

Université A- mira de Bejaia
Faculté des sciences Économiques, Commerciales et des Sciences de Gestion
Module stat II
Enseignant : Dr .Mousli
Chapitre 3 : Variable Aléatoire et lois de probabilités

1. Introduction

Dans la plupart des phénomènes aléatoires, le résultat d'une épreuve peut se traduire par une grandeur mathématique, très souvent représentée par un nombre entier ou réel. La notion mathématique qui représente efficacement ce genre de situation est celle de la **variable aléatoire (V.A)**.

Exemple :

- Le résultat du jet d'un dé est une V.A $X = \{1,2,3,4,5,6\}$
- Le nombre de oui dans un sondage est une V.A. $X = \{0,1,2,3, \dots\}$

2. Définition de la variable aléatoire :

Une variable aléatoire est une fonction qui associe à chaque résultat d'une expérience aléatoire un nombre réel.

$$X: \Omega \rightarrow IR$$

$$\omega \rightarrow X(\omega)$$

- Elle nous fournit un moyen de décrire de façon numérique les résultats d'une expérience.
- Elle associe une valeur numérique à chaque résultat possible.

Exemple1 :

On jette 2 fois une pièce de monnaie. Soit X la variable aléatoire du nombre de face obtenues.

L'ensemble fondamental est $\Omega = \{(F.F), (P.F)(F.P), (P.P)\}$

L'ensemble des réalisations possibles est : $X = \{0,1, 2\}$.

Exemple2 :

Un joueur jette 2 fois une pièce de monnaie, si pile apparaît le joueur gagne 20 DA, si face apparaît, il perd 10 DA, Soit X la variable aléatoire associée au gain du joueur

$$\Omega = \{(F.F), (P.F)(F.P), (P.P)\} \quad X = \{-20, +10, +40\}$$

3. Variables aléatoires discrètes (V.A.D) :

3.1. Définition :

Une variable aléatoire est dite discrète si elle ne peut prendre que des valeurs discontinues. En règle générale, toutes les variables qui résultent d'un dénombrement ou d'une numérotation sont de type discret.

3.2. Loi de probabilité :

Une variable aléatoire est caractérisée par l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre par l'expression mathématique de la probabilité de ces valeurs. Cette expression s'appelle « **la loi de probabilité** » ou « **la distribution de probabilité** » de variable aléatoire.

Propriétés : La loi de probabilité P possède les propriétés suivantes :

- a. $p(x_i) \geq 0$;
- b. $\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1$

Remarque :

Généralement, la loi de probabilité d'une V.A discrète X est donnée sous forme d'un tableau comme suivant :

$X = x_i$	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n
$P(X = x_i) = p_i$	p_1	p_2	$\dots$	p_i	$\dots$	p_n

Exemple :

Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X de l'exemple précédent (exemple 2)

Corrigé :

$$\Omega = \{(F, F), (P, F), (F, P), (P, P)\}$$

Soit :

X : La variable aléatoire associée au gain du joueur

L'ensemble des réalisations possibles du gain est : $X = \{-20, +10, +40\}$

$$P(X = -20) = P(F, F) = 1/4, P(X = +10) = P(P, F) + P(F, P) = (1/4) + (1/4) = 2/4, P(X = +40) = P(P, P) = 1/4$$

$X = x_i$	-20	+10	+40	La somme
$P(X = x_i) = p_i$	1/4	2/4	1/4	1

3.3. Fonction de répartition :

On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire X , la fonction F définie par :

$$F: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$$

$$x \rightarrow F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$$

Concrètement F correspond à la distribution des probabilités cumulées :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1 \\ P(X = x_1) + \dots + P(X = x_k) & \text{si } x_k \leq x < x_{k+1} \\ 1 & \text{si } x \geq x_n \end{cases}$$

Propriétés :

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}: 0 \leq F(x) \leq 1$
- 2) F est une fonction croissante en escalier et continue à droite en tout point $x \in \mathbb{R}$;
- 3) F est à valeurs dans $[0,1]$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$4) \text{ Si } a \leq b: P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$$

Exercice :

On considère l'élément ω « lancer 3 pièces de monnaie », Soit X : La variable aléatoire associée au nombre de face obtenues.

