

Exo 1:

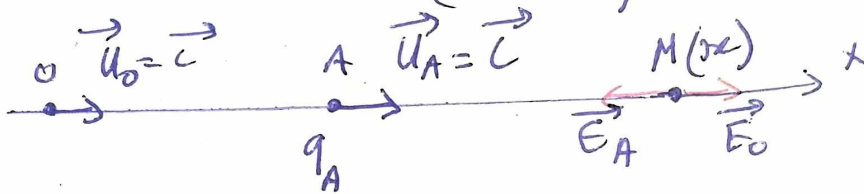
Le champ électrostatique dans les régions:

a) $x > a$:

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_0 + \vec{E}_A$$

$$= k \frac{q_0}{OM^2} \vec{u}_0 + k \frac{q_A}{AM^2} \vec{u}_A = k \frac{3q}{x^2} \vec{e} - k \frac{q}{(x-a)^2} \vec{e}$$

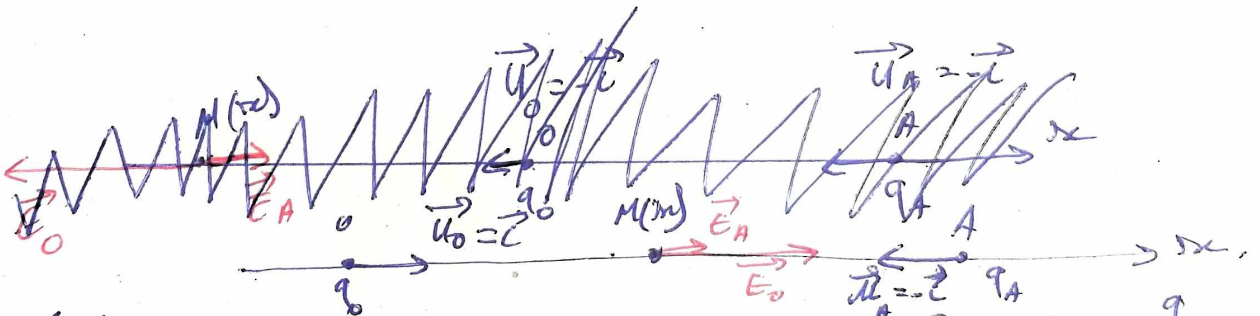
Donc: $\vec{E}(M) = kq \left(\frac{3}{x^2} - \frac{1}{(x-a)^2} \right) \vec{e}$



b) $0 < x < a$:

$$\vec{E}(M) = k \frac{q_0}{OM^2} \vec{u}_0 + k \frac{q_A}{AM^2} \vec{u}_A = k \frac{3q}{x^2} \vec{e} + k \frac{q}{(a-x)^2} \vec{e}$$

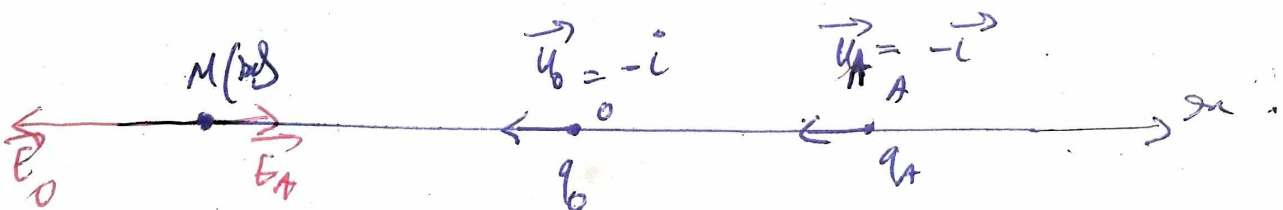
Donc: $\vec{E}(M) = kq \left(\frac{3}{x^2} + \frac{1}{(a-x)^2} \right) \vec{e}$



c) $x < 0$:

$$\vec{E}(M) = k \frac{q_0}{OM^2} \vec{u}_0 + k \frac{q_A}{AM^2} \vec{u}_A = -k \frac{3q}{x^2} \vec{e} + k \frac{q}{(a-x)^2} \vec{e}$$

Donc: $\vec{E}(M) = kq \left(-\frac{3}{x^2} + \frac{1}{(a-x)^2} \right) \vec{e}$



Si q est en équilibre $\Rightarrow$ la résultante des forces appliquées sur elle est nulle $\Rightarrow \vec{q}(M) = 0$

