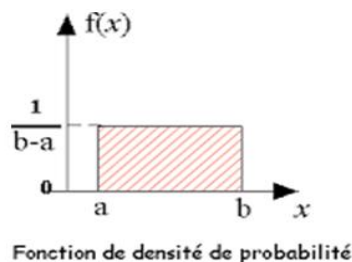


Université A- mira de Bejaia
Faculté des sciences économiques, commerciales et sciences de gestion
Module stat II
Enseignant : Dr. Mousli
Chapitre 5: Lois de probabilité d'une variable aléatoire continue

1. Loi uniforme

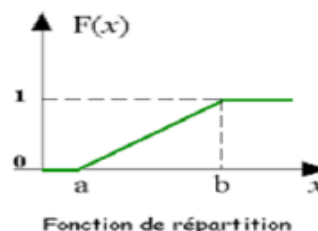
On dit qu'une variable aléatoire continue X suit une loi uniforme sur le segment $[a, b]$ si sa densité de probabilité est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{si } x \notin [a, b] \end{cases}$$



1.1. Propriétés

$$1) F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$



$$2) P(c < X < d) = \int_c^d f(x) dx = \frac{d-c}{b-a}$$

1.2. Caractéristique :

L'espérance :

$$E(X) = \frac{b+a}{2}$$

La variance :

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Exemple :

Supposons que la durée d'un appel téléphonique entre 2 personnes ne dépasse pas 1h. Soit X une V.A qui désigne la durée d'un appel (en heure) qui suit une loi uniforme sur $[0,1]$. Déterminer la probabilité que la durée de l'appel soit :

- 1) Égale à 30 mn. $(1/2)$ h.
- 2) D'au plus 45 mn. $(3/4)$ h.
- 3) D'au moins 10 mn. $(1/6)$ h.
- 4) Comprise entre 20 mn et 40 mn.
 $(1/3)$ h et $(2/3)$ h

Corrigé :

$$1) P\left(X = \frac{1}{2}\right) = P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{1 - 0} = 0$$

$$2) P\left(X \leq \frac{3}{4}\right) = P\left(0 \leq X \leq \frac{3}{4}\right) = \frac{\frac{3}{4} - 0}{1 - 0} = \frac{3}{4}$$

$$3) P\left(X \geq \frac{1}{6}\right) = P\left(\frac{1}{6} \leq X \leq 1\right) = \frac{1 - \frac{1}{6}}{1 - 0} = \frac{5}{6}$$

$$4) P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right) = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}}{1 - 0} = \frac{1}{3}$$

2. Loi exponentielle

La loi exponentielle est associée à l'étude de la durée de vie, au temps d'attente entre deux événements aléatoires, ou à un temps d'attente pour une première observation d'un événement aléatoire.

Définition :

Soit α un réel strictement positif. Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre α lorsque sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$$

2.1. Caractéristiques :

L'espérance :

$$E(X) = \frac{1}{\alpha}$$

La variance :

$$V(X) = \frac{1}{\alpha^2}$$

2.2. Fonction de répartition

Si X est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre α , on définit la fonction F appelée fonction de répartition de X de la façon suivante :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\alpha x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Exemple :

La durée de vie d'un ordinateur portable exprimée en années est une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre $\alpha = 0,125$.

-Calculer la probabilité que la durée de vie de cet ordinateur portable soit inférieure à 3 ans.

-Calculer la probabilité que la durée de vie de cet ordinateur portable dépasse 5 ans.

Corrigé :

- $P(X \leq 3) = F(3) = 1 - e^{-0,125 \times 3} = 1 - e^{-0,375} = 1 - 0,687 = 0,312$
- $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 5)$
 $= 1 - F(5)$
 $= 1 - [1 - e^{-0,125 \times 5}] = e^{-0,625} = 0,535$

3. Loi normale ou loi de Laplace Gauss

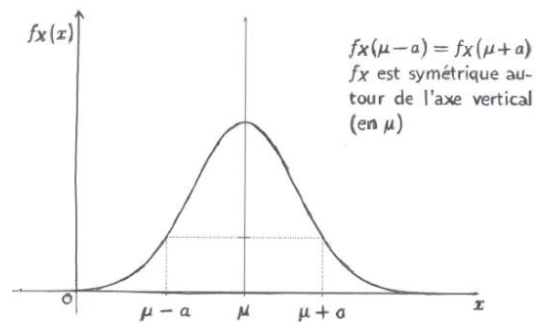
On parle de loi normale lorsqu'on a affaire à une variable aléatoire continue qui dépend d'un grand nombre de causes indépendantes dont les effets s'additionnent et dont aucun n'est prépondérant.

