calculer $p(X \leq 2)$ et $p(2 \leq X \leq 10)$.

Solution :

1. X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(100; 0.1)$:

$$p(X = k) = C_{100}^k.(0,1)^k.(0,9)^{(100-k)}$$

2. Calcul de $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$:

$$\begin{aligned} E(X) &= np = 100 \times 0,1 = 10. \\ V(X) &= npq = 100 \times 0,1 \times 0,9 = 9. \\ \sigma(X) &= \sqrt{V(X)} = 3. \end{aligned}$$

3. Cette loi binomiale $\mathcal{B}(100; 0.1)$ est approchée par une loi de normale $\mathcal{N}(m;\sigma)$:

$$(n = 100 > 25,\ np = 10 > 5 \text{ et } nq = 90 > 5\ ) \Rightarrow \text{binomiale}\, \mathcal{B}(100; 0.1) \rightsquigarrow \text{ normale}\, \mathcal{N}(m,\sigma),$$

avec $m = np = 10$ et $\sigma = \sqrt{n.p.q} = 3$.

$$p(X = k) \simeq \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}(\frac{k-m}{\sigma})^2} = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}(\frac{k-10}{3})^2}.$$

4. Calcul de $p(X \leq 2)$ et $p(2 \leq X \leq 10)$:

$$\begin{aligned} p(X \leq 2) &= p(\frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{2-m}{\sigma}) = p(\frac{X-10}{3} \leq \frac{2-10}{3}) \\ &= p(Z \leq \frac{-8}{3}) = F(\frac{-8}{3}) \text{ où } Z \text{ est la loi normale centrée réduite} \\ &= 1 - F(\frac{8}{3}) = 1 - F(2,66666) \\ &\simeq 1 - 0,980... \simeq 0,02. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(2 \leq X \leq 10) &= p(\frac{2-m}{\sigma} \leq \frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{10-m}{\sigma}) = p(\frac{2-10}{3} \leq Z \leq \frac{10-10}{3}) \\ &= p(Z \leq \frac{10-10}{3}) - p(Z \leq \frac{2-10}{3}) = p(Z \leq \frac{0}{3}) - p(Z \leq \frac{-8}{3}) \\ &= F(0) - F(\frac{-8}{3}) = F(0) - [1 - F(\frac{8}{3})] \\ &= F(0) - [1 - F(2,66666)] \simeq 0,5 - [1 - 0,980...] \\ &\simeq 0,5 - 0,02 = 0,48. \end{aligned}$$

Remarque. Les valeurs de $F(2,66666)$ et $F(0)$ sont déduites de la table de la loi normale centrée réduite.

2.4 L'approximation de la loi de Poisson par une loi normale

Lorsque le paramètre λ d'une loi de Poisson est grand, la loi de Poisson peut être approchée par une loi normale d'espérance λ et de variance λ. Le principe est analogue a celui utilisé pour l'approximation de la loi binomiale par la loi normale.

Théorème 7.4. *Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ, alors*

$$p(X = k) \simeq \frac{1}{\sqrt{\lambda}\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}(\frac{k-\lambda}{\sqrt{\lambda}})^2} \text{ quand } n \to +\infty,$$

avec $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$.

Remarque 7.3. On considère que l'approximation est valable si $\lambda > 20$.

Si $\lambda > 20$, alors la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ est approchée par la loi normale $\mathcal{N}(\lambda; \sqrt{\lambda})$.

2.5 Loi Exponentielle

En théorie des probabilités et en statistiques, la loi exponentielle est une loi de probabilité à valeurs réelles positives et continue sur $\mathbb{R}^+$. Une loi exponentielle modélise la durée de vie d'un phénomène sans mémoire, sans vieillissement ou sans usure. Cette loi permet entre autres de modéliser la durée de vie d'un atome radioactif ou d'un composant électronique. Elle peut aussi être utilisée pour décrire par exemple le temps écoulé entre deux coups de téléphone reçus au bureau, ou le temps écoulé entre deux accidents de voiture dans lequel un individu donné est impliqué.
La densité de probabilité d'une variable aléatoire X suivant une loi Exponentielle, de paramètre (ou d'intensité) $\lambda > 0$, prend la forme :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0\,; \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Fonction de répartition de la loi Exponentielle :

La fonction de répartition est donnée par :

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0\,; \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Paramètres de la loi Exponentielle :

Espérance mathématique : $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.
Variance : $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.
Écart type : $\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$.
Mediane, c'est-à-dire $F(x) = 0.5$ est $med = \frac{ln(2)}{\lambda} = E(X)ln(2)$.

