

Corrigé de la série d'exercices n° 0 2 : équations différentielles

24 février 2025

Solution d'exercice 1 (*Équations différentielles à variables séparables*)

Rappel :

Définition 1 On appelle équation différentielle d'ordre 1 à variables séparables, toute équation de la forme

$$y' = f(x)h(y)$$

où f et h sont des fonctions de classe C^1 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Résolution :

On peut ramener cette équation à une équation différentielle d'ordre 1 dite à variables séparées de la forme

$$f(x)dx = g(y)dy$$

où $g(y) = \frac{1}{h(y)}$, avec $h(y) \neq 0$, puis on intègre les deux cotés chacun par rapport à sa variable.

1. $(x+1)y' + y = 0 \dots (E_1)$.

On remarque que $y = 0$ est une solution triviale de (E_1) .

Si $y \neq 0$ on a :

$$(x+1)y' + y = 0 \Leftrightarrow (x+1)\frac{dy}{dx} + y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x+1}$$

en séparant les variables, on a

$$\frac{dy}{y} = \frac{-1}{x+1}dx,$$

d'où en intégrant le côté gauche par rapport à y et le côté droit par rapport à x , on obtient

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{1}{x+1}dx \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x+1| + C = \ln \frac{1}{|x+1|} + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

et par suite

$$|y| = \frac{1}{|x+1|}e^C \Rightarrow y = \pm e^C \frac{1}{x+1} \Rightarrow y = \frac{k}{x+1}, \quad \text{avec } k = \pm e^C.$$

Donc

$$y(x) = \frac{k}{x+1}, \quad \text{avec } k = \pm e^C$$

est la solution générale de (E_1) .

2. $y' \sin x - y \cos x = 0 \dots (E_2)$

On remarque que $y = 0$ est une solution triviale de (E_2) .

Si $y \neq 0$ on a

$$y' \sin x - y \cos x = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} \sin x - y \cos x = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} \sin x = y \cos x$$

en séparant les variables, on a

$$\frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{\sin x}dx,$$

d'où en intégrant le côté gauche par rapport à y et le côté droit par rapport à x , on obtient

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx \Rightarrow \ln|y| = \ln|\sin x| + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

et par suite

$$|y| = |\sin x| e^C \Rightarrow y = \pm e^C \sin x \Rightarrow y = k \sin x, \text{ avec } k = \pm e^C.$$

Donc

$$y(x) = k \sin x, \text{ avec } k = \pm e^C$$

est la solution générale de (E_2) .

3.

$$(I) \begin{cases} y' + \frac{xy}{1-x^2} = 0 \dots (E_3) \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

On va résoudre d'abord l'équation (E_3) .

On remarque que $y = 0$ est une solution triviale de (E_3) .

Si $y \neq 0$ on a

$$y' + \frac{xy}{1-x^2} = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{xy}{1-x^2} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{xy}{1-x^2} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{x}{1-x^2} dx$$

d'où

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{x}{1-x^2} dx \Rightarrow \ln |y| = \frac{1}{2} \ln |1-x^2| + C \Rightarrow |y| = \sqrt{|1-x^2|} e^C \Rightarrow y = \pm e^C \sqrt{|1-x^2|}$$

donc

$$y(x) = k \sqrt{|1-x^2|}, \text{ avec } k = \pm e^C.$$

est la solution générale de (E_3) .

On a : $y(0) = 1$, donc $y(0) = k \sqrt{|1-0^2|} = 1 \Leftrightarrow k = 1$. d'où

$$y(x) = \sqrt{|1-x^2|}$$

est la solution du problème (I) .

Solution d'exercice 2 (Équations différentielles linéaires d'ordre 1)

Rappel :

Définition 2 On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec second membre ou non homogène, toute équation différentielle de la forme

$$a(x)y' + b(x)y = f(x) \dots (EDL)$$

où a, b et f sont des fonctions données, continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, avec a non identiquement nulle sur I .

Méthode de résolution

1. On résout l'équation homogène Eq. Hom associée à l'équation (EDL)

$$a(x)y' + b(x)y = 0$$

qui est une équation à variables séparables.