3.1. Définition

Une variable aléatoire continue X suit une loi normale de paramètres μ et σ , et on note : $X \sim N(\mu, \sigma)$ si sa densité de probabilité est de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}: f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\text{Avec } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$



3.2. Caractéristiques :

L'espérance : $E(X) = \mu$

La variance : $V(X) = \sigma^2$

4. La loi normale centrée et réduite

On dit qu'une variable aléatoire continue X suit une loi normale centrée réduite de paramètres $\mu = 0$ et $\sigma = 1$ et on note $X \sim N(0,1)$, si sa densité de probabilité est de la forme :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Si X suit une loi normale $X \sim N(\mu, \sigma)$ alors la variable aléatoire $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite : $Z \sim N(0,1)$

4.1. Caractéristiques :

Si: $Y = aX + b \Rightarrow E(Y) = aE(X) + b$ et $V(Y) = a^2V(X)$

$$\text{On a: } Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma}$$

$$E(Z) = \frac{1}{\sigma} E(X) - \frac{\mu}{\sigma} = \left(\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} \right) = 0$$

$$V(Z) = V\left(\frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} V(X) = \frac{1}{\sigma^2} \times \sigma^2 = 1$$

4.2. Fonction de répartition

On peut ramener tout calcul de la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit une loi normale $N(\mu, \sigma)$ à un calcul sur la fonction de répartition notée $\Phi(x)$ d'une variable aléatoire de la loi normale centrée réduite ($N(0, 1)$) :

- En effet si : $X \sim N(\mu, \sigma)$
- $P(X \leq a) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

4.3. Calcul de probabilités (utilisation de la table)

Théorème :

Si une variable aléatoire X suit une loi normale centrée réduite ($X \sim N(0,1)$) alors pour tous réels a et b tels que $a \leq b$, on a :

- $P(X \leq a) = \Phi(a)$
- $P(a \leq X \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$
- $P(X \leq -a) = \Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$
- $P(-a \leq X \leq +a) = 2\Phi(a) - 1$

Propriétés :

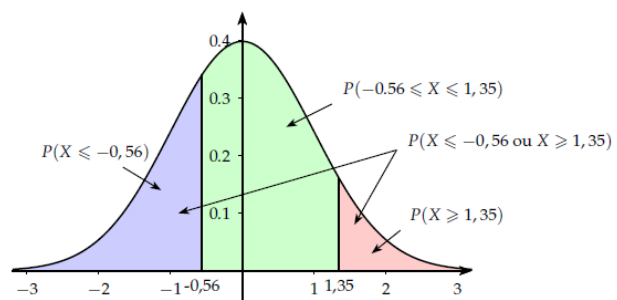
Si $X \sim N(\mu, \sigma)$

- $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0,6826$
- $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0,9544$
- $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0,9974$

Exemple :

Une variable aléatoire X suit une loi normale centrée réduite. À l'aide d'une table des valeurs de Φ déterminer les probabilités suivantes :

- a) $P(X \geq 1,35)$
- b) $P(X \leq -0,56)$
- c) $P(-0,56 \leq X \leq 1,35)$
- d) $P(X \leq -0,56 \text{ ou } X \geq 1,35)$



Corrigé :

On repère sur la table les valeurs : $\Phi(0,56) \approx 0,7123$ et $\Phi(1,35) \approx 0,9115$

- a) $P(X \geq 1,35) = 1 - P(X \leq 1,35) = 1 - \Phi(1,35) = 1 - 0,9115 = 0,0885$
- b) $P(X \leq -0,56) = \Phi(-0,56) = 1 - \Phi(0,56) = 1 - 0,7123 = 0,2877$
- c) $P(-0,56 \leq X \leq 1,35) = \Phi(1,35) - \Phi(-0,56) = 0,9115 - 0,2877 = 0,6238$
- d) $P(X \leq -0,56 \text{ ou } X \geq 1,35) = P(X \leq -0,56) + P(X \geq 1,35) = 0,3762$

Exercice : Soit une population gaussienne de moyenne $\mu = 60$ et d'écart-type $\sigma = 5$.

