

TD5

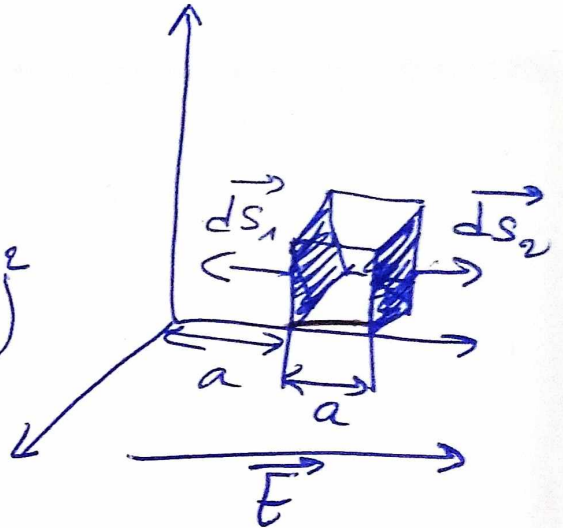
Exo1:

Le champ $\vec{E}$ est parallèle à l'axe Ox donc son flux à travers le cube se réduit aux flux à travers les deux faces perpendiculaires à l'axe Ox (en gras sur la figure)

$$\Phi_E = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \int \vec{E} \cdot d\vec{S}_2$$
$$= -ES_1 + ES_2$$

$$= -800\sqrt{0,1}(0,1)^2 + 800\sqrt{0,2}(0,1)^2$$

$$= -2,53 + 3,58 = 1,05 \left[\frac{N}{C} m^2 \right]$$



$$\Phi_E = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow Q_{int} = \Phi_E \cdot \epsilon_0$$

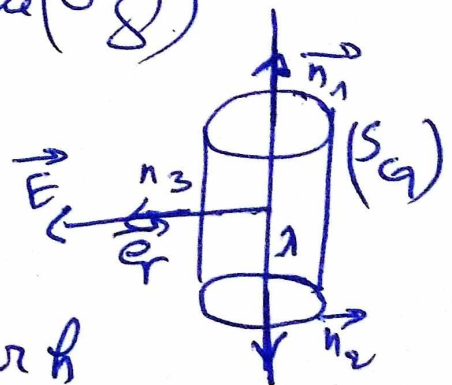
$$\Rightarrow Q_{int} = 1,05 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} = 9,3 \cdot 10^{-12} C$$

Exo2:

un fil infini uniformément chargé avec une densité linéique $\lambda > 0$ porté par l'axe (Oz) .
Symétrie cylindrique : le champ électrique est radial : (perpendiculaire à l'axe (Oz))

$$\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$$

Surface de Gauss : cylindre
de rayon r , d'axe (Oz) et de hauteur h



calcul du flux à la surface d'un cylindre est constituée de trois surfaces : 2 surfaces de bases (S_1 et S_2) et une surface latérale (S_3). Donc, il y aura trois flux :

$$\begin{aligned}\Phi &= \oiint_{(S_G)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 \\ &= \iint_{(S_1)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{(S_2)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 + \iint_{(S_3)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_3 \\ &= \iint_{(S_1)} (E_r \vec{e}_r) \cdot (dS \vec{n}_1) + \iint_{(S_2)} (E_r \vec{e}_r) \cdot (dS \vec{n}_2) + \iint_{(S_3)} E_r \vec{e}_r \cdot (dS \vec{n}_3) \\ &= \iint_{(S_1)} (E_r \vec{e}_r) (\vec{e}_r \cdot \vec{n}_1) + \iint_{(S_2)} (E_r dS) (\vec{e}_r \cdot \vec{n}_2) + \iint_{(S_3)} (E_r dS) (\vec{e}_r \cdot \vec{n}_3)\end{aligned}$$

$$\iint_{(S_3)} E dS (\vec{e}_r \perp \vec{n}_{1,2})$$

par ailleurs, le champ est constant sur la surface latérale :

$$\Phi = E \iint_{(S_3)} dS = E S_3 = E (2\pi r h)$$

charge intérieure à la surface de Gauss : $Q_{int} = \lambda h$

théorème de Gauss :

$$\Phi = \oiint_{(S_G)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$E(r) (2\pi r h) = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \rightarrow Er = \frac{1}{2\pi \epsilon_0 r}$$

- sur plan infini $\sigma > 0$.

Symétrie plane: le champ électrique est perpendiculaire au plan et ne dépend pas des coordonnées de ce plan

$$\vec{E}(M) = E(z) \vec{k}$$

Surface de Gauss.

Surface 1a.

$$(S_1) z = \frac{h}{2}$$

la surface $S_2 = \frac{h}{2}$
se trouve en $z = -\frac{h}{2}$.

calcul du flux.