2. En utilisons la méthode de la variation de la constante.

1.

$$y' + y = \frac{1}{1+e^x} \dots (E_1)$$

(E_1) est une équation différentielle linéaire du premier ordre. L'équation homogène associée à (E_1) est

$$y' + y = 0 \dots (EH_1)$$

Résolution de l'équation homogène :

On remarque que $y = 0$ est une solution triviale de (EH_1) .

Si $y \neq 0$ on a

$$y' + y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -dx$$

alors en intégrant des deux cotés on obtient

$$\ln |y| = -x + c_1, c_1 \in \mathbb{R}$$

d'où

$$y = ke^{-x}, \text{ où } k = \pm e^{c_1} \in \mathbb{R}.$$

Finalement, la solution générale de (EH_1) est

$$y(x) = ke^{-x}.$$

La variation de la constante

On fait varier la constante k , on a alors

$$y'(x) = k'e^{-x} - ke^{-x}$$

puis on remplace y et y' dans (E_1) on obtient

$$k'e^{-x} - ke^{-x} + ke^{-x} = \frac{1}{1+e^x}$$

et par suite

$$k' = \frac{e^x}{1+e^x} \Leftrightarrow dk = \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

d'où en intégrant on a

$$\int dk = \underbrace{\int \frac{e^x}{1+e^x} dx}_{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx} \Leftrightarrow k = \ln(e^x + 1) + c.$$

par conséquent

$$y(x) = (\ln(e^x + 1) + c)e^{-x}, c \in \mathbb{R}.$$

est la solution générale de (E_1) .

2.

$$(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x) \dots (E_2)$$

(E_2) est une équation différentielle linéaire du premier ordre. L'équation homogène associée à (E_2) est

$$(x+1)y' + y = 0.$$

Résolution de l'équation homogène :

On a :

$$(x+1)y' + y = 0 \Leftrightarrow (x+1) \frac{dy}{dx} + y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x+1} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{-1}{x+1} dx$$

d'où en intégrant on a

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{1}{x+1} dx \Rightarrow \ln |y| = -\ln |x+1| + c_1 = \ln \frac{1}{|x+1|} + c_1, c_1 \in \mathbb{R},$$

et par suite

$$|y| = \frac{1}{|x+1|} e^{c_1} \Rightarrow y = \pm e^{c_1} \frac{1}{x+1} \Rightarrow y = \frac{k}{x+1}, \text{ avec } k = \pm e^{c_1} \in \mathbb{R}.$$

Finalement, la solution générale de (EH_2) est

$$y(x) = \frac{k}{x+1}.$$

La variation de la constante

On fait varier la constante k , on a alors

$$y'(x) = \frac{k'(x+1) - k}{(x+1)^2}$$

puis on remplace y et y' dans (E_2) on obtient

$$(1+x) \frac{k'(x+1) - k}{(x+1)^2} + \frac{k}{x+1} = 1 + \ln(1+x) \Leftrightarrow k' = 1 + \ln(1+x) \Leftrightarrow \frac{dk}{dx} = 1 + \ln(1+x) \Leftrightarrow dk = (1 + \ln(1+x)) dx$$

d'où en intégrant on a

$$\int dk = \int (1 + \ln(1+x))dx = \int dx + \int \ln(1+x)dx$$

Pour calculer $\int \ln(1+x)dx$ on utilise l'intégration par parties, pour cela, on pose

$$\begin{cases} f'(x) = 1 \\ g(x) = \ln(1+x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = x \\ g'(x) = \frac{1}{1+x} \end{cases}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} \int \ln(1+x)dx &= x \ln(1+x) - \int \frac{x}{1+x} dx = x \ln(1+x) - \int \frac{(1+x)-1}{1+x} dx = x \ln(1+x) - \int dx + \int \frac{1}{1+x} \\ &= x \ln(1+x) - x + \ln(1+x) + c'. \end{aligned}$$

d'où

$$k = x + x \ln(1+x) - x + \ln(1+x) + c' = x \ln(1+x) + \ln(1+x) + c, c \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$y(x) = \frac{1}{1+x}(x \ln(1+x) + \ln(1+x) + c) = \ln(1+x) + \frac{c}{1+x}, c \in \mathbb{R}.$$

est la solution générale de (E_2) .