- 1) Quelle est la proportion des valeurs dépassant 65 ?
- 2) Quelle est la proportion des valeurs comprises entre 56 et 63 ?
- 3) Quelle est la proportion des valeurs comprises entre 50 et 70 ?
- 4) Quelle est la valeur dépassée par 30% des valeurs ?

Corrigé :

On a : $X \sim N(60, 5)$

$$1) P(X > 65) = 1 - P(X \leq 65)$$

$$= 1 - P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{65 - 60}{5}\right)$$

$$= 1 - P(Z \leq 1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0,84134 = 0,1587$$

Donc la proportion des valeurs dépassant 65 est égale à 15,87%

$$2) P(56 \leq X \leq 63) = P\left(\frac{56 - 60}{5} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{63 - 60}{5}\right)$$

$$= P(-0,8 \leq Z \leq 0,6)$$

$$= \Phi(0,6) - \Phi(-0,8)$$

$$= \Phi(0,6) - [1 - \Phi(0,8)]$$

$$= 0,7257 - [1 - 0,7881] = 0,5138$$

Donc la proportion des valeurs comprises entre 56 et 63 est égale à 51,38%

$$3) P(50 \leq X \leq 70) = P(60 - 2 \times 5 \leq X \leq 60 + 2 \times 5)$$

$$= P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0,9544$$

Donc la proportion des valeurs comprises entre 50 et 70 est égale 95,44%.

4) En dessous de la valeur recherchée se trouvent 70% des valeurs. Dans la table de la loi normale centrée réduite ($N(0,1)$) on a :

$$P\left(Z \leq \frac{X-60}{5}\right) = \Phi\left(\frac{X-60}{5}\right) = 0,7$$

Le nombre 0,7 (le plus proche 0,6985) correspond à $t = 0,52$.

$$\frac{X - 60}{5} = 0,52 \Rightarrow X - 60 = 5 \times 0,52 \Rightarrow X = 2,5 + 60 = 62,5$$

La valeur recherchée est : $X = 62,5$.

4.4. Approximation de la loi binomiale par la loi normale (loi de Gauss)

Une loi binomiale $B(n, p)$ peut être approximée par une loi normale de paramètre μ et σ si : $n \times p > 5$ avec : $\mu = n \times p$ et $\sigma = \sqrt{n \times p \times q}$

Exemple :

La probabilité pour qu'un individu soit **atteint** par une maladie donnée est $p = 0,4$.

- Donner la proportion pour que dans une population de 100 individus, moins de 50 individus seraient atteints de cette maladie.

Corrigé :

Si on applique la loi binomiale, on a : $\{\text{succès} (p = 0,4) \text{ et échec} (q = 1 - p = 0,6)\}$
 $P(X = k) = C_{100}^k (0,4)^k (0,6)^{100-k}$
 $P(X < 50) = P(X = 0) + P(X = 1) + \dots + P(X = 49)$ (Calcul trop long)

Comme : $n \times p = 100 \times 0,4 = 40 > 5$ on peut alors approximer la loi Binomiale par la loi normale avec :

$$\mu = n \times p = 100 \times 0,4 = 40 \text{ et } \sigma = \sqrt{100 \times 0,4 \times 0,6} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \text{ et on dit que: } X \sim N(40, 2\sqrt{6})$$

Comme $X \sim N(\mu, \sigma)$, on peut utiliser alors la table de la loi normale centrée réduite au calcul de $P(X < 50)$ en procédant au changement de variable par $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ ($Z \sim N(0,1)$)

$$\begin{aligned} \text{D'où : } P(X < 50) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{50-40}{2\sqrt{6}}\right) \\ &= P(Z \leq 2,04) = \Phi(2,04) = 0,9793 \end{aligned}$$

Le pourcentage pour que dans une population de 100 individus, moins de 50 individus seraient atteints de cette maladie est $P = 97,93\%$.