

Maths 3

Université de A.MIRA de Béjaïa
Faculté de Technologie
Département ATE
2ème Année Licence
Durée : 01H30

© 2024-2025

✂-Examen de rattrapage - Mathématiques 3-✂

Exercice 1 (08.00 points) :

1. Calculer les intégrales simples suivantes :

$$\textcircled{2} \quad I_1 = \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx, \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^2 \frac{x^3 + x^2 + 4x + 6}{x^2 + 4} dx. \quad \textcircled{2}$$

2. Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

$$I_3 = \int_2^{+\infty} \cos(x^2) dx, \quad \text{et} \quad I_4 = \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^3} dx. \quad \textcircled{2} \quad \textcircled{2}$$

Exercice 2 (12.00 points) :

- I. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- Tracer le domaine D . $\textcircled{1}$
- Calculer l'intégrale double suivante :

$$I = \iint_D \cos(x^2 + y^2 + 1) dx dy. \quad \textcircled{2}$$

II. Soient

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}, \quad \text{et} \\ V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$$

1. Calculer les deux intégrales triples suivantes :

$$\textcircled{02,50} \quad I_1 = \iiint_{V_1} x^2 z dx dy dz, \quad \text{et} \quad I_2 = \iiint_{V_2} z^2 dx dy dz. \quad \textcircled{2,50}$$

III. Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

$$\textcircled{2} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{\cos^2(n)}{n \sqrt{n}}, \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{e^{-n} n!}{n^n}. \quad \textcircled{2}$$

Une rédaction précise, claire et rigoureuse est requise.

Bonne Chance

© M. Zioui & M. Boualem

Exo 1

$$\begin{aligned}
 1) I_1 &= \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx \\
 &= - \int_0^1 \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx \\
 &= - \left[\ln(1 + e^{-x}) \right]_0^1 \\
 &= \ln(e) - \ln(1 + e^{-1}) \\
 &= \ln\left(\frac{e}{1 + e^{-1}}\right) \\
 &= \ln\left(\frac{ee}{e+1}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_0^2 \frac{x^3 + x^2 + 4x + 6}{x^2 + 4} dx \\
 &= \frac{x^3 + x^2 + 4x + 6}{x^2 + 4} = \frac{-x^3 - 4x}{x^2 + 4} + \frac{2x^2 + 6}{x^2 + 4} \\
 &= \frac{-x^3 - 4x}{x^2 + 4} + \frac{2x^2 + 6}{x^2 + 4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_0^2 \left(x + 1 + \frac{2}{x^2 + 4} \right) dx \\
 &= \left[\frac{1}{2} x^2 + x + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{4}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{4}}\right) \right]_0^2 \\
 &= \left[\frac{1}{2} x^2 + x + \arctan\left(\frac{x}{2}\right) \right]_0^2 \\
 &= 4 + \frac{\pi}{4} \\
 &= \frac{16 + \pi}{4}
 \end{aligned}$$

$$2) I_1 = \int_2^{+\infty} \cos(x^2) dx$$

on pose $t = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{t}$

$x = 2 \Rightarrow t = 4$

$x \rightarrow +\infty \Rightarrow t \rightarrow +\infty$

$dt = 2x dx = 2\sqrt{t} dt$

$\Rightarrow dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$

$$I_1 = \int_4^{+\infty} \frac{\cos(t)}{2\sqrt{t}} dt$$

la fct $t \mapsto \frac{1}{2\sqrt{t}}$ continue;

positive et décroissante

sur $[4; +\infty[$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{t}} = 0$

$\forall x \in [4; +\infty[$:

$$\left| \int_4^x \cos(t) dt \right| = |\sin(x) - \sin(4)|$$

$$\leq |\sin(x)| + |\sin(4)| \leq 1 + 1 = 2$$

$\exists M = 2 > 0$ tq $\left| \int_4^x \cos(t) dt \right| \leq M$

d'après le critère d'Abel

$$\int_4^{+\infty} \frac{\cos(t)}{2\sqrt{t}} dt \text{ converge}$$

d'où $\int_2^{+\infty} \cos(x^2) dx$ converge

$$I_2 = \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^3} dx$$

La fct $x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{x^3}$ continue et positive sur $]0; 1[$

$$\frac{\ln(x+1)}{x^3} \sim_0 \frac{1}{x^2}$$

(car $\ln(x+1) \sim_0 x$)

