Université A- mira de Bejaia
Faculté des sciences Économiques, Commerciales et des Sciences de Gestion
Module stat II
Enseignant : Dr .Mousli

Chapitre 2 : Introduction aux calculs de probabilités

1. Notion d'expérience aléatoire :

Une expérience aléatoire est une épreuve dont le résultat est imprévisible, c'à d le résultat ne peut être prévu à priori.

Exemple1 :

Le lancer d'une pièce de monnaie est une expérience aléatoire dont les résultats possibles sont : {pile, face}

Exemple2 :

Le jet d'un dé est une expérience aléatoire dont les résultats possibles sont : $\{\mathbf{1, 2, 3, 4, 5, 6}\}$

2. Espace fondamental :

C'est l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire. Il est noté Ω

Exemple : On jette deux fois une pièce de monnaie :

$$\Omega = \{(F.F), (F.P), (P.F), (P.P)\}$$

3. Notion d'événement :

Soit Ω l'espace fondamental associé à une expérience aléatoire. L'ensemble des parties de Ω noté $P(\Omega)$ représente l'ensemble des événements associés à Ω.

Exemple : jet un dé : expérience aléatoire. Son espace fondamental $\boldsymbol{\Omega} = \{\mathbf{1, 2, 3, 4, 5, 6}\}$

A : événement d'avoir un chiffre pair. $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{2, 4,6}\}$

4. Notion de cardinal :

Si Ω à un nombre fini d'éléments, alors toute partie A de Ω $(A \subset P(\Omega))$ a également un nombre fini d'éléments.

Le cardinal de A, noté $card(A)$, est le nombre d'éléments de A

Exemple : on a : $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{2, 4,6}\}$, $card(A) = 3$

5. Correspondance entre le langage probabiliste et le langage ensembliste :

5.1. L'événement certain :

C'est l'événement qui se produit quelque soit le résultat d'une expérience aléatoire.

Exemple : jet un dé, **A** événement d'avoir un chiffre positif.

5.2. L’événement impossible :

C’est l’événement qui ne se réalise pas quelque soit le résultat d’une expérience. **Exemple** : jet un dé, **A :** événement d’avoir un chiffre négatif

5.3. Implication :

On dit que l’événement **A** implique l’événement **B** si à chaque fois que **A** est réalisé, **B** l’est aussi, on écrit $A \subset B$

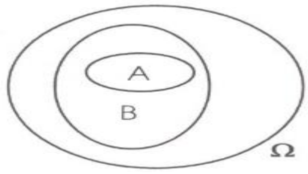
Figure 1

Exemple : jet un dé

A : événement d’avoir un chiffre pair

B : événement d’avoir un chiffre positif. Donc$A \subset B$

A= {2,4,6} **B= {1,2,3,4,5,6}**



5.4. La négation (événement complémentaire) :

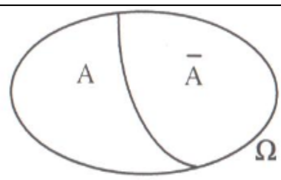
Le contraire de l’événement **A**, noté$\bar{A}$est l'événement qui se réalise lorsque A ne s'est pas réalisé. Il est dit « non A »

Figure 2

Exemple : jet un dé

A **:** événement d’avoir un chiffre pair **A = {2,4,6}**

$\bar{A}$ **:** événement d’avoir un chiffre impair. $\bar{A}$**= {1,3,5}**



5.5. La conjonction (intersection) :

L’événement **A** et **B**, noté$(A \cap B)$est l’événement qui est réalisé si A et B sont simultanément réalisés.

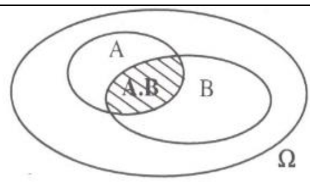
Figure 3

Exemple : jet un dé

A événement d’avoir un chiffre inférieur à **4**, **A={1,2,3}**

B événement d’avoir un chiffre impair. **B={1,3,5}.**

Donc : A∩B={1,3}



5.6. La disconjonction (union) :

L'événement **A** ou **B**, noté$(A \cup B)$est l'événement qui est réalisé si l'un des deux événements **A** ou **B** est réalisé.

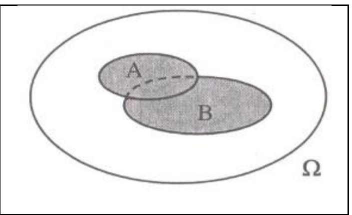
Figure 4

Exemple : jet un dé

A : événement d'avoir un chiffre inférieur à **4**, **A={1,2,3}**

B : événement d'avoir un chiffre impair. **B={1,3,5}.**

Donc :A∪B={1,2,3,5}



5.7. L'événements incompatibles :

Deux événements **A** et **B** sont dit incompatibles, s'ils ne peuvent être réalisés simultanément : c'à d :$A \cap B = \emptyset$.

