Université A- mira de Bejaia
Faculté des Sciences Économiques, Commerciales et des Sciences de Gestion
Module stat II
Enseignant : Dr. Mousli

Chapitre 4 : Lois de probabilité d'une variable aléatoire discrète

1. Introduction :

Il est toujours possible d'associer à une variable aléatoire une probabilité et ainsi ce qu'on appelle une loi de probabilité.

Identifier la loi de probabilité suivit par une variable aléatoire est essentiel car cela conditionne le choix des méthodes employées pour l'étude des phénomènes aléatoires.

2. Loi de Bernoulli :

On dit que la variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli lorsque l'ensemble des résultats possibles se réduit à deux résultats possibles « Succès » ou « Échec » ($\Omega = \{S, E\}$).

L'ensemble des réalisations $X = \{0,1\}$ Tel que :

$$\begin{cases} P(X=1) = p & (p : \textbf{probabilité de succès}) \\ P(X=0) = q & (q = 1-p : \textbf{probabilité de l'échec}) \end{cases}$$

P s'appelle le paramètre de la loi de Bernoulli.

On note : $X \sim B(P)$

$\boldsymbol{X = x_i}$	1	0	Total
$\boldsymbol{P(X = x_i)}$	p	$1-p$	1

2.1. Caractéristiques :

-L'espérance : $E(X) = p$

-La variance : $V(X) = p \times q$

Exemple :

On lance un dé bien équilibré. Soit X la variable aléatoire donnée par :

$$X = \begin{cases} 1\ (succés)\ si\ le\ résulat\ \ est\ \ égale\ \ à\ \ 6 \\ 0\ (échec) si\ le\ résulat\ est\ inférieure\ à\ 6 \end{cases}$$

$$P(X=0) = q = (1-p) = (1-\frac{1}{6}) = \frac{5}{6}$$

$$P(X=1) = p = \frac{1}{6}$$

Donc : $X \sim B\left(\frac{1}{6}\right)$

$\boldsymbol{X = x_i}$	1	0	Total
$\boldsymbol{P(X = x_i)}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	1

L'espérance : $E(X) = p = \frac{1}{6}$

La variance : $V(X) = p \times q = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$

3. Loi de Binomiale :

Démontré pour la première fois par le suisse Jacob Bernoulli en 1713. Elle est l'une des distributions de probabilité les plus répandues en statistiques appliquées.

Soit $X \ :\Omega^n \to IR^n \quad (X = X_1 + X_2 + \cdots X_n)$

On dit que la variable aléatoire$X$suit une loi de Binomiale de paramètres n et p lorsqu'on répète n fois une épreuve de Bernoulli de manière **identique et indépendante,** On note : $X \sim B(n, p)$. Où : n est le nombre de répétition de l'expérience de Bernoulli et p est la probabilité d'avoir le résultat succès.

La probabilité pour que$X = k$, c'à d obtenir le succès lors des $n$expériences est donnée par :

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad \text{avec: } C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

3.1. Caractéristiques :

L'espérance : $E(X) = E(X_1 + X_2 + \cdots X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = n \times p$

La variance : $V(X) = V(X_1 + X_2 + \cdots X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} pq = n \times p \times q$

Exemple :

On jette 20 fois une pièce de monnaie dans les mêmes conditions.

Calculer la probabilité d'avoir :

1) 13 fois pile
2) 8 fois face.

Corrigé :

La variable aléatoire$X$qui donne le nombre de succès obtenu suit une loi binomiale de paramètres n=20 et p= 0.5. C'est-à-dire : $X \sim B(20, 0.5)$.

soit: $\begin{cases} \text{Succès:Pile} \\ \text{échec: Face} \end{cases}$ $\qquad P(X = k) = C_{20}^k (0,5)^k (0,5)^{20-k}$

1) $P(X = 13) = C_{20}^{13} (0,5)^{13} (0,5)^7 \approx 0,074$
2) Ici, avoir 8 faces sur 20 épreuves est l'équivalent d'avoir 12 piles, donc on a :

$P(X = 12) = C_{20}^{12} (0,5)^{12} (0,5)^8 \ = 0,120$

Exercice1 :

On interroge 10 étudiants de la même manière (chacun de manière identique et indépendante) s'ils aiment les statistiques, on part du principe que 60% des étudiants aiment les statistiques.

Soit X : la variable aléatoire associée au nombre d'étudiants qui aiment les statistiques.