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^1 \frac{1}{t} dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{t} \right]_x^1 = -1 + \frac{1}{x}$$

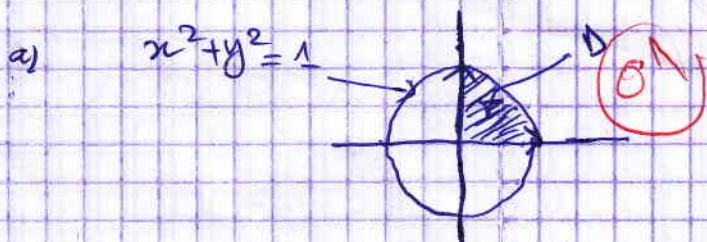
$$= -\infty \quad (\text{diverge})$$

d'après le critère d'équivalence

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^3} dx \text{ diverge}$$

Exo 2

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 1\}$$



$$b) I = \iint_D \cos(x^2 + y^2 + 1) dx dy$$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad |J| = r$$

$$I_1 = \iint_D \cos(r^2 + 1) \cdot r dr d\theta$$

$$= \int_0^1 r \cos(r^2 + 1) dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{2} \sin(r^2 + 1) \right]_0^1 \cdot \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} (\sin(2) - \sin(1)) \times \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\sin(2) - \sin(1)}{2} \times \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{4} (\sin(2) - \sin(1))$$

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$$

$$I_1 = \iiint_{V_1} x^2 z dx dy dz$$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

$$|J| = r$$

$$0 \leq r \leq 1$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$r^2 \leq z \leq 1$$

$$I_1 = \iiint_{V_1} r^2 \cos^2 \theta z r dr d\theta dz$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \int_{r^2}^1 r^3 z dz \right) dr \times \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} r^3 [z^2]_{r^2}^1 dr \times \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos(2\theta)) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (r^3 - r^7) dr \times \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4} r^4 - \frac{1}{8} r^8 \right] \times [2\pi]$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right] = \frac{\pi}{16}$$

$$V_2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \}$$

$$I_2 = \iiint_{V_2} z^2 dx dy dz$$

$$x = r \cos \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$z = r \sin \varphi$$

$$|J| = r^2 \cos \varphi$$

$$0 \leq r \leq 3$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$I_2 = \iiint_{V_2} r^2 \sin^2 \varphi \cdot r^2 \cos \varphi dr d\theta d\varphi$$

$$= \int_0^3 r^4 dr \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin^2 \varphi d\varphi$$

$$= \left[\frac{1}{5} r^5 \right]_0^3 \cdot [0]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{243}{5} \times 2\pi \cdot \frac{2}{3} = \frac{324\pi}{5}$$

3) $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos^2(n)}{n\sqrt{n}}$ est une série numérique à termes positifs.

$$\cos^2(n) \leq 1$$

$$\frac{\cos^2(n)}{n\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{convergence est une}$$

série de Riemann par $d = \frac{3}{2} > 1$)

D'après le critère de comparaison

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\cos^2(n)}{n\sqrt{n}} \text{ converge}$$

(3)

4

$$\sum_{n \geq 1} \frac{e^{-n} \cdot n!}{n^n}$$

$$\mu_n = \frac{e^{-n} \cdot n!}{n^n} \Rightarrow \mu_{n+1} = \frac{e^{-(n+1)} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$$

$$= \frac{e^{-1} \cdot e^{-n} \cdot (n+1) \cdot n!}{(n+1)^n \cdot (n+1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-1} \cdot e^{-n} \cdot (n+1) \cdot n!}{(n+1)^n \cdot (n+1)} \cdot \frac{n^n}{e^{-n} \cdot n!}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-1} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-1} \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-1} \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-1} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n}$$

$$= e^{-1} \cdot \frac{1}{e} = e^{-2} < 1$$

Donc d'après le critère d'Alembert

$$\sum_{n \geq 1} \frac{e^{-n} \cdot n!}{n^n} \text{ converge}$$

(4)