1. Donner la loi de probabilité de X.
2. Donner la fonction de répartition de X et sa représentation graphique.

Corrigé :**1. La loi de probabilité de X**

$$\Omega = \{(P.P.P), (P.P.F), (P.F.F), (F.P.F), (P.F.P), (F.P.P), (F.F.F), (F.F.P)\},$$

$$\text{card}(\Omega) = 8$$

X : V. A associée au nombre de face obtenues.

$$X = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$P(X = 0) = 1/8 \quad ; \quad P(X = 1) = 3/8 \quad ; \quad P(X = 2) = 3/8 \quad ; \quad P(X = 3) = 1/8$$

$X = x_i$	0	1	2	3	La somme
$P(X = x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8	1
$F(x)$	1/8	4/8	7/8	(8/8)=1	-

2. La fonction de répartition :

$$F(x) = P(X_i \leq x_i)$$

$$\text{si } x < 0: F(x) = 0$$

$$\text{si } 0 \leq x < 1: F(x) = P(X = 0) = 1/8$$

$$\text{si } 1 \leq x < 2: F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) = (1/8) + (3/8) = 4/8$$

$$\text{si } 2 \leq x < 3: F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = (1/8) + (3/8) + (3/8) = 7/8$$

$$\text{si } x \geq 3: F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = (1/8) + (3/8) + (3/8) + (1/8) = 1$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{8} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{4}{8} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

La Représentation graphique de la fonction de répartition de X

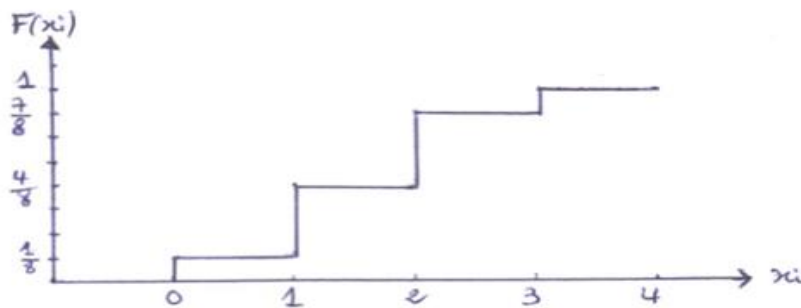


Figure.1 : Diagramme en escalier de la fonction de répartition de la variable aléatoire X

3.4. Caractéristique d'une variable aléatoire discrète

a) L'espérance :

L'espérance d'une variable aléatoire X correspond à la moyenne des valeurs possibles de X pondérées par les probabilités associées à ces valeurs.

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un univers fini Ω , on appelle espérance mathématique de la variable aléatoire X , le nombre $E(X)$, défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Propriété :

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes et a une constante quelconque :

- $E(a) = a$
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(a + X) = E(a) + E(X)$
- $E(aX) = aE(X)$

b) La variance :

On appelle variance de la variable aléatoire X , le nombre $V(X)$ définie par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p_i = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

Propriétés : soient X une variable aléatoire discrète et a, b deux constantes de $\mathbb{R}$:

- $V(X) \geq 0$
- $V(a) = E(a^2) - (E(a))^2 = 0$
- $V(a + X) = V(a) + V(X) = V(X)$
- $V(aX) = a^2 V(X)$
- $V(aX + b) = V(aX) + V(b) = a^2 V(X)$

c) L'écart-type :

On appelle écart-type de la variable aléatoire X , la racine carrée de la variance, on le note $\sigma(X)$ tel que :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Exemple :

Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de la V.A. X dans l'exemple précédent (exemple 2)

$X = x_i$	-20	+10	+40	La somme
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{4} = 1$
$x_i \times p_i$	$\frac{-20}{4}$	$\frac{20}{4}$	$\frac{40}{4}$	$\frac{40}{4} = 10$
$x_i^2 \times p_i$	$\frac{400}{4}$	$\frac{200}{4}$	$\frac{1600}{4}$	$\frac{2200}{4} = 550$

• **L'espérance :**

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \times p_i = \left(-20 \times \frac{1}{4}\right) + \left(+10 \times \frac{2}{4}\right) + \left(+40 \times \frac{1}{4}\right) = 10 \text{ DA}$$

• **La variance :**

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^3 x_i^2 \times p_i = \left((-20)^2 \times \frac{1}{4}\right) + \left((+10)^2 \times \frac{2}{4}\right) + \left((+40)^2 \times \frac{1}{4}\right) = \frac{2200}{4} = 550$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 550 - (10)^2 = 450$$

• **L'écart type :**

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{450} = 21,213 \text{ DA}$$

Exercice :

Une unité de production est gérée par 10 personnes comprenant 4 femmes et 6 hommes. On veut élire parmi eux un comité de 3 personnes. Soit X la variable aléatoire qui détermine le nombre de femmes choisies.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. Donner la fonction de répartition de X et sa représentation graphique.
3. Calculer l'espérance et la variance de X .
4. Quelle est la probabilité de choisir au plus une femme ?