1-Quelle est la probabilité que 6 étudiants aiment les statistiques ?

2-Quelle est la probabilité que 3 étudiants n'aiment pas les statistiques ?

Corrigé de l'exercice 1 :

La variable aléatoire X associée au nombre d'étudiants qui aiment les statistiques suit une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0{,}6$. On note : $X \sim B(10, 0.6)$.

1- $P(X = 6) = C_{10}^{6}(0{,}6)^{6}(0{,}4)^{4} = 0{,}25$

2- Ici, si 3 étudiants parmi 10 n'aiment pas les statistiques c'est l'équivalent de dire que 7 étudiants aiment les statistiques, d'où :

$P(X = 7) = C_{10}^{7}(0{,}6)^{7}(0{,}4)^{3} \approx 0{,}215$

Exercice 2 :

Dix pour cent (10%) des articles produits par une machine sont défectueux. On prélève au hasard 6 articles. Quelle est la probabilité que parmi ces 6 articles :

1) Un est défectueux
2) Moins de 3 sont défectueux

Corrigé de l'exercice 2 :

La probabilité qu'un article soit défectueux parmi la production de la machine est : $p = P(\text{défectueux}) = 0{,}1$. La probabilité que cet article soit non défectueux est : $q = P(\text{non défectueux}) = (1 - p) = (1 - 0{,}1) = 0{,}9$

L'expérience est répétée n=6 fois et indépendamment, alors :

$X \to B(n, p) = B(6, 0.1)$, donc:$P(X = k) = C_{6}^{k}(0{,}1)^{k}(0{,}9)^{6-k}$

1) $P(X = 1) = C_{6}^{1}(0{,}1)^{1}(0{,}9)^{5} = 0{,}35$

2) $P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$P(X < 3) = C_{6}^{0}(0{,}1)^{0}(0{,}9)^{6} + C_{6}^{1}(0{,}1)^{1}(0{,}9)^{5} + C_{6}^{2}(0{,}1)^{2}(0{,}9)^{4} = 0{,}53 + 0{,}35 + 0{,}1 = 0{,}98$

4. Loi de Poisson :

Découverte au début du 19ème siècle par le magistrat français : **Simon-Denis Poisson.** La loi de Poisson intervient dans la modélisation de phénomènes aléatoires où le futur est indépendant du passé. Elle s'applique donc aux phénomènes accidentels où la probabilité Pest très faible$(P < 0{,}05)$. Par exemple, elle peut intervenir dans des problèmes de pannes de machines, les appels téléphoniques, etc.

Définition :

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ $(X \sim P(\lambda))$, si pour tout entier *k*, sa loi de probabilité est donnée par : $P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k}}{k!}$ λ: Espérance de X

4.1. Caractéristiques :

L'espérance :$E(X) = \lambda$;

La variance : $V(X) = \lambda$.

Exercice :

Une centrale téléphonique reçoit en moyenne 300 appels par heure. On suppose que le nombre d'appels pendant un intervalle de temps suit une loi de Poisson.

Calculer la probabilité que durant deux minutes la centrale reçoit :

1) Trois appels
2) Au moins un appel
3) Au plus deux appels

Corrigé :

Pendant deux minutes la centrale reçoit en moyenne $2 \times \frac{300}{60} = 10$appels.$\lambda = 10$est le paramètre de la loi de poisson.

Si Xest la V.A représentant le nombre d'appels durant deux minutes on a :

1)$P(X = 3) = e^{-10} \dfrac{10^3}{3!} = 0{,}0067$

2)$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-10} \dfrac{10^0}{0!} = 0{,}9999$

3)$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = e^{-10}\left(1 + \frac{10^1}{1!} + \frac{10^2}{2!}\right) = 0{,}0025$

4.2. Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson :

Lorsque (n) devient très grand où p très petit, les calculs de probabilité par la loi binomiale peut être approximative à d'autre loi de probabilité.

Condition d'approximation par la loi de Poisson :

Une loi binomiale$B(n, p)$peut être approximer par une loi de poisson de paramètre $\lambda = n \times p$ si:

- n est grand $(n \geq 50)$
- p est petit $(P \leq 0{,}1)$

Exercice :

On opère 100 fois une expérience aléatoire dans laquelle la probabilité d'avoir succès est p=0,05.