Exemple 7.9. La durée de vie d'un matériel électronique suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{10}$ (l'unité de temps est l'année). Quelle est la probabilité qu'il fonctionne encore 5 ans après sa fabrication ?
Solution :
La densité de probabilité de la variable aléatoire X et sa fonction de répartition sont données par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-0.5x}, & \text{si } x \geq 0\,; \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-0.5x}, & \text{si } x \geq 0\,; \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La probabilité qu'il fonctionne encore 5 ans après sa fabrication est

$$P(X > 5) = 1 - F(X) = 1 - [1 - e^{(-\frac{1}{10}\times 5)}] = e^{-0.5} = 0,6065.$$

2.6 Table de la loi normale centrée réduite

$$F(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \text{ et } F(-t) = 1 - F(t).$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Utilisation de la table : On lit les décimales dans les lignes et les centièmes en colonnes. Par exemple, la valeur de $F(1.54)$ se trouve à l'intersection de la ligne 1.5 et de la colonne 0.04 et on trouve $F(1.54) = 0.9382$ à 10^{-4} près.

3 Autres lois de probabilités

3.1 La loi Log-Normale de Galton

Définition 7.2. La loi Log-normale de Galton d'une variable aléatoire continue X de paramètres m et σ est définie par la densité suivante :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}(\frac{ln(x)-m}{\sigma})^2}, \text{ avec } m \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } x > 0.$$

Propriétés

1. L'espérance de la loi de Log-normale est $E(X) = e^{(m+\frac{\sigma^2}{2})}$.
2. Sa variance est $V(X) = e^{(2m+2\sigma^2)} - e^{(2m+\sigma^2)}$.

Remarque 7.4. Si X suit la loi Log-normale de paramètres m et σ, la variable aléatoire $Y = ln(X)$ suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$. Quand on utilise une loi Log-normale, les calculs se font en utilisant la variable aléatoire $ln(X)$ qui suit une loi normale.

3.2 La loi de χ^2 (khi deux)

Définition 7.3. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$, ν lois normales centrées réduites $\mathcal{N}(0;1)$ indépendantes. La loi de χ^2_ν à ν degré de liberté (d.d.l) est la loi de la variable somme des lois normales centrées réduites :

$$\chi^2_\nu = X_1 + X_2 + \ldots + X_\nu.$$

Propriétés

1. La loi de χ^2_ν prend des valeurs positives dans $\mathbb{R}$.
2. L'espérance de la loi de χ^2_ν est : $E(\chi^2_\nu) = \nu$.
3. La variance de χ^2_ν est : $V(\chi^2_\nu) = 2\nu$.

3.3 La loi $\mathcal{T}$ de Student ou de Student-Fisher

Définition 7.4. Une loi $\mathcal{T}$ de Student à ν degré de liberté (d.d.l) est le quotient d'une loi normale centrée réduite $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ par la racine carrée d'une loi de χ^2_ν à ν d.d.l. divisée par ν et les deux étant indépendantes.

$$\mathcal{T}_\nu = \frac{Y}{\sqrt{\frac{\chi^2_\nu}{\nu}}}.$$

Propriétés

1. La loi de $\mathcal{T}$ prend des valeurs positives dans $\mathbb{R}$.
2. L'espérance de la loi de $\mathcal{T}_\nu$ est : $E(\mathcal{T}_\nu) = 0$, pour $\nu > 1$.
3. La variance de $\mathcal{T}_\nu$ est : $V(\mathcal{T}_\nu) = \frac{\nu}{\nu-2}$ pour $\nu > 2$.