3.

$$(I) \begin{cases} y' + \frac{y}{\tan x} = e^{\cos x} \dots\dots (E_3) \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

(E_3) est une équation différentielle linéaire du premier ordre. L'équation homogène associée à (E_3) est

$$y' + \frac{y}{\tan x} = 0$$

résolution de l'équation homogène, ona

$$y' + \frac{y}{\tan x} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\tan x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{1}{\tan x} dx = -\frac{\cos x}{\sin x} dx$$

alors en intégrant des deux cotés on obtient

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= \underbrace{\int -\frac{\cos x}{\sin x} dx}_{\int -\frac{f'(x)}{f(x)} dx} \\ \Leftrightarrow \ln|y| &= -\ln|\sin x| + c_1 \\ \Leftrightarrow \ln|y| &= -\ln(\sin x) + c_1, \quad \text{car } \sin(x) > 0 \text{ sur }]0, \pi[\\ \Leftrightarrow |y| &= \frac{1}{|\sin x|} e^{c_1} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{k}{\sin x}, \quad k = \pm e^{c_1}. \end{aligned}$$

Finalement la solution générale de (EH_3) est

$$y(x) = \frac{k}{\sin x}.$$

La variation de la constante

On fait varier la constante k , on a alors

$$y'(x) = \frac{k' \sin x - k \cos x}{\sin^2 x}$$

puis on remplace y et y' dans (E_3) on obtient

$$\frac{k' \sin x - k \cos x}{\sin^2 x} - \frac{k}{\sin x} \frac{\cos x}{\sin x} = e^{\cos x}$$

et par suite on a

$$\frac{k'}{\sin x} = e^{\cos x} \Leftrightarrow dk = \sin x e^{\cos x} dx$$

alors en intégrant des deux cotés, on obtient

$$k = -e^{\cos x} + c, c \in \mathbb{R}$$

et par conséquent

$$y(x) = (-e^{\cos x} + c) \frac{1}{\sin x}, c \in \mathbb{R} \dots (*)$$

est la solution générale de (E_3) .

$$\text{On a } y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(-e^{\cos \frac{\pi}{2}} + c\right) \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2}} = 0 \Leftrightarrow c = 1 \text{ donc}$$

$$y(x) = (-e^{\cos x} + 1) \frac{1}{\sin x}$$

est la solution générale de (I) .

Solution d'exercice 3 (Équations différentielles linéaires du 2^{eme} ordre à coefficients constants)

Rappel :

Définition 3 Les équations différentielles linéaires du 2^{eme} ordre à coefficients constants s'écrivent sous la forme :

$$y'' + ay' + by = f(x) \dots (E)$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ et f est une fonction continue.

La solution générale de (E) s'écrit sous la forme : $y = y_p + y_h$ où y_p est une solution particulière de (E) et y_h est la solution de l'équation homogène (sans second membre).

Équation homogène :

$$y'' + ay' + by = 0 \dots (E_h)$$

Équation caractéristique :

$$r^2 + ar + b = 0 \dots (E_c)$$

- Si $\Delta > 0$ on a deux racines réelles r_1 et r_2 dans ce cas la solution de (E_h) s'écrit sous la forme

$$y_h = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}; C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

- Si $\Delta = 0$ on a une racine double r et dans ce cas la solution de (E_h) s'écrit sous la forme

$$y_h = (C_1 x + C_2) e^{rx}; C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

- Si $\Delta < 0$ on a deux racines complexes et conjuguées $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ et dans ce cas la solution de (E_h) s'écrit sous la forme

$$y_h = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x); C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Résolution de l'équation avec second membre :

La solution générale de (E) s'écrit sous la forme : $y = y_p + y_h$.

La solution particulière de l'équation (E) dépend de la forme de la fonction f .

1.

$$y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{-x} \dots (E_1)$$

L'équation homogène associée à (E_1) est

$$y'' - 4y' + 3y = 0 \dots (EH_1)$$

L'équation caractéristique de (EH_1) est

$$r^2 - 4r + 3 = 0 \dots (EC_1)$$

On a $\Delta = 4 > 0$, d'où l'équation (EC_1) admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 1$ et $r_2 = 3$. Les solutions de l'équation homogène (EH_1) sont donc les fonctions :

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x}; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Recherche d'une solution particulière y_p de (E_1) :