Donc $\vec{E}(M) = \vec{0}$. Un seul cas est possible

$$(x > a) \Rightarrow \frac{3}{x^2} - \frac{1}{(x-a)^2} = 0.$$

$$\frac{3}{x^2} = \frac{1}{(x-a)^2} \Rightarrow 3(x-a)^2 = x^2.$$

$$3(x^2 + a^2 - 2ax) - x^2 = 0.$$

$$3x^2 + 3a^2 - 6ax - x^2 = 0.$$

$$2x^2 + 3a^2 - 6ax = 0.$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{3})a \\ x_2 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{3})a < a \quad (\text{rejeté}) \end{cases}$$

Exo 2:

$$a) \vec{dE} = \frac{k dq}{r^2} \vec{u} = \frac{k \lambda_1 dy}{r^2} \vec{u}$$

$$\begin{cases} dE_x = dE \cos \alpha \\ dE_y = -dE \sin \alpha \end{cases}$$

on exprime tout en fonction de alpha:

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow r = \frac{x}{\cos \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x \tan \alpha \Rightarrow dy = \frac{x}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

Donc:

$$\begin{cases} dE_x = dE \cos \alpha = \frac{k \lambda_1 dy}{r^2} \cos \alpha = \frac{k \lambda_1}{x} \cos \alpha d\alpha \\ dE_y = -dE \sin \alpha = -\frac{k \lambda_1 dy}{r^2} \sin \alpha = -\frac{k \lambda_1}{x} \sin \alpha d\alpha \end{cases}$$

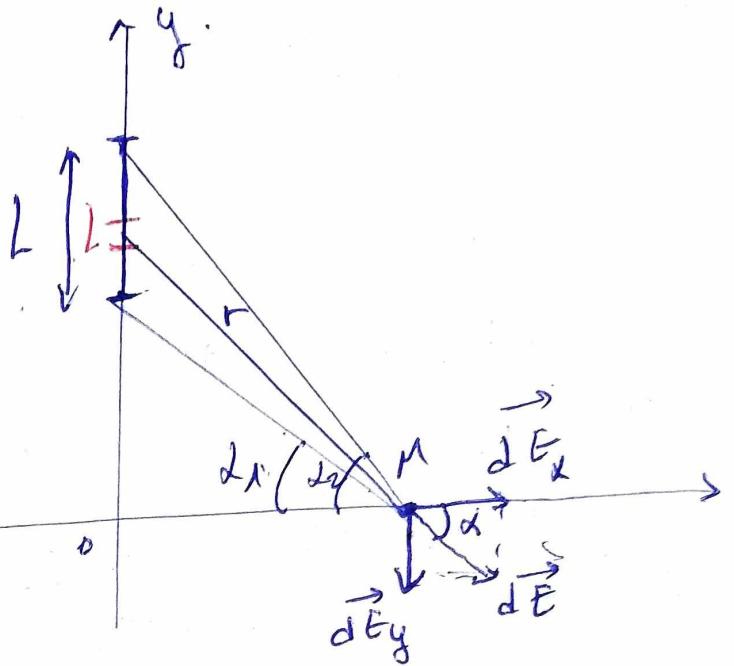
$$E_x = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{k \lambda_1}{x} \cos \alpha d\alpha = \frac{k \lambda_1}{x} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)$$

$$E_y = - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{k \lambda_1 dy}{r^2} \sin \alpha d\alpha = \frac{k \lambda_1}{x} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)$$

b) si le fil est infini donc: $\alpha_1 \rightarrow (-\frac{\pi}{2})$ et $\alpha_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} E_x = \frac{2k \lambda_1}{x} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 x} \\ E_y = 0 \end{cases}$$

Alors: $\vec{E}_M = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 x} \vec{u}$



3) champ crée par les deux fils :
En utilisant le principe de superposition.

$$\vec{E}_M = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\vec{E}_1 = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 x} \vec{c} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} \vec{c} \quad (\text{champ crée par le premier fil})$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\lambda_2}{2\pi\epsilon_0 (d-x)} \vec{c} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 (d-x)} \vec{c} \quad (\text{champ crée par le deuxième fil})$$