3.4 La loi $\mathcal{F}$ de Fisher-Snedecor

Définition 7.5. Soient deux lois indépendantes du khi deux, $\chi^2_{\nu_1}$ et $\chi^2_{\nu_2}$ à ν_1 et ν_2 degrés de liberté (d.d.l), respectivement. La variable aléatoire de Fisher-Snedecor à ν_1 et ν_2 degrés de liberté, notée $\mathcal{F}_{\nu_1,\nu_2}$ est définie comme suit :

$$\mathcal{F}_{\nu_1,\nu_2} = \frac{\frac{\chi^2_{\nu_1}}{\nu_1}}{\frac{\chi^2_{\nu_2}}{\nu_2}}$$

Propriétés

1. La loi de de Fisher-Snedecor $\mathcal{F}_{\nu_1,\nu_2}$ prend, elle aussi, des valeurs positives dans $\mathbb{R}$.
2. L'espérance de la loi de $\mathcal{F}_{\nu_1,\nu_2}$ est : $E(\mathcal{F}_{\nu_1,\nu_2}) = \frac{\nu_2}{\nu_2-2}$, pour $\nu_2 > 2$.
3. La variance de $\mathcal{F}_{\nu_1,\nu_2}$ est : $V(\mathcal{F}_{\nu_1,\nu_2}) = \frac{2\nu_2^2(\nu_1+\nu_2-2)}{\nu_1(\nu_2-4)(\nu_2-2)^2} = 2(\frac{\nu_2}{\nu_2-2})^2(\frac{\nu_1+\nu_2-2}{\nu_1(\nu_2-4)})$, pour $\nu_2 > 4$.

4 Lois multidimensionnelles

On se limitera dans cette section à deux lois de probabilités associées à deux variables aléatoires discrètes X et Y.

4.1 Loi du couple

Soient $(X, x_i)_{i\in\{1,2,\ldots,n\}}$ et $(Y, y_j)_{j\in\{1,2,\ldots,m\}}$ deux variables aléatoires discrètes. Une variable aléatoire bidimensionnelle $(Z, z_{ij}) = ((X, x_i), (Y, y_j))$, telle que :

$$\begin{aligned} P(Z = z_{ij}) &= P((X,Y) = (x_i, y_j)) \\ &= P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) \\ &= P((X = x_i)/(Y = y_j))P(Y = y_j) \\ &= P((Y = y_j)/(X = x_i))P(X = x_i). \end{aligned}$$

Si X et Y sont indépendantes :

$$P(Z = z_{ij}) = P((X,Y) = (x_i, y_j)) = P(X = x_i)P(Y = y_j).$$

4.2 Lois marginales

Les lois de (X, x_i) et (Y, y_j) sont appelées lois marginales et on a :

$$\begin{aligned} P(X = x_i) &= \sum_1^m P((X,Y) = (x_i, y_j)) = \sum_1^m P_{ij} = P_{i\bullet} \\ P(Y = y_j) &= \sum_1^n P((X,Y) = (x_i, y_j)) = \sum_1^n P_{ij} = P_{\bullet j} \end{aligned}$$

	y_1	$\dots$	y_j	$\dots$	y_m	loi marginale de X
x_1	P_{11}	$\dots$	P_{1j}	$\dots$	P_{1m}	$P_{1\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	P_{i1}	$\dots$	P_{ij}	$\dots$	P_{im}	$P_{i\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	P_{n1}	$\dots$	P_{nj}	$\dots$	P_{nm}	$P_{n\bullet}$
loi marginale de Y	$P_{\bullet 1}$	$\dots$	$P_{\bullet j}$	$\dots$	$P_{\bullet m}$	1

4.3 Notions de covariance et de coefficient de corrélation

La covariance et le coefficient de corrélation mesurent simultanément la dispersion de deux variables aléatoires, ainsi que leurs liaisons.

Covariance

D'une façon générale, la variance de la somme de deux variables aléatoires X et Y n'est pas égale à la somme de leurs variances et le terme correctif est noté $2cov(X, Y)$:

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2cov(X,Y).$$

Le terme $cov(X, Y)$ est appelé covariance de X et Y :

$$cov(X,Y) = \frac{V(X+Y) - V(X) - V(Y)}{2}.$$

Le terme $cov(X, Y)$ corrige aussi l'espérance du produit de deux variables aléatoires : $E(XY) = E(X)\,E(Y) + cov(X, Y)$.
La covariance est

$$cov(X,Y) = E\Big(\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\Big).$$

En développant cette dernière égalité, on obtient :

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Propriétés de la covariance

1. $cov(X,X) = E(X^2) - E(X)^2 = V(X)$.
2. Si X et Y sont indépendantes, alors $cov(X,Y) = 0$.
3. $cov(X,Y) = cov(Y,X)$.
4. $cov(X_1 + X_2, Y) = cov(X_1, Y) + cov(X_2, Y)$.
5. $cov(\lambda.X, Y) = \lambda.cov(X,Y)$.