On a le second membre de l'équation (E_1) est

$$f(x) = (2x + 1)e^{-x}$$

Comme $r = -1$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, donc on cherche une solution particulière de (E_1) sous la forme :

$$y_p(x) = (ax + b)e^{-x}.$$

où $a, b \in \mathbb{R}$. On a

$$y'_p(x) = ae^{-x} - (ax + b)e^{-x}; y''_p = -2ae^{-x} + (ax + b)e^{-x}$$

En substituant dans l'équation (E_1) les expressions de y_p, y'_p et de y''_p ; on obtient

$$(E_1) \implies (8ax + 8b - 6a)e^{-x} = (2x + 1)e^{-x}.$$

Par identification, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 8a = 2 \\ 8b - 6a = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{5}{16} \end{cases}$$

D'où, une solution particulière y_p de (E_1) est

$$y_p(x) = \left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{16}\right)e^{-x}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h + y_p \\ &= C_1 e^x + C_2 e^{3x} + \left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{16}\right)e^{-x}; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

est la solution générale de l'équation (E_1) .

2.

$$y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^x \dots\dots(E_2)$$

L'équation homogène a déjà été résolue à la question précédente. Pour résoudre l'équation avec second membre, on remarque cette fois que $r = 1$ est racine simple de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution particulière sous la forme

$$y_p(x) = x(ax + b)e^x.$$

où $a, b \in \mathbb{R}$. On a

$$y'_p(x) = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx)e^x; y''_p = (2a + 2b + 4ax + ax^2 + bx)e^x.$$

En substituant dans l'équation (E_2) les expressions de y_p, y'_p et de y''_p ; on obtient

$$(E_2) \implies (-4ax + 2a - 2b)e^x = (2x + 1)e^x.$$

Par identification, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -4a = 2 \\ 2a - 2b = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -1 \end{cases}$$

D'où, une solution particulière y_p de (E_1) est

$$y_p(x) = \left(-\frac{x^2}{2} - x\right)e^x.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h + y_p \\ &= C_1 e^x + C_2 e^{3x} + \left(-\frac{x^2}{2} - x\right)e^x; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

est la solution générale de l'équation (E_2) .

3. $y'' + y' = \cos x$, $y(0) = y'(0) = 0$ (Problème de Cauchy).

$$y'' + y' = \cos x, \dots\dots(E_3)$$

L'équation homogène associée à (E_3) est

$$y'' + y' = 0 \dots\dots(EH_3)$$

L'équation caractéristique de (EH_3) est

$$r^2 + r = 0 \dots\dots\dots(EC_3)$$

On a $\Delta = 1 > 0$, d'où l'équation (EC_3) admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 0$ et $r_2 = -1$. Les solutions de l'équation homogène (EH_3) sont donc les fonctions :

$$y_h(x) = C_1 e^0 + C_2 e^{-x} = C_1 + C_2 e^{-x}; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Recherche d'une solution particulière y_p de (E_3) :

On a le second membre de l'équation (E_3) est

$$f(x) = \cos(x)$$

Comme i n'est pas racine de l'équation caractéristique, donc on cherche une solution particulière de (E_3) sous la forme :

$$y_p(x) = a \cos x + b \sin x$$

où $a, b \in \mathbb{R}$. On a

$$y'_p(x) = -a \sin x + b \cos x; y''_p = -a \cos x - b \sin x$$

En substituant dans l'équation (E_3) les expressions de y_p, y'_p et de y''_p ; on obtient :

$$(E_3) \implies -a \cos x - b \sin x + a \sin x + b \cos x = \cos x \implies (b - a) \cos x - (a + b) \sin x = \cos x.$$

Par identification, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} b - a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

D'où, une solution particulière y_p de (E_3) est

$$y_p(x) = \frac{-\cos x}{2} + \frac{\sin x}{2}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h + y_p \\ &= C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{-\cos x}{2} + \frac{\sin x}{2}; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

est la solution générale de l'équation (E_3) .

Pour le problème de Cauchy on a :

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{-\cos x}{2} + \frac{\sin x}{2}$$

en dérivant :

$$y'(x) = -C_2 e^{-x} + \frac{\sin x}{2} + \frac{\cos x}{2}.$$

on remplaçant par les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$, on obtient :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{1}{2} \\ -C_2 + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \implies C_1 = 0 \text{ et } C_2 = \frac{1}{2}.$$

et par suite la solution du problème du Cauchy est

$$y(x) = \frac{1}{2} e^{-x} + \frac{-\cos x}{2} + \frac{\sin x}{2}.$$