Université A. Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie

$1^{\text{ère}}$ **année ST**
Année universitaire
2024 / 2025

Corrigé de la série de TD n°3

Exercice n°1

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

1. Calculons si elles existent, les matrices suivantes :

$A+B$ n'existe pas car les matrices A et B n'ont pas les même dimensions (elles ne sont pas de la même taille).

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\cdot(-1)+2\cdot 1 & 2\cdot 1+2\cdot 0 & 2\cdot 1+2\cdot 1 \\ 1\cdot(-1)+1\cdot 1 & 1\cdot 1+1\cdot 0 & 1\cdot 1+1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

BA n'est pas défini car le nombre de colonnes de B est différent du nombre de lignes de A.

AC n'est pas défini car le nombre de colonnes de A est différent du nombre de lignes de C.

$$\begin{aligned} BC &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1\cdot 2+1\cdot 1+1\cdot 1 & -1\cdot 3+1\cdot 2+1\cdot(-1) & -1\cdot(-1)+1\cdot 1+1\cdot 1 \\ 1\cdot 2+0\cdot 1+1\cdot 1 & 1\cdot 3+0\cdot 2+1\cdot(-1) & 1\cdot(-1)+0\cdot 1+1\cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$${}^tB = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^tAB = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$^tA^tB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le produit $^tA^tB$ n'existe pas, car le nombre de colonnes de ^tA est différent du nombre de lignes de ^tB.

$$A + 5Id_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Déterminons les valeurs de a, b, c tels que $X^2 = 0$.

On a $X^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab + bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}$

et $X^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & ab + bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Par identification on a :

$$\begin{cases} a^2 = 0 \\ ab + bc = 0 \\ c^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \\ b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Exercice n°2

Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Calculons le déterminant de A :

a) En le développant suivant la première ligne

$$\det A = 1 \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - 0 \det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \det \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$
$$= 3 + 3 = 6$$

b) En le développant suivant la deuxième colonne

$$\det A = 0 \det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 3 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 3 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= 0 + 0 + 6 = 6$$

c) Par la règle de Sarrus.

Soit A' la matrice obtenue à partir de A en ajoutant la première colonne comme quatrième et la deuxième comme cinquième, donc on obtient la matrice suivante :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

alors

$det(A) = 1 \cdot 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) \cdot (-3) - 1 \cdot 3 \cdot 1 - (-3) \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) \cdot 0 = 6$

2) Le déterminant de M est non nul, la matrice carrée M est donc inversible. La comatrice de M est donnée par la formule :

$$\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} +\det\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\ +\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\mathrm{Com}\, A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}{}^t(\mathrm{Com}\, A) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

3. En terme matriciel le système (S) s'écrit sous la forme :$AX = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Résolvons le système (S) :

a. $\det A = 6 \neq 0$, donc (S) est un système de Cramer et admet une solution unique donnée par : :

$$x_j = \frac{1}{\det(A)} \times \det\left(A^j\right)$$

avec A^j est la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la colonne j par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}^t$, alors :

$$x_1 = \frac{1}{6} \times \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-18}{6} = -3$$

$$x_2 = \frac{1}{6} \times \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-6}{6} = -1$$

$$x_3 = \frac{1}{6} \times \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{24}{6} = 4$$

Alors la solution unique de système (S) est $(x_1, x_2, x_3) = (-3, -1, 4)$.

b. Par la méthode de la matrice inverse.

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Donc, $(x_1, x_2, x_3) = (-3, -1, 4)$ est la solution unique du système.

Exercice n°3

Résolvons les systèmes $(S1)$ et $(S2)$ en utilisant la méthode de Gauss :

$$(\text{S1}) \begin{cases} x + 4y - z = 1 & L_1 \\ 2x + y + 2z = 3 & L_2 \\ 3x - 2y + z = 2 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y - z = 1 & L_1 \\ 7y - 4z = -1 & (2L_1 - L_2) \\ 14y - 4z = 1 & (3L_1 - L_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y - z = 1 & L_1 \\ 7y - 4z = -1 & L_2 \\ -4z = -3 & 2L_2 - L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{3}{4} \\ 7y = -1 + 3 \\ x = 1 - 4y + \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{3}{4} \\ y = \frac{2}{7} \\ x = \frac{17}{28} \end{cases}$$

Donc : $(x, y, z) = (\frac{17}{28}, \frac{2}{7}, \frac{3}{4})$ est la solution unique du système $S1$.

$$(\text{S2}) \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 11 & L_1 \\ 2x + 3y + 4z + t = 12 & L_2 \\ 3x + 4y + z + 2t = 13 & L_3 \\ 4x + y + 2z + 3t = 14 & L_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 11 & L_1 \\ -y - 2z - 7t = -10 & L_2 - 2L_1 \\ -2y - 8z - 10t = -20 & L_3 - 3L_1 \\ -7y - 10z - 13t = -30 & L_4 - 4L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 11 & L_1 \\ -y - 2z - 7t = -10 & L_2 \\ -4z + 4t = 0 & L_3 - 2L_2 \\ 4z + 36t = 40 & L_4 - 7L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 11 & L_1 \\ -y - 2z - 7t = -10 & L_2 \\ -4z + 4t = 0 & L_3 \\ 40t = 40 & L_4 + L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t = 1 \\ z = t = 1 \\ y = -2z - 7t + 10 = 1 \\ x = 11 - 2y + 3z + 4t = 2 \end{array} \right.$$

Le système (S2) possède donc l'unique solution $(2, 1, 1, 1)$.