Université A- mira de Bejaia
Faculté des Sciences Économiques, Commerciales et des Sciences de Gestion
Module stat II
Enseignant : Dr. Mousli
Chapitre 1 : Analyse combinatoire

Définition :

L'**analyse combinatoire** est une branche des mathématiques qui étudie comment ***compter*** les objets. Elle fournit des techniques de dénombrements particulièrement utiles en théorie des probabilités.

1. Principe fondamental de l'analyse combinatoire

Si une procédure quelconque peut être représentée de n_1 façons différentes, si après, cette procédure peut être présentée de n_2 façons différentes, et si ensuite une troisième procédure peut être présentée de n_3 façons différentes, et ainsi de suite, alors le nombre de façons différentes permettant d'exécuter les procédures dans l'ordre indique est égal au produit

$$\boxed{N=n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots}$$

Exemple :

Supposant qu'une plaque d'immatriculation contient deux lettres distinctes suivies de trois chiffres dont le premier est différent de zéro. Combien de plaques différentes peut-on imprimer ?

Réponse :

Il y a 26 façons différentes d'imprimer la première lettre, 25 façons différentes d'imprimer la seconde lettre, 9 façons différentes d'imprimer le premier chiffre et dix façons différentes d'imprimer les deux autres chiffres, on déduit que l'on peut imprimer :

L1	L2	C1	C2	C3

$N = 26 \times 25 \times 9 \times 10 \times 10 = 585000$ Plaques différentes

2. Les techniques de dénombrement

2.1. Le cas d'un tirage sans répétition (sans remise)

Un tirage est sans répétition lorsque chaque objet tiré ne peut être observé qu'**une seule fois**

2.1.1. Arrangement

Un arrangement de p éléments dans un groupe parmi n éléments est une disposition ordonnée sans répétition de p éléments on note :

$$\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

Exemple :

Combien de mots à 2 lettres **distinctes** peut-on former avec les lettres a,b,c ?

Réponse : (n=3, **p=2)**, l'ordre est important, il s'agit d'un arrangement sans répétition

On a donc : a,b b,a a,c c,a b,c c,b

Donc :$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3\times2\times1!}{1!} = 6$

2.1.2. Permutation

Une permutation est un arrangement sans répétition de **n** objet parmi **n** en tenant compte de l'ordre (Autrement dit, c'est une liste ordonnée d'entiers distincts entre 1 et n).

(**Par convention**, on a : 0! = 1! = 1)

$$\boxed{P_n = n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1}$$

Exemple 1 :

Combien de mots à 3 lettres distinctes peut-on former avec les lettres a,b,c ?

Réponse :

(**n= p=3**), l'ordre est important, il s'agit d'une permutation sans répétition

a,b,c a,c,b b,a,c b,c,a c,a,b c,b,a

Donc :$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

Exemple 2 :

Combien y a-t-il de façons de placer huit personnes autour d'une table ?

Réponse :

(**n= p=8**), l'ordre est important, il s'agit d'une permutation sans répétition

$P_8 = 8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$

Exemple 3 :

4 Américains, 5 Suisses et 7 japonais doivent s'asseoir sur un même banc, et doivent rester groupés par nationalité. Combien y a-t-il de dispositions possibles ?

Réponse :

A1	A2	A3	A4	S1	S2	S3	S4	S5	J1	J2	J3	J4	J5	J6	J7

Les américains (4!) Les suisses (5!) Les japonais (7!)

$P = 4! \times 5! \times 7! \times 3!$ (Le 3! pour l'emplacement des trois nationalités)

2.1.3. Combinaison

Une combinaison sans répétition de **p** éléments parmi **n** est une disposition non ordonnée (on ne tient pas compte de l'ordre) on note :

$$\boxed{C_n^p = \frac{n!}{P!\,(n-p)!}}$$

Exemple :

Combien de combinaisons de 2 lettres distinctes peut-on former avec les lettres a,b,c ?