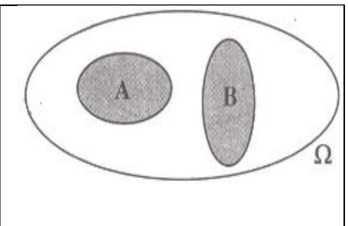
Figure 5

Exemple : jet un dé

A événement d'avoir un chiffre inférieure à **3**, **A= {1,2}**

B événement d'avoir un chiffre supérieure à **4**, **B= {5,6}**

Donc : $\boldsymbol{A \cap B = \emptyset}$.



6. Espace de probabilité :$\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{P(\Omega)}\}$

Si on effectue une expérience aléatoire dont l'espace fondamentalΩ. A chaque événement$A_i$deΩ, on lui associe un pourcentage de chance pour qu'il soit réalisé. Ce pourcentage de chance représente la probabilité pour qu'un événement$A_i$quelconque se réalise. Donc : on appelle probabilité sur$\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{P(\Omega)}\}$ une application P de$P(\Omega)$dans [0 , 1] qui satisfait : $P(\Omega) = 1$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i),$$

(Avec$\{A_i\}_{i=\overline{1.n}}$: une famille d'événements mutuellement incompatibles $\left(A_i \cap A_j = \emptyset\right)$)

Conséquence :$\boldsymbol{\forall A \subset \Omega : 0 \leq P(A) \leq 1}$

Propriétés :

1) $P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad \forall A \in \Omega$ ($\bar{A}$ est l'événement contraire de A)
2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ Si $A \cap B \neq \emptyset$.
3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ Si $A \cap B = \varphi$ (A et B sont incompatibles)
4) $P(\overline{A \cup B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$ et $P(\overline{A \cap B}) = P(\bar{A} \cup \bar{B})$.
5) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
6) $P(\emptyset) = 0$

Cas d'équiprobabilité :

L'équiprobabilité est le cas où tous les événements élémentaires ont la même probabilité d'être réalisé. Donc, s'il y a **n** événements$A_1, A_2, A_3, \ldots., A_n$, chacun a la même probabilité$\left(\frac{1}{n}\right)$d'apparaître. Dans ce cas une autre définition de la probabilité.

SoitΩfini dont les éléments sont équiprobables et **A** un événement quelconque deΩ.

On a :$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorable à A}}{\text{nombre de cas total}}$

Exercice 1 : une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On fait 2 tirages avec remise. Calculer la probabilité d'avoir 2 boules rouges.

Corrigé de l'exercice 1 :

- **La probabilité d'avoir 2 boules rouges**

Soit : l'espace fondamental :$\Omega = \{(B,B),(B,R),(R,B),(R,R)\}$ Card(Ω)=4

E : l'événement d'avoir 2 boules rouges $E = \{(R,R)\}$, Card(E)=1

$$P(E) = \frac{card(E)}{card(\Omega)} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$$

Exercice 2 : on lance 2 dés identiques. Quelle est la probabilité d'avoir :

A : la somme égale à 8

B : 2 chiffres semblables

C : la différence supérieure à 3

Corrigé de l'exercice 2 :

$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(2,6),\ldots,(6,6)\}$ $\text{card}(\Omega) = 36$

a. **La probabilité d'avoir la somme égale à 8**

$A = \{(6,2),(2,6),(5,3),(3,5),(4,4)\}$ $\text{card}(A) = 5$,

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{5}{36} = 0{,}13$$

b. **La probabilité d'avoir 2 chiffres semblables**

$B = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$ $\text{card}(B) = 6$,

$$P(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{6}{36} = 0{,}16$$

c. **La probabilité d'avoir la différence supérieure à 3**

$C = \{(6,1),(1,6),(6,2),(2,6),(5,1),(1,5)\}$ $\text{card}(C) = 6$,

$$P(C) = \frac{card(C)}{card(\Omega)} = \frac{6}{36} = 0{,}16$$

7. Probabilité conditionnelle, Notion d'indépendance :

7.1. Théorème des probabilités composées :

Soient deux événements **A** et **B** réalisés respectivement **n** et **m** fois au cours de N épreuves. De plus, si A et B sont réalisés simultanément k fois.

Alors :$P(A) = \frac{n}{N}$, $P(B) = \frac{m}{N}$ $P(A \cap B) = \frac{k}{N}$

-Que peut-on dire de la probabilité réalisée de l'événement A sachant que B est déjà réalisée ? Cette probabilité s'appelle probabilité **conditionnelle** de A sachant B. on note :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A/B) \times P(B)$$

7.2. Conséquences :

2 événements A et B sont dit **indépendants** si : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Remarque : indépendant≠incompatible.

$$\begin{cases} \text{-}incompatible = A\ et\ B\ ne\ peuvent\ pas\ se\ réaliser\ au\ même\ temps \\ \text{-}indépendant = \ lorsque\ la\ réalisation\ de\ A\ n'\text{influe}\ pas\ sur\ la\ réalisation\ de\ B \end{cases}$$

Exercice1 : Soient A et B deux événements tels que :

$$P(A \cup B) = \frac{7}{12}, \quad P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{3} \text{ et } P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Calculer les probabilités suivantes : $P(A/B)$,$P(B/A)$,$P(\bar{A}/B)$, $P(\bar{B}/A)$ et$P(\bar{A}/\bar{B})$

Corrigé :

- $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/4}{1/3} = \frac{3}{4}$;
- $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$;
- $(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$;
- $P(\bar{B}/A) = 1 - P(B/A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$;
- $P(\bar{A}/\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{1 - P(B)} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)} = \frac{1 - (7/12)}{1 - (1/3)} = \frac{5/12}{2/3} = \frac{5}{8}$

Exercice2 :

Dans un concours 75% des candidats réussissent en statistique, 85% réussissent en Maths et 55% réussissent en Maths et en statistique. On prend un candidat au hasard, qu'elle est la probabilité pour qu'il réussit en statistique sachant qu'il a réussi en Maths.