Coefficient de corrélation

Le coefficient de corrélation entre, notée $\rho(X,Y)$ ou ρ_{XY}, est :

$$\rho(X,Y) = E\Big(\big(\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}\big)\big(\frac{Y - E(Y)}{\sigma(Y)}\big)\Big).$$

Diffère que de la constante $\sigma(X).\sigma(Y)$ de la $cov(X,Y)$:

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X).\sigma(Y)}.$$

Propriétés du coefficient de corrélation

1. $\rho(X,X) = 1$.
2. Pour deux variables X et Y indépendantes on a $cov(X,Y) = 0$, alors $\rho(X,Y) = 0$.
3. Le coefficient de corrélation est :

$$-1 \leq \rho(X,Y) \leq +1.$$

   Le coefficient de corrélation est proche de 1 en valeur absolue lorsque les deux variables aléatoires sont liées et proche de 0, lorsque les deux variables sont plus indépendantes.
4. Le signe de coefficient de corrélation indique le sens de variation des deux variables aléatoires : dans le même sens si il est positif et sens opposé (contraire) si il est négatif.

Exemple 7.10. soit le lancer d'un dé et soit X et Y deux variables aléatoires associées à ce lancer. X prend la valeur de 1 si le numéro observé sur la surface supérieure du dé est pair, 0 sinon ; et Y prend la valeur de 1 si le dé montre 6 et 0 dans le cas contraire.
On définit deux autres variables aléatoires $Z = X + Y$ et $U = X.Y$.

Chiffre sur le dé	1	2	3	4	5	6
X	0	1	0	1	0	1
Y	0	0	0	0	0	1
$Z = X + Y$	0	1	0	1	0	2
$U = X.Y$	0	0	0	0	0	1

Etude des variables et leurs liens :

• Pour X, on a :

$X = x_i$	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$E(X) = (0 \times \frac{1}{2}) + (1 \times \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$; $E(X^2) = (0^2 \times \frac{1}{2}) + (1^2 \times \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.
$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ et $\sigma(X) = \frac{1}{2}$.

• Pour Y, on a :

$Y = y_j$	0	1
$P(Y = y_j)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

$E(Y) = (0 \times \frac{5}{6}) + (1 \times \frac{1}{6}) = \frac{1}{6}$; $E(Y^2) = (0^2 \times \frac{5}{6}) + (1^2 \times \frac{1}{6}) = \frac{1}{6}$.
$V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$ et $\sigma(Y) = \frac{\sqrt{5}}{6}$.

• Pour Z, on a :

$Z = z_k$	0	1	2
$P(Z = z_k)$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

$E(Z) = (0 \times \frac{3}{6}) + (1 \times \frac{2}{6}) + (2 \times \frac{1}{6}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; $E(Z^2) = (0^2 \times \frac{3}{6}) + (1^2 \times \frac{2}{6}) + (2^2 \times \frac{1}{6}) = \frac{6}{6}$=1.
$V(Z) = E(Z^2) - E^2(Z) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ et $\sigma(Z) = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

• U et Y ont la même loi de distribution.

$U = u_l$	0	1
$P(U = u_l)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

$E(U) = (0 \times \frac{5}{6}) + (1 \times \frac{1}{6}) = \frac{1}{6}$; $E(U^2) = (0^2 \times \frac{5}{6}) + (1^2 \times \frac{1}{6}) = \frac{1}{6}$.
$V(U) = E(U^2) - E^2(U) = \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$ et $\sigma(Y) = \frac{\sqrt{5}}{6}$.

La covariance entre les deux variables X et Y peut être calculée de deux manières différentes :

$$\begin{aligned}
cov(X,Y) &= \frac{V(X+Y) - V(X) - V(Y)}{2} = \frac{V(Z) - V(X) - V(Y)}{2} \\
&= \frac{\frac{5}{9} - \frac{1}{4} - \frac{5}{36}}{2} = \frac{1}{12}. \\
cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) = E(U) - E(X)E(Y) \\
&= \frac{1}{6} - (\frac{1}{2} \times \frac{1}{6}) = \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

Le coefficient de corrélation est :

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X).\sigma(Y)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{6}} = \frac{\sqrt{5}}{5} = 0,447.$$

5 Exercices et corrigés

5.1 Exercices

Exercice 1 : Dans une certaine population, la probabilité qu'une personne porte des lunettes est $p = 0.01$. On constitue dans cette population un échantillon de n individus et on note X la variable aléatoire comptant le nombre de personnes portant des lunettes. On suppose que $n = 10$.