1) Calculer la probabilité d'avoir 3 succès
2) Calculer la probabilité d'avoir au moins 5 succès

Corrigé :

1) La probabilité d'avoir 3 succès

$P(X = 3) = C_{100}^{3}(0{,}05)^3(0{,}95)^{97}$ =0,139≈ $0{,}14$.

2) La probabilité d'avoir au moins 5 succès

$P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - [\,P(X = 0) + P(X = 1) + \cdots + P(X = 4)]$

On a $n = 100 > 50$ et $P = 0{,}05 < 0{,}1$, donc les deux conditions d'approximation de la loi Binomiale par la loi de Poisson sont satisfaites, d'où :

$B(100, 0.05) \sim P(\lambda) = e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^k}{k!}$ avec : $\lambda = np = 100 \times 0{,}05 = 5$

$P(X = 3) = e^{-5}\frac{5^3}{3!}$=0,14

$P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5)$

$P(X \geq 5) = 1 - [\,P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)]$

$$P(X \geq 5) = 1 - \left[e^{-5} \times \frac{5^0}{0!} + e^{-5} \times \frac{5^1}{1!} + e^{-5} \times \frac{5^2}{2!} + e^{-5} \times \frac{5^3}{3!} + e^{-5} \times \frac{5^4}{4!}\right]$$

$$P(X \geq 5) = 1 - e^{-5}\left[\frac{5^0}{0!} + \frac{5^1}{1!} + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} + \frac{5^4}{4!}\right]$$

$P(X \geq 5) = 1 - 0{,}4405 = 0{,}5595$

5. Loi Géométrique

La loi géométrique est une loi de probabilité discrète qui modélise l'observation du nombre d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes devant se succéder pour espérer un premier succès. C'est-à-dire au lieu de réaliser un nombre fixé d'essais lors d'un schéma de Bernoulli, l'expérimentateur s'arrête au premier succès. La valeur qui nous intéresse est le nombre d'essais effectués jusqu'au premier succès inclus. Le nombre de succès est donc fixé à 1, mais le nombre d'essais total X est aléatoire et peut prendre n'importe quelle valeur entière supérieure ou égale à 1.

On dit alors qu'une variable aléatoire X suit une loi géométrique, si sa loi de probabilité est donnée par : $P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$,

(avec p la probabilité de succès et k le nombre de tirage) $X \to G(P)$

5.1. Caractéristiques :

L'espérance : $E(X) = \frac{1}{p}$;

Par exemple, il faut en moyenne six essais pour obtenir un 6 avec un dé non truqué (l'inverse de 1/6).

La variance :

$$V(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

Exemple :

Une urne contient 4 boules blanches et 6 boules rouges. On les tire une à une avec remise jusqu'à ce que l'on obtienne une boule blanche. Soit X : la variable aléatoire "rang de la première boule blanche". X suit une loi géométrique de paramètre p=4/10.

- Calculer la probabilité de tirer la première boule blanche au cinquième tirage.
- Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

Corrigé :

- **La probabilité de tirer la première boule blanche au cinquième tirage**

$$P(X=5)=p(1-p)^{5-1}=\frac{4}{10}\left(\frac{6}{10}\right)^4=\frac{24}{10^5}=0{,}00024$$

- **Espérance :**

$$E(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{\frac{4}{10}}=1\times\frac{10}{4}=2{,}5$$

- **Variance :**

$$V(X)=\frac{1-p}{p^2}=\frac{\frac{6}{10}}{\frac{16}{100}}=\frac{6}{10}\times\frac{100}{16}=3{,}75$$

6. Loi uniforme :

On dit qu'une distribution suit une **loi uniforme** lorsque toutes les valeurs prises par la variable aléatoire sont **équiprobables.** Si *n* est le nombre de valeurs différentes prises par la variable aléatoire :

$$\forall i=1,2,\dots,n \quad P(X=x_i)=\frac{1}{n}$$

6.1. Caractéristiques :

Espérance : $E(X)=\frac{n+1}{2}$

Variance $V(X)=\frac{(n+1)(n-1)}{12}=\frac{n^2-1}{12}$

Exemple :

La distribution des chiffres obtenus au lancer d'un dé bien équilibré suit une loi uniforme dont la loi de probabilité est la suivante :

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Espérance :

$$E(X)=\frac{6+1}{2}=\frac{7}{2}$$

Variance :

$$V(X)=\frac{6^2-1}{12}=\frac{35}{12}$$