Réponse :

(**n=3**, **p=2**) l'ordre n'est pas important, il s'agit d'une combinaison sans répétition

Il existe donc trois combinaisons possibles qui sont : a,b a,c b,c

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3\times2\times1}{2\times1\times1} = \frac{6}{2} = 3$$

Propriétés : pour tout entier n et p tel que : $0 \leq p \leq n$, on a :

$C_n^0 = 1;\ C_n^n = 1;\ C_n^1 = C_n^{n-1} = n;\ C_n^p = C_n^{n-p}$ (Formule de symétrie)

$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p\, b^{n-p}$ (Binôme de Newton)

2.2. Le cas d'un tirage avec répétition (avec remise)

Un tirage est avec répétition lorsque chaque objet tiré peut être observé **plusieurs fois**

2.2.1. Arrangement

On dit un arrangement avec répétition de ***p*** objets distincts toutes dispositions ordonnées de ***p*** objets parmi les *n* objets où un objet peut apparaitre plusieurs fois.

$$\boxed{\grave{A}_n^p = n^p}$$

Exemple :

Combien de mots différents de 5 lettres peut-on faire avec les lettres du mot « COMBIEN » telle que une lettre peut apparaître plus d'une fois.

Réponse : (**n=7**, **p=5**), l'ordre est important, il s'agit d'un arrangement avec répétition

Il y a : $\grave{A}_7^5 = 7^5 = 16807$ mots différents.

2.2.2. Permutation

Ici on veut déterminer le nombre de permutations dans un ensemble de n objets quand certains de ces objets sont indistinguables les uns des autres.

Théorème :

Il y a $P_n = \frac{n!}{n_1!\times n_2!\times\ldots\times n_k!}$ Permutations différentes de n objets parmi lesquels n_1 indistinguable entre eux, n_2 autres entre eux également…….,$n_k$entre eux.

Exemple1 :

Considérons le mot « CELLULE ». Le nombre de mots possibles (avec ou sans signification) que l'on peut écrire en permutant ces 7 lettres est :

$P_7 = \frac{7!}{2!3!} = 420$ mots en considérant deux groupes de lettres identiques L(3fois) et E(2fois)

Exemple 2 :

Parmi les 10 participants à un tournoi d'échec, on compte 4 Russes, 3 Américains, 2 Anglais et un Brésilien. Si dans le classement du tournoi on ne peut lire que la liste des nationalités des joueurs mais pas leurs identités, à combien de classements individuels différents une telle liste correspond-elles ?

Réponse :

$P_{10} = \frac{10!}{4!3!2!1!} = 12600$ classements possibles

2.2.3. Combinaison

Une combinaison avec répétition de p objets pris dans un ensemble $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de n objets est une manière de sélectionner p fois de suite un objet dans E, sans tenir compte de l'ordre des p choix et « avec remise », le même objet pouvant donc être sélectionné plusieurs fois, on note :

$$\boxed{C'^{p}_{n} = C^{p}_{n+p-1} = \frac{(n+p-1)!}{P!\,(n-1)!}}$$

Exemple :

Lors d'un sondage, on pose à 100 étudiants une question comportant 3 réponses possibles.

-Quelle est le nombre de configuration peut-on avoir ?

Réponse :

(**n=100**, **p=3**), l'ordre n'est pas important, le nombre de configuration possibles est une combinaison avec répétition :

$$C'^{3}_{100} = C^{3}_{100+3-1} = C^{3}_{102} = \frac{102!}{3!\,(99)!} = \frac{102 \times 101 \times 100 \times 99!}{3 \times 2 \times 1 \times 99!} = 171700 \text{ configurations}$$

<u>Récapitulatif des techniques de dénombrement</u>

	Arrangement (ordre important)	**Permutation (ordre important)**	**Combinaison (ordre n'est pas important)**
Sans répétition	$A^{p}_{n} = \frac{n!}{(n-p)!}$	$P_n = n! = n \times (n-1)!$	$C^{p}_{n} = \frac{n!}{P!\,(n-p)!}$
Avec répétition	$\grave{A}^{P}_{n} = n^{p}$	$P_n = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$	$C'^{p}_{n} = C^{p}_{n+p-1} = \frac{(n+p-1)!}{P!\,(n-1)!}$

3. Exercices corrigés :

Exercice 1 :

Une loterie avec 100 inscrits, on tire 3 numéros au hasard, combien y a-t-il de gagnants possibles si :

a) Ils gagnent tous 6000DA.

b) Le premier gagne 6000DA, le deuxième en gagne 5000DA et le troisième 2000DA.