1. Quelle est la loi de X ?
   Déduire sa moyenne, sa variance et son écart type.
2. Calculer les probabilités :
   (a) que trois personnes portent des lunettes.
   (b) qu'au moins deux personnes portent des lunettes.

Exercice 2 : Un laboratoire pharmaceutique affirme que son nouveau vaccin contre le Covid-19 est efficace à 94%.
Soit X une variable aléatoire comptant le nombre de personnes vulnérables (non immunisés) au virus dans une population de 60 individus ayant été déjà vaccinés.

1. X suit quelle loi de probabilité ?
2. Par quelle loi, on peut approcher cette loi de probabilité ?
3. Calculer la probabilité qu'il y ait 5 personnes vulnérables au virus ?

Exercice 3 : Dans une certaine population, la probabilité qu'une personne porte une montre est $p = 0,01$. On constitue, dans cette population, un échantillon de n individus et on note X la variable aléatoire comptant le nombre de personnes portant des montres.

1. On suppose que $n = 10$.
   (a) Quelle loi suit X ? Déduire la moyenne et la variance de X.
   (b) Calculer la probabilité que 3 personnes portent une montre.
2. On considère le cas $n = 100$.
   (a) Par quelle loi peut-on approcher la loi de X ?
   (b) Calculer la probabilité qu'au moins 2 personnes portent une montre.
3. Dans considère le cas où $n = 1000$.
   (a) Par quelle loi peut-on approcher la loi de X ?
   (b) Calculer la probabilité qu'au moins 2 personnes portent une montre.

Exercice 4 : Un fournisseur produit deux sortes de cadenas. Les uns sont premier prix, et les autres sont haut de gamme. Un magasin de bricolage dispose d'un stock de cadenas provenant de ce fournisseur ; ce stock comprend un grand nombre de cadenas de chaque type.

D'après une étude statistique faite sur plusieurs mois, on admet que le nombre X de cadenas premier prix vendus par mois dans le magasin de bricolage peut être modélisé par une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne $m = 750$ et d'écart-type $\sigma = 25$.

1. Calculer $P(725 \leq X \leq 775)$.
2. Le responsable du magasin veut connaître le nombre n de cadenas premier prix qu'il doit avoir en stock en début de mois, pour que la probabilité d'être en rupture de stock en cours de mois soit inférieure à 0.05. On ne réalimente pas le stock en cours de mois. Déterminer la plus petite valeur de l'entier n remplissant cette condition.

Exercice 5 : Un tremblement de terre majeur se produit une fois par 150 ans dans un certain pays. Soit X une variable aléatoire donnant le temps d'attente en année avant un nouveau tremblement de terre.

1. Quelle est la de probabilité de X. Déduire son espérance mathématique, sa variance et son écart type.
2. Donner sa fonction de répartition.
3. Quelle est la probabilité qu'il y ait un tremblement de terre majeur dans les prochaines 30 années ?

Exercice 6 : Une montre digitale a une durée de vie moyenne de 100000 heures. Quelle est la probabilité qu'elle ne fonctionne plus après 5 ans ?

5.2 Corrigés

Exercice 1 : La probabilité qu'une personne porte des lunettes est $p = 0.01$.
La probabilité qu'une personne ne porte pas des lunettes est

$$q = 1 - p = 1 - 0.01 = 0.99.$$

X la variable aléatoire comptant le nombre de personnes portant des lunettes parmi les 10 personnes.

1. X suit une loi Binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0.01 \rightsquigarrow \mathcal{B}(10, 0.01)$.
   La loi de probabilité de X est :

$$p(X = k) = C_{10}^{k}.(0.01)^{k}.(0.99)^{(10-k)},$$

avec $C_{10}^{k} = \frac{10!}{(10-k)!k!}$.

(a) $E(X) = n.p = 10 \times 0.01 = 0.1$;

(b) $V(X) = n.p.q = 10 \times 0.01 \times 0.99 = 0.099$;

(c) $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.099} = 0.3146$.

2. Calcul des probabilités $P(X = 3)$ et $P(X \geq 2)$:

(a) $P(X = 3) = C_{10}^{3}.(0.01)^{3}.(0.99)^{(7)} = 0.00011184$.