Corrigé :

S : événement que le candidat réussit en statistique

M: événement que le candidat réussit en Maths.

$$P(S/M) = \frac{P(S \cap M)}{P(M)} = \frac{0{,}55}{0{,}85} = 0{,}647$$

7.3. Théorème de Bayes (Probabilité de cause)

Soit **A** un événement qui dépend de N causes $C_k(k = 1, \ldots, N)$ différentes et incompatibles deux à deux. Etant donné que l'événement **A** est réalisé, quelle est la probabilité que se soit C_k qui est la cause. C'à d, quelle est la probabilité de réaliser un des événements de la suite C_k si l'événement **A** est déjà réalisé.

La valeur de cette probabilité est donnée par le théorème des probabilités conditionnelles donnée par la formule de Bayes

$$P(C_k/A) = \frac{P(A/C_k) \times P(C_k)}{\sum_{i=1}^{N} P(A/C_i) \times P(C_i)}$$

Remarque : la probabilité P= $\sum_{i=1}^{N} P(A/C_i) \times P(C_i)$ représente la probabilité totale pour que l'événement A soit réaliser quelque soit la cause C_k

Exercice :

Une entreprise utilise 3 machines **A, B, C** pour fabriquer des pièces, 40% de ces pièces sont fabriquées par la machine **A**, 30%par la machine **B** et 30% par la machine **C**. cependant 2% des pièces fabriquées par **A**, 4% fabriquées par **B** et 5% fabriquées par **C** sont défectueuses.

1- Construire l'arbre des probabilités décrivant la situation.

2- On prend une pièce au hasard, quelle est la probabilité pour qu'elle soit défectueuse.

3- On choisi une pièce défectueuse, qu'elle est la probabilité pour qu'elle provient de **B**

Solution :

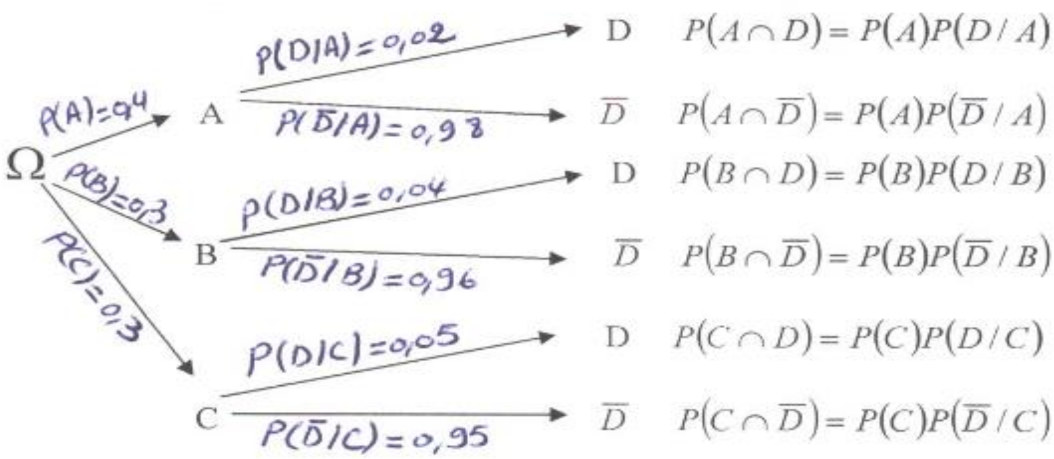
A : événement la pièce provient de A : $P(A) = 0{,}4$

B : événement la pièce provient de B : $P(B) = 0{,}3$

C : événement la pièce provient de C : $P(C) = 0{,}3$

D : événement de la pièce défectueuse

1. **Construction de l'arbre des probabilités**



2. La probabilité pour qu'elle soit défectueuse :

$D = (A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D) \Rightarrow P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)$

$P(D) = P(A) \times P(D/A) + P(B) \times P(D/B) + P(C) \times P(D/C)$

$P(D) = 0{,}4 \times 0{,}02 + 0{,}3 \times 0{,}04 + 0{,}3 \times 0{,}05 = 0{,}035$

3. La probabilité pour qu'elle provient de B sachant qu'elle est défectueuse

$$P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B)P(D/B)}{P(D)} == \frac{0{,}3 \times 0{,}04}{0{,}035} = \frac{0{,}012}{0{,}035} = 0{,}342$$