Corrigé :**1-La loi de probabilité**

X : la variable aléatoire qui détermine le nombre de femmes choisies

$$X = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$P(X = 0) = \frac{C_4^0 C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1 \times 20}{120} = \frac{5}{30}$$

$$P(X = 1) = \frac{C_4^1 C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{4 \times 15}{120} = \frac{60}{120} = \frac{15}{30}$$

$$P(X = 2) = \frac{C_4^2 C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{6 \times 6}{120} = \frac{36}{120} = \frac{9}{30}$$

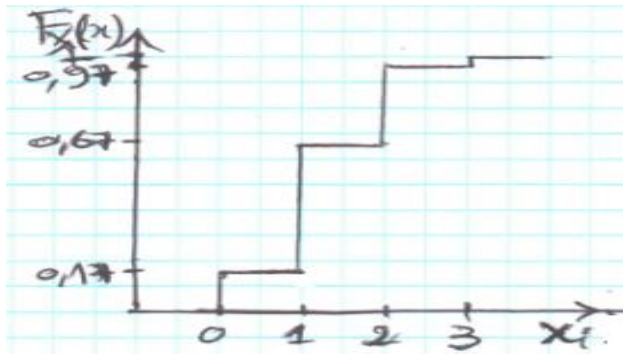
$$P(X = 3) = \frac{C_4^3 C_6^0}{C_{10}^3} = \frac{4 \times 1}{120} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

X	0	1	2	3	La somme
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{30} = 0,17$	$\frac{15}{30} = 0,5$	$\frac{9}{30} = 0,3$	$\frac{1}{30} = 0,033$	1
$F_X(x_i)$	0,17	0,67	0,97	1	-
$x_i \times p_i$	0	0,5	0,6	0,1	1,2
$x_i^2 \times p_i$	$\frac{0}{30} = 0$	$\frac{15}{30} = 0,5$	$\frac{36}{30} = 1,2$	$\frac{9}{30} = 0,3$	$\frac{60}{30} = 2$

2- La fonction de répartition $F_X(x_i)$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0,17 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0,67 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0,97 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

La représentation graphique de $F_X(x_i)$



3- Calcul de l'espérance

$$E(X) = \sum_{i=1}^4 x_i p_i = 1,2$$

Calcul de la variance

$$V(X) = \sum_{i=1}^4 x_i^2 p_i - E(X)^2 = 2 - (1,2)^2 = 0,56$$

4- La probabilité de choisir au plus une femme

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{5}{30} + \frac{15}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} = 0,67$$

Ou bien :

$$P(X \leq 1) = F(1) = 0,67$$

4. Variable aléatoire continue (V.A.C) :

4.1. Définition :

Une variable aléatoire est dite **continue** si elle peut prendre **toutes les valeurs** dans un intervalle donné (borné ou non borné). En règle générale, toutes les variables qui résultent d'une **mesure** de type continu.

Exemple : -La durée de vie appareils, des individus, etc.

-Les grilles des salaires journaliers des travailleurs d'une entreprise.

4.2. Fonction densité de probabilité :

Dans le cas d'une variable aléatoire continue, la loi de probabilité associe une probabilité à chaque ensemble de valeurs définies dans un intervalle donné.

Définition : On dit que X est une variable aléatoire continue s'il existe une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tels que :

a. $\forall x \in \mathbb{R}: f(x) \geq 0$ (f est positive)

b. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

La fonction est alors appelée **densité de probabilité** de la variable aléatoire continue X .

Conséquences

Soient a et b deux constantes de l'ensemble $\mathbb{R}$.