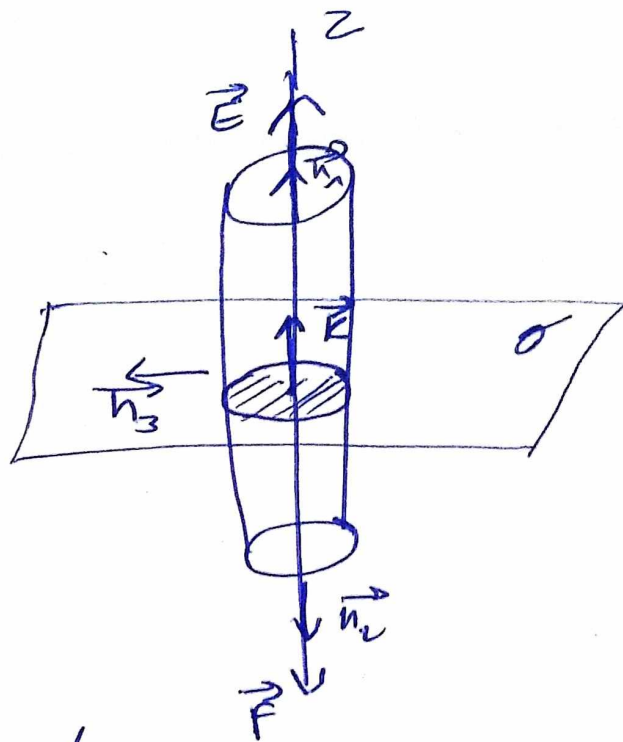
$$\Phi = \oiint_{(S_a)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$$

$$= \iint_{(S_1)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 + \iint_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S}_3$$

$$= \iint_{(S_1)} (E_r ds) (\vec{e}_r \cdot \vec{n}_1) + \iint_{(S_2)} (E_r ds) (\vec{e}_r \cdot \vec{n}_2)$$

$$+ \iint_{(S_3)} (E_r ds) (\vec{e}_r \cdot \vec{n}_3)$$

$$\left[\iint_{S_1} E ds + \iint_{(S_2)} E ds (\vec{e}_r \cdot \vec{n}_3) \right]$$



par ailleurs le champ est constant sur la surface des bases :

$$\phi = E \iint_{S_1} dS + E \iint_{S_2} dS = ES_1 + ES_2 = 2ES \quad (S_1 = S_2 = S)$$

charge intérieure à la surface de Gauss

$$Q_{\text{int}} = \sigma S.$$

Théorème de Gauss

$$\phi = \oint_{(S_G)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \rightarrow 2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

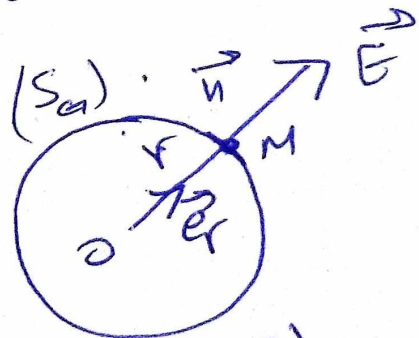
$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Exo 3

Le champ radial: $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$.

le rayon $r = OM$

le centre O



calcul du flux

$$\phi = \oint_{(S_G)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = ES_G = E(4\pi r^2).$$

charge intérieure et champ.

$$r < R_1: \Phi_{\text{int}} = 0 \Rightarrow E_1 = 0.$$

$$R_1 < r < R_2: \Phi_{\text{int}} = Q \Rightarrow E_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

$$\vec{E}_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

$$r > R_2: \Phi_{\text{int}} = Q - Q = 0 \Rightarrow E_3 = 0.$$

2) le potentiel électrostatique

pour $r < R_1$.

$$dV_1(r) = -\vec{E}_1 \cdot d\vec{r} = E_1 \cdot dr.$$

$$V_1(r) = -\int E_1 \cdot dr = C_1.$$

pour $R_1 < r < R_2$.

$$dV_2(r) = -\vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = E_2 \cdot dr.$$

$$V_2(r) = -\int E_2 \cdot dr = -\int \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + C_2.$$

pour $r > R_2$.

$$dV_3(r) = -\vec{E}_3 \cdot d\vec{r} = E_3 \cdot dr.$$

$$V_3(r) = -\int E_3 \cdot dr = C_3.$$

Détermination des constantes

$$V(r) = 0 \text{ quand } r \rightarrow +\infty.$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0 \rightarrow C_3 = 0.$$

La continuité du potentiel en $r = R_2$ implique

$$V_3(R_2) = V_2(R_2) \rightarrow \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} !$$

La continuité du potentiel en $r = R_1$ implique

$$C_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Les expressions du potentiel

Pour $r < R_1$

* Pour $r < R_1 \Rightarrow V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$

* Pour $R_1 < r < R_2$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right)$$

* Pour $r > R_2 \Rightarrow V(r) = 0$