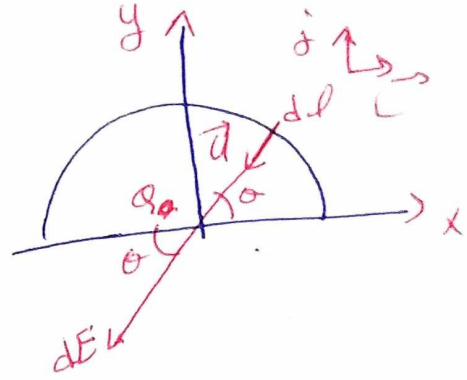
$$\vec{E}_M = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \Rightarrow \vec{E}_M = \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 (d-x)} \right) \vec{c}$$

Exo 3 :

1) calcul de $\vec{E}$

$$d\vec{E} = \frac{k dq}{r^2} \vec{u}$$

$$\begin{cases} \vec{u} = -\cos\theta \vec{e}_x - \sin\theta \vec{e}_y \\ dq = \lambda dl = \lambda R d\theta ; r = R \end{cases}$$



$$d\vec{E}(\theta) = \begin{cases} dE_x = -\frac{k dq}{R^2} \cos\theta = -\frac{k \lambda}{R} \cos\theta d\theta \\ dE_y = -\frac{k dq}{R^2} \sin\theta = -\frac{k \lambda}{R} \sin\theta d\theta \end{cases}$$

$$\vec{E}(0) = \int_0^\pi d\vec{E} = \begin{cases} E_x = -\frac{k \lambda}{R} \int_0^\pi \cos(\theta) d\theta = -\frac{k \lambda}{R} \sin\theta \Big|_0^\pi = 0 \\ E_y = -\frac{k \lambda}{R} \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta = \frac{k \lambda}{R} \cos\theta \Big|_0^\pi = -\frac{2 k \lambda}{R} \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{2 k \lambda}{R} \vec{e}_y}$$

2) le vecteur de la force $\vec{F}_{hil/q_0}$:

$$\vec{F}(M) = q_0 \vec{E}(M) = -\frac{4 k q \lambda}{R} \vec{e}_y$$

Exo 4 :

Les plans (Oxz) et (Oyz) sont des plans de symétrie
et le champ porté par l'axe (Oz) :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_z(M) \vec{k} \quad \text{élément de surface } dS, \\ dq = \sigma dS.$$

dans :

$$d\vec{E}(M) = k \frac{dq}{r^2} \vec{u} = k \frac{\sigma dS}{r^2} \vec{u}.$$

Suivant l'axe (Oz)

$$dE_z(M) = dE(M) \cos \alpha = k \frac{\sigma dS}{r^2} \cos \alpha$$

prenons comme élément de
surface, la couronne circulaire
élémentaire comprise entre
les rayons ρ et $(\rho + d\rho)$ de surface :

$$dS = 2\pi \rho d\rho$$

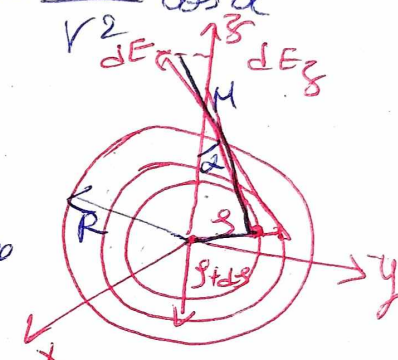
D'après la figure $r^2 = \rho^2 + z^2$.

$$\cos \alpha = \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

on en déduit que :

$$dE_z(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \cdot 2\pi \rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}.$$

l'expression de la composante E_z est obtenue par intégration



sur toute la surface du disque.

$$E_z(M) = \int_{R_1}^{R_2} dE_z = \frac{\sigma_z}{2\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{S \, dS}{(S^2 + z^2)^{3/2}}$$

changement de variable;

$$S^2 + z^2 = u \Rightarrow du = 2S \, dS$$

l'expression du champ créé par la couronne au point M pour $z > 0$.

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma_z}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{z^2 + R_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + R_2^2}} \right] \vec{k}$$

Pour un disque non percé ($R_1 = 0$)

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma_z}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{z^2 + R_2^2}} \right] \vec{k}$$

Pour un plan infini ($R_1 = 0$ et $R_2 = +\infty$).

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k}}$$