- a. $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx$
- b. $P(a \leq x \leq b) = P(a < x \leq b) = P(a \leq x < b) = P(a < x < b)$
- c. $P(X \leq a) = P(X < a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$
- d. $P(X \geq a) = P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - \int_{-\infty}^a f(x) dx$

4.3. Fonction de répartition d'une variable aléatoire continue :

On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire X , la fonction F définie par :

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow F(x) = P(X \leq x)$$

Par conséquent, il existe une relation entre la fonction densité de probabilité et la fonction de répartition :

$$\forall x \in \mathbb{R}: F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad \text{et} \quad F'(x) = f(x)$$

Propriétés :

- a. $\forall a, b \in \mathbb{R}, P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f(x) dx$
- b. F est une fonction croissante et continue en tout point $x \in \mathbb{R}$;
- c. F est à valeurs dans $[0,1]$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

$$x \rightarrow +\infty$$

Exemple :

On considère la variable aléatoire continue X à laquelle on associe la fonction densité de probabilité :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ \frac{a}{2}x + a & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ -ax + a & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1. Pour quelle valeur de a f est une densité de probabilité.
2. Donnez sa fonction de répartition.

Corrigé :

1)

f est densité de probabilité si et seulement si : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{-2} 0 dx + \int_{-2}^0 \left(\frac{a}{2}x + a\right) dx + \int_0^1 (-ax + a) dx + \int_1^{+\infty} 0 dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0 + \left[\frac{a}{4}x^2 + ax\right]_{-2}^0 + \left[\frac{-ax^2}{2} + ax\right]_0^1 + 0 = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = -(a - 2a) + \left(\frac{-a}{2} + a\right) = a + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2} = 1 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

Donc on a :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

2) Fonction de répartition :

$$* \text{ si } x < -2 : F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$$

$$\begin{aligned} * \text{ si } -2 \leq x < 0 : F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^{-2} 0 dt + \int_{-2}^x \left(\frac{1}{3}t + \frac{2}{3}\right) dt \\ &= 0 + \left[\frac{1}{6}t^2 + \frac{2}{3}t\right]_{-2}^x \\ &= \left(\frac{x^2}{6} + \frac{2}{3}x\right) - \left(\frac{4}{6} - \frac{4}{3}\right) = \frac{x^2}{6} + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \text{ si } 0 \leq x < 1 : F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^{-2} 0 dt + \int_{-2}^0 \left(\frac{1}{3}t + \frac{2}{3}\right) dt + \int_0^x \left(-\frac{2}{3}t + \frac{2}{3}\right) dt \\ &= 0 + \left[\frac{t^2}{6} + \frac{2}{3}t\right]_{-2}^0 + \left[-\frac{2}{6}t^2 + \frac{2}{3}t\right]_0^x \\ &= 0 - \left(\frac{4}{6} - \frac{4}{3}\right) - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$* \text{ si } x \geq 1 : F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ \frac{x^2}{6} + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ -\frac{x^2}{3} + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

4.4. Caractéristique de variable aléatoire continue

a) L'espérance

Si X est une variable aléatoire continue de densité f , on appelle espérance de X , le réel $E(X)$, définit par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$$

Propriété :

Soient X et Y deux variables aléatoires continues et a et b deux constantes quelconques :

- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(aX + b) = aE(X) + b$

b) La variance

Si X est une variable aléatoire continue de densité f , on appelle variance de X , le réel $V(X)$, définit par :

$$V(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx$$

$$\text{ou bien : } V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \right]^2$$

c) L'écart type :

L'écart type de la variable aléatoire continue est la valeur $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Exemple :

Soit X une variable aléatoire continue de densité :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de la variable aléatoire X .

- **Calcul de l'espérance**

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{-2} x \cdot 0 \, dx + \int_{-2}^0 x \cdot \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right) dx + \int_0^1 x \cdot \left(-\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\right) dx + \int_1^{+\infty} x \cdot 0 \, dx$$

$$E(X) = \int_{-2}^0 \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x\right) dx + \int_0^1 \left(-\frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x\right) dx$$

$$E(X) = \left[\frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{3}\right]_{-2}^0 + \left[\frac{-2x^3}{9} + \frac{x^2}{3}\right]_0^1 = 0 - \left(\frac{-8}{9} + \frac{4}{3}\right) + \left(\frac{-2}{9} + \frac{1}{3}\right) = \frac{-1}{3}$$