(b) l'événement "au moins deux personnes portent des lunettes" est l'événement opposé à "moins de deux personnes portent de lunettes". La probabilité $P(X \geq 2)$ se calcule ainsi :

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - \Big[P(X = 0) + P(X = 1)\Big] \\ &= 1 - \Big[\Big(C_{10}^{0}.(0.01)^{0}.(0.99)^{(10)}\Big) + \Big(C_{10}^{1}.(0.01)^{1}.(0.99)^{(9)}\Big)\Big] \\ &= 1 - 0.9957379 = 0.00426. \end{aligned}$$

Exercice 2 : Un laboratoire pharmaceutique affirme que son nouveau vaccin contre le Covid-19 est efficace à 94%.

X : v.a. comptant le nombre de personnes vulnérables au virus dans une population de 60 individus ayant été déjà vaccinés.

1. X suit une loi Binomiale de paramètres : $n = 60$ et $p = 1 - 0.94 = 0.06$, car les résultats d'une épreuve est indépendant des résultats des autres épreuves (une personne vacciné peut être vulnérable ou non indépendamment des autres personnes) et pour chaque épreuve, il y a deux résultats possibles (être vulnérable au vaccin ou non).

La loi de probabilité de cette loi Binomiale est :

$$p(X = k) = C_{60}^{k}.(0.06)^{k}.(0.94)^{(60-k)}.$$

Avec

(a) $E(X) = n.p = 60 \times 0.06 = 3.6$;

(b) $V(X) = n.p.q = 60 \times 0.06 \times 0.94 = 3.384$;

(c) $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{3.384} = 1.839$.

2. Cette loi Binomiale $B(60, 0.06)$ est approchée par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np = 3.6$, vu qu'elle vérifie toutes les conditions d'approximation par la loi de Poisson :

$$\begin{cases} n = 60 > 25, \\ p < 0.1, \\ E(X) = np = 3.6 < 5. \end{cases}$$

Loi Binomiale $B(60, 0.06)$ $\rightsquigarrow$ Loi de Poisson $P(3.6)$:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

avec $\lambda = 3.6$

3. Calcul de la probabilité qu'il y ait 5 personnes vulnérables au virus :

$$P(X = 5) = \frac{(3.6)^5}{5!} e^{-(3.6)} = 0.13768.$$

Exercice 3 : X : variable aléatoire comptant le nombre de personnes portant des montres.
n : nombre de personnes.
La probabilité qu'une personne porte une montre est $p = 0.01$.
La probabilité qu'une personne ne porte pas une montre est

$$q = 1 - p = 1 - 0.01 = 0.99.$$

1. Pour $n = 10$.
   (a) la v.a. X suit une loi Binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0.01$, sa loi de probabilité est :
   $$P(X = k) = C_{10}^k (0.01)^k (0.99)^{10-k}.$$
      i. $E(X) = np = 10 \times 0.01 = 0.1$.
      ii. $V(X) = npq = 10 \times 0.01 \times 0.99 = 0.099$.

   (b) La probabilité que 3 personnes portent une montre est :
   $$P(X = 3) = C_{10}^3 (0.01)^3 (0.99)^{10-3} = 120(0.01)^3 (0.99)^7 = 0.00011184.$$

2. Pour $n = 100$, la v.a. X suit une loi Binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0.01$ avec une espérance mathématique $E(X) = np = 100 \times 0.01 = 1$.
   (a) Vu que $n = 100 > 25$ et $np = 1 < 5$, cette loi Binomiale est approchée par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np = 1$:
   $$P(X = k) = \frac{e^{-1} 1^k}{k!} = \frac{e^{-1}}{k!}.$$

   (b) La probabilité qu'au moins deux personnes portent une montre :
   $$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] \\ &= 1 - (e^{-1} + e^{-1}) = 0.2642. \end{aligned}$$

3. Pour $n = 1000$, la v.a. X suit une loi Binomiale de paramètres $n = 1000$ et $p = 0.01$ avec :

$$\begin{aligned} E(X) &= np = 1000 \times 0.01 = 10. \\ V(X) &= npq = 1000 \times 0.01 \times 0.99 = 9.9. \end{aligned}$$

