

Suite la serie TD3 (ING).

Exo5:

1) Le potentiel électrique $V(M)$ produit par cette distribution au point $M(x, y)$.

L'élément de charge dq contenue dans l'élément de longueur dl du fil et situé au point $P(x', 0)$

va créer au point $M(x, y)$ un potentiel élémentaire

$$dV(M) = \frac{k dq}{r} = \frac{k \lambda dl}{r}$$

D'après la figure $dl = dx'$

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + y^2}$$

ce qui donne:

$$dV(M) = \frac{k \lambda dx'}{\sqrt{(x - x')^2 + y^2}}$$

Le potentiel total $V(M)$ est l'intégrale de $dV(M)$ sur toute la longueur du segment:

$$V(M) = k \lambda \int_{-a}^{+a} \frac{dx'}{\sqrt{(x - x')^2 + y^2}}$$

avec le changement de variable:

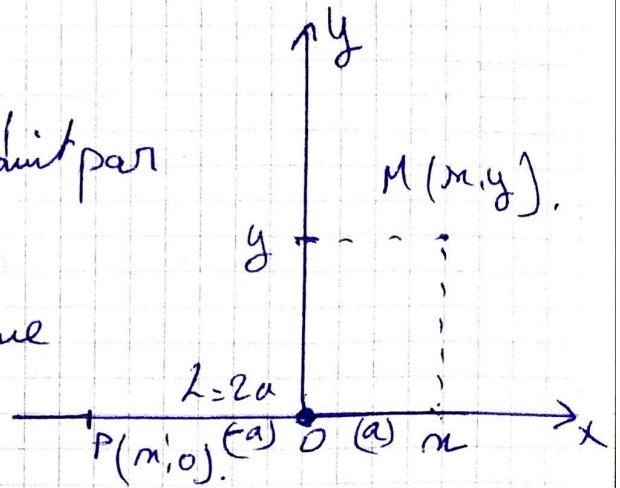
$$u = x - x' \rightarrow du = -dx'$$

ce qui donne:

$$V(M) = -k \lambda \int_{x+a}^{x-a} \frac{du}{\sqrt{u^2 + y^2}} = k \lambda \int_{x-a}^{x+a} \frac{du}{\sqrt{u^2 + y^2}}$$

cette intégrale est connue:

$$V(M) = k \lambda \left[\ln u + \sqrt{u^2 + y^2} \right]_{x-a}^{x+a} = k \lambda \ln \left(\frac{x+a + \sqrt{(x+a)^2 + y^2}}{x-a + \sqrt{(x-a)^2 + y^2}} \right)$$



Exo 6 :

1) Montrons que la densité de charge λ est symétrique par rapport à l'axe Ox .

$$\lambda(-\theta) = \lambda_0 \cos(-\theta) = \lambda_0 \cos(\theta) = \lambda(\theta).$$

2) Le potentiel électrostatique $V(O)$ crée par cette distribution au point O :

$$dV(O) = \frac{k dq}{r} = \frac{k \lambda dl}{r}.$$

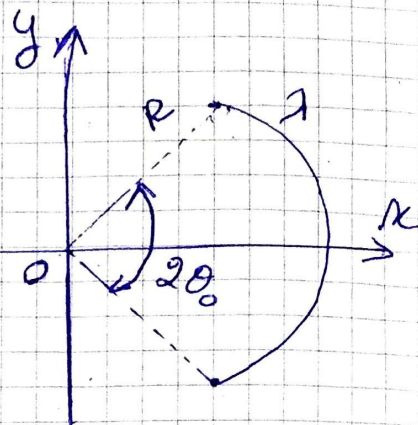
D'après la figure : $dl = R d\theta$
 $r = R.$

Ce qui donne :

$$dV(M) = \frac{k \lambda R d\theta}{R} = k \lambda d\theta = k \lambda_0 \cos(\theta).$$

Le potentiel total $V(M)$ est l'intégrale de $dV(M)$ sur toute la longueur de la tige.

$$V(M) = k \lambda_0 \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \cos \theta d\theta = 2 k \lambda_0 \sin \theta_0.$$



Exo 7 :

- 1) Le potentiel $V(M)$ créé par ce disque en un point M de son axe $z'Oz$, tel que $OM = z > 0$, déduire le champ électrique au point M :

L'élément de charge dq contenue dans l'élément de surface ds du disque va créer au point M un potentiel élémentaire :

$$dV(M) = \frac{Kdq}{r} = \frac{K\sigma ds}{r}$$

D'après la figure :

$$ds = \rho d\rho d\theta$$
$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

ce qui donne :

$$dV(M) = \frac{K\sigma \rho d\rho d\theta}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

Le potentiel total $V(M)$

$$V(M) = K\sigma \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

cette intégrale se calcule.

Le changement de variable $u = \rho^2 + z^2$ il donne

$$V(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{R_2^2 + z^2} - \sqrt{R_1^2 + z^2} \right]$$

Déduire le champ électrique au point M :

$$\vec{E}(M) = -\vec{\text{grad}} V(M) = -\frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{z}{\sqrt{R_2^2 + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{R_1^2 + z^2}} \right] \vec{k}$$

- 2) Déduire le potentiel électrostatique d'un disque plein :

$$R_1 = 0 \rightarrow V(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{R_2^2 + z^2} - z \right]$$

1) l'élément de charge dq contenue dans l'élément de surface ds du disque va créer au point M un potentiel élémentaire

$$dV(M) = \frac{k dq}{r} = \frac{k \sigma ds}{r}$$

D'après la figure: $ds = \rho d\rho d\theta$
 $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$

Ce qui donne: $dV(M) = \frac{k \sigma \rho d\rho d\theta}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = k \sigma \rho d\rho d\theta$

Le potentiel total $V(M)$ est l'intégral de $dV(M)$ sur toute la longueur de la tige.

$$V(M) = k \sigma \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \rho d\rho d\theta$$

Si le disque est chargé avec une densité non uniforme $\sigma = \sigma_0 \rho$ ou σ est constante ρ la distance par rapport au centre

$$V(M) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \rho d\rho = \frac{\sigma_0}{4\epsilon_0} (R_2^2 - R_1^2)$$