- **Calcul de la variance**

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) \, dx - E(X)^2$$

On calcule d'abord : $E(X)^2$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) \, dx$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{-2} x^2 \cdot 0 \, dx + \int_{-2}^0 x^2 \cdot \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right) dx + \int_0^1 x^2 \cdot \left(-\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\right) dx + \int_1^{+\infty} x^2 \cdot 0 \, dx$$

$$E(X^2) = 0 + \int_{-2}^0 \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2\right) dx + \int_0^1 \left(-\frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2\right) dx + 0$$

$$E(X^2) = 0 + \left[\frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{9}x^3\right]_{-2}^0 + \left[-\frac{2}{12}x^4 + \frac{2}{9}x^3\right]_0^1 + 0$$

$$E(X^2) = 0 - \left(\frac{16}{12} - \frac{16}{9}\right) + \left(-\frac{2}{12} + \frac{2}{9}\right) = \frac{1}{2}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{2}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{9} = \frac{7}{18} = 0,388$$

Donc la $V(X) = 0,388$

- **Calcul de l'écart type**

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0,388} = 0,622$$

5. Les moments :

5.1. Moment simple :

Un moment simple d'ordre k est l'espérance d'une variable aléatoire à la puissance k . Il est défini par : $\mathbf{m}_k = E(X^k) = \sum_i x_i^k P(X = x_i)$. C'est pourquoi on appelle parfois l'espérance par le moment d'ordre 1. ($E(X) = \mathbf{m}$)

5.2. Moment centré :

Un moment centré d'ordre k est l'espérance de l'écart entre les valeurs prises par la variable aléatoire et leur espérance, à la puissance k . Il est défini par : $\mu_k = E(X - \mathbf{m})^k = \sum_i (x_i - \mathbf{m})^k P(X = x_i)$.

On remarque que la variance correspond au moment centré d'ordre 2 : $\mu_2 = V(X)$

Exercice :

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de densité de probabilité f donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0 ; 1[\\ 2 - x & \text{si } x \in [1 ; 2[\\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une fonction densité de probabilité.
2. Donner la fonction de répartition de la variable X .
3. Calculer l'espérance et la variance de la variable X .
4. Calculer la probabilité $P(0,5 < X < 1,5)$.

Corrigé :**1. Montrons que f est une fonction de densité**

f est une densité si : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^1 x dx + \int_1^2 (2-x) dx + \int_2^{+\infty} 0 dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \frac{1}{2} + (4-2) - \left(2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

Donc f est une densité de probabilité.

2. La fonction de répartition

$$\text{- si } x \in [0 ; 1[: F_X(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x = \frac{1}{2} x^2$$

$$\text{- si } x \in [1 ; 2[: F_X(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^1 t dt + \int_1^x (2-t) dt = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[2t - \frac{t^2}{2} \right]_1^x$$

$$F_X(x) = \frac{1}{2} + \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) - \left(2 - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2} x^2 + 2x - 1$$

$$\text{- si } x \in [2 ; +\infty[: F_X(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^1 t dt + \int_1^2 (2-t) dt + \int_2^x 0 dt = 1$$

$$\text{D'où : } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-\infty ; 0[\\ \frac{1}{2} x^2 & \text{si } x \in [0 ; 1[\\ -\frac{1}{2} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \in [1 ; 2[\\ 1 & \text{si } x \in [2 ; +\infty[\end{cases}$$

3. Calcul de l'espérance et de la variance

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^0 x \cdot 0 dx + \int_0^1 x \cdot x dx + \int_1^2 x \cdot (2-x) dx + \int_2^{+\infty} x \cdot 0 dx \\ &= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2x - x^2) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[\frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \left(\frac{1}{3} \right) + \left(4 - \frac{8}{3} \right) - \left(1 - \frac{1}{3} \right) = 1 \end{aligned}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^0 x^2 \cdot 0 dx + \int_0^1 x^2 \cdot x dx + \int_1^2 x^2 \cdot (2-x) dx + \int_2^{+\infty} x^2 \cdot 0 dx - (1)^2$$

$$V(X) = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (2x^2 - x^3) dx - 1$$

$$V(X) = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 + \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_1^2 - 1 = \frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6}$$

4. Calcul de probabilité $P(0,5 < X < 1,5)$

$$P(0,5 < X < 1,5) = F(1,5) - F(0,5)$$

$$P(0,5 < X < 1,5) = \left(2(1,5) - \frac{1}{2}(1,5)^2 - 1 \right) - \left(2(0,5) - \frac{1}{2}(0,5)^2 - 1 \right) = 1$$