   (a) Vu que $n = 1000 > 25$, $E(X) = np = 10 > 5$ et $nq = 990 > 5$, cette loi Binomiale est approchée par une loi Normale $N(m, \sigma)$, tel que

$$\begin{aligned} m &= np = 10. \\ \sigma &= \sqrt{npq} = \sqrt{9.9} = 3.1464. \end{aligned}$$

$$p(X = k) \simeq \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{k-m}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{(3.1464)\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{k-10}{(3.1464)}\right)^2}.$$

   (b) La probabilité qu'au moins deux personnes portent une montre :

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - P(\frac{X - 10}{3.1464} < \frac{2 - 10}{3.1464}) \\ &= 1 - P(Y < -2.54258) = 1 - F_Y(-2.54258) \\ &= 1 - \Big(1 - F_Y(2.54258)\Big) = F_Y(2.54258) \simeq 0.9945. \end{aligned}$$

   où la valeur de $F_Y(-2.54258)$ est déduite à partir de la table de la loi Normale centrée réduite $Y : N(0, 1)$.

Exercice 4 : La variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres $m = 750$ et $\sigma = 25$ de densité de probabilité :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{25\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-750}{25}\right)^2}.$$

1. Calcul de $P(725 \leq X \leq 775)$:

$$\begin{aligned} P(725 \leq X \leq 775 &= P\Big(\frac{725 - 750}{25} \leq \frac{X - 750}{25} \leq \frac{775 - 750}{25}\Big) \\ &= P(-1 \leq \frac{X - 750}{25} \leq 1) = P(-1 \leq Y \leq 1) = F_Y(1) - F_Y(-1) \\ &= F_Y(1) - \Big(1 - F_Y(1)\Big) = 2F_Y(1) - 1 \\ &= (2 \times 0.8413) - 1 = 0.6826. \end{aligned}$$

   où la valeur de $F_Y(1)$ est déduite à partir de la table de la loi Normale centrée réduite $Y : N(0, 1)$.

2. La plus petite valeur de l'entier n remplissant la condition $P(X > n) = 0.05$, corresponds aussi à :

$$P(X \leq n) = 1 - 0.05 = 0.95.$$

Or

$$\begin{aligned} P(X \leq n) &= P\Big(\frac{X-750}{25} \leq \frac{n-750}{25}\Big) = P\Big(Y \leq \frac{n-750}{25}\Big) \\ &= F_Y\Big(\frac{n-750}{25}\Big). \end{aligned}$$

Du tableau de la loi normale centrée réduite $N(0;1)$, la valeur de $\frac{n-750}{25}$, correspondant à

$$F_Y\Big(\frac{n-750}{25}\Big) = 0.95$$

est $\frac{n-750}{25} \simeq 1.65$, donc $n \simeq (1.65 \times 25) + 750 \simeq 791.25$.
On choisira pour valeur de n le premier entier qui suit 791.25, qu'est donné ci-dessous :

$$n = 792.$$

Exercice 5 : La variable aléatoire X donne le temps d'attente en année avant un premier événement. Comme il y a en moyenne un tremblement de terre par 150 ans il y a $\frac{1}{150}$ tremblements de terre en moyenne par année.

1. X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{150}$ et de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\frac{1}{150}x}, & \text{si } x \geq 0\,; \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

$$E(X) = 150,\ V(X) = (150)^2 \text{ et } \sigma(X) = 150.$$

2. La fonction de répartition de X est :

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{150}x}, & \text{si } x \geq 0\,; \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

3. La probabilité qu'il y ait un tremblement de terre majeur dans les prochaines 30 années est :

$$P(X < 30) = 1 - e^{-\frac{1}{150}30} = 0.18127.$$

Exercice 6 : Posons X la variable aléatoire qui donne la durée de vie en années de cette montre digitale. Sachant que, une année de 365.25 jours corresponds à 8766 heures, alors cette durée de vie moyenne (espérance de vie) de 100000 heures, de cette montre, corresponds à

$$E(X) = \frac{100000}{8766} = 11.4077 \text{ années.}$$

La variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{11.4077}$ et de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\frac{1}{11.408}x}, & \text{si } x \geq 0\,; \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La probabilité que cette montre digitale ne fonctionne plus après 5 ans est :

$$P(X \leq 5) = 1 - e^{-\frac{5}{11.4077}} = 0.3548.$$

Bibliographie

Cours de Mathématiques

(cours, exercices de Maths et de statistiques)

Auteur : Dr. Hacene GHAROUT

ISBN : 978-9969-9753-3-8

الايداع القانوني: 01/2024