Corrigé exercice 1 :

a) Ici, l'ordre n'est pas important,

(**n=100**, **p=3**), il s'agit d'une combinaison sans répétition

$$C_{100}^{3} = \frac{100!}{3!\,(100-3)!} = \frac{100!}{3! \times 97!} = \frac{100 \times 99 \times 98 \times 97!}{6 \times 97!} = 161700 \text{ possibilités}$$

b) Ici, l'ordre est important,

(**n=100, p=3**), il s'agit d'un arrangement sans répétition :

$A_{100}^{3} = \frac{100!}{(100-3)!} = \frac{100\times99\times98\times97!}{97!} = 970200 \ \textit{possibilités}$

Exercice 2 :

Combien peut-on former de plaques d'immatriculation différentes constituées de :

a) quatre chiffres ?

b) quatre chiffres distincts ?

c) quatre chiffres dont le premier est différent de zéro ?

Corrigé exercice 2 :

a) (**n=10**, **p=4**), l'ordre est important, il s'agit d'un arrangement avec répétition

$\grave{A}_{10}^{4} = 10^4 = 10000$

b) (**n=10**, **p=4),** l'ordre est important, il s'agit d'un arrangement sans répétition.

$A_{10}^{4} = \frac{10!}{(10-4)!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040.$

c) $A_9^1 \cdot A_{10}^3 = 9 \times 10^3 = 9000$

Exercice 3 :

Avec les lettres A, B, C, D, E et F combien de mots différents de 5 lettres peut-on former :

a) au total ?

b) si les répétitions des lettres ne sont pas permises ?

c) si les répétitions des lettres ne sont pas permises et le mot commence par une consonne ?

Corrigé exercice 3 :

a) (**n=6**, **p=5**), l'ordre est important, il s'agit d'un arrangement avec répétition.

$A_6^5 = 6^5 = 7776$

b) (**n=6**, **p=5**), l'ordre est important, il s'agit d'un arrangement sans répétition.

$A_6^5 = \frac{6!}{(6-5)!} = 720$

c) $A_4^1 A_5^4 = 4 \times (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 480$

Exercices 4 :

Les 7 tomes d'un dictionnaire de l'économie sont rangés au hasard dans une bibliothèque.

a) De combien de façon peut-on les classer ?
b) Parmi toutes ces façons combien y en-t-il où les tomes 1,2,3 se trouvent côte dans cet ordre ?

Corrigé exercice 4 :

a) Le nombre de façons de classer les 7 tomes est :

$$P_7 = 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$$

b) Il y a 5 places possibles pour le tome 1, les places du tome 2 et du tome 3 sont déterminées. Il y a 4 ! façons de ranger les 4 autres tomes.
On a alors 5.4 ! façons possibles.

Exercices 5 :

Soit un lot de 7 pièces dont 4 sont bonnes et 3 sont défectueuses

a) Combien d'échantillons de 3 pièces peut-on réaliser ?
b) Combien parmi ces échantillons contiennent 3 bonnes pièces
c) Combien parmi ces échantillons contiennent au moins une pièce bonne ?

Corrigé exercice 5 :

a) Le nombre d'échantillons qu'on peut réaliser est :

$$N = C_7^3 = 35$$

b) Le nombre d'échantillons qui contiennent 3 bonnes pièces

$$N = C_4^3 = 4$$

c) Le nombre d'échantillons qui contiennent au moins une bonne pièce

$$N = C_4^1 C_3^2 + C_4^2 C_3^1 + C_4^3